

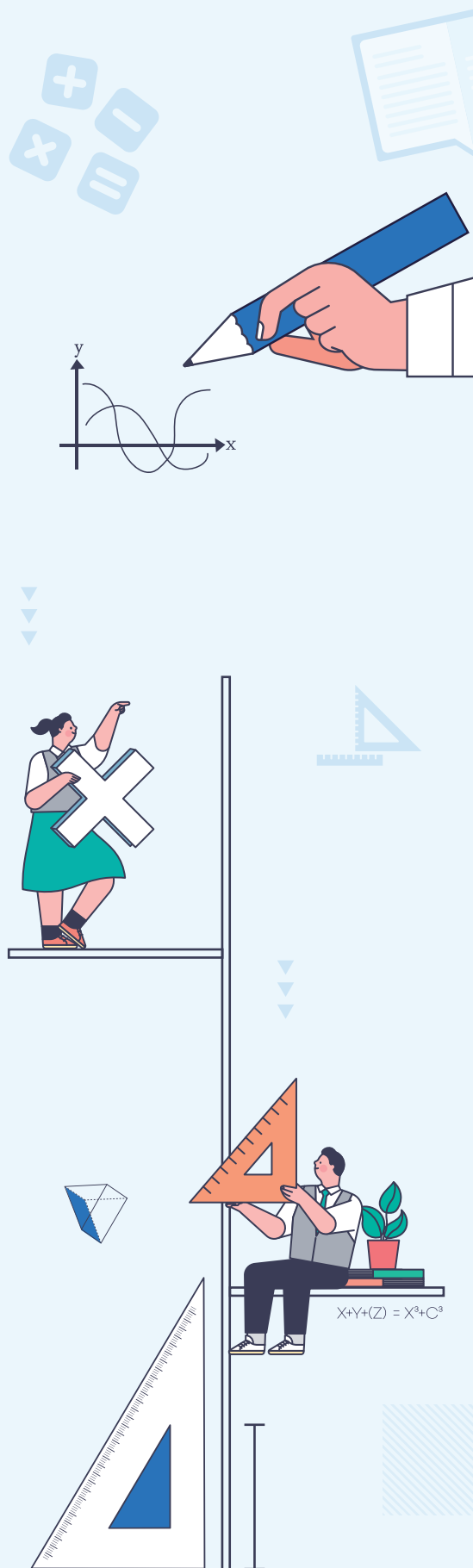
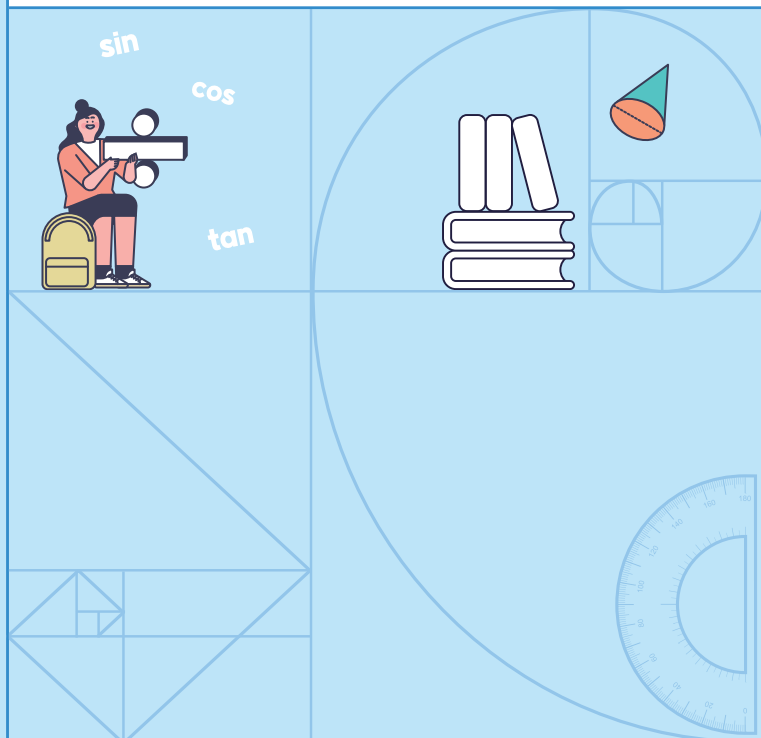
성취수준 도달지원

대수

학습자료집

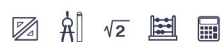
가이드북

수학에 대한 자신감을 키워주는
학습자 참여 중심 프로그램



성취수준 도달 지원 **대수** 학습자료집 가이드북

수학에 대한 자신감을 키워주는 학습자 참여 중심 프로그램



1. 2022 개정 수학과 교육과정과 고교 선택과목	4
2. 고교학점제 안내	7
3. 수학에 자신감을 키워주는 학습자 참여 중심 프로그램	10
4. 영역별 프로그램	14
지수함수와 로그함수	14
01. 거듭제곱근과 지수법칙	18
02. 로그와 상용로그	30
03. 지수함수와 로그함수	36
삼각함수	45
04. 일반각과 호도법	48
05. 삼각함수의 그래프	54
06. 사인법칙과 코사인법칙	64
수열	74
07. 수열과 등차수열	78
08. 등비수열	86
09. 여러 가지 수열의 합	94
10. 수열의 귀납적 정의	102
함께하는 수학 활동지	110
삼각함수로 표현하는 소리	110
정서 회복과 학습 성장 프로그램: 「수학과 나, 다시 연결하기」	116
01. 나의 수학 이야기	118
02. 나의 수학 학습 동기 점검	123
03. 나의 수학 학습 습관 되돌아보기	129
부 록	90

1

2022 개정 수학과 교육과정과 고교 선택과목

가 2022 개정 교육과정 총론

2022 개정 교육과정은 교육 환경 변화에 대처하고 국가·사회적 요구를 반영하여 미래 사회가 요구하는 ‘포용성과 창의성을 갖춘 주도적인 사람’이라는 인간상을 제시하였다. 또한 학생의 삶과 성장을 지원하며 ‘자기 관리, 지식정보처리, 창의적 사고, 심미적 감성, 협력적 소통, 공동체’ 역량을 중점적으로 기르고, 수리 소양, 디지털 소양, 언어 소양의 기초 소양 함양도 강조하였다.

나 2022 개정 수학과 교육과정

이에 수학과 교육과정은 총론의 핵심역량과 연계하여 ‘문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리’ 역량을 수학 교과 역량으로 설정하고, 핵심 아이디어와 지식·이해, 과정·기능, 가치·태도의 세 범주로 내용 체계를 구성하여 수학 교과 역량 함양을 지원하도록 설계하였다. 아울러 기초 소양의 함양과 생태전환 교육, 민주 시민 교육, 학생 맞춤형 교육을 도모하는 교수·학습 및 평가 방법을 제시하였다. 또한 학생 주도성 개념을 바탕으로 학생의 삶과 성장을 지원하고 온라인 교육 환경에서 교수·학습 및 평가를 할 수 있도록 하였다.

다 선택중심의 수학과 교육과정

고등학교 수학 과목은 공통 과목, 일반 선택 과목, 진로 선택 과목, 융합 선택 과목으로 구분되며, 공통 과목은 고등학교 수학을 학습하는 데 기본이 되는 내용을, 일반 선택 과목은 수학의 학문 영역 내에서 주요 학습 내용을, 진로 선택 과목은 심화 학습 및 진로 관련 내용을, 융합 선택 과목은 수학 안팎의 주제를 융합하고 체험, 응용하는 내용을 다루도록 구성하였다. 고등학교 수학 과목의 구조는 그림과 같다.

고등학교 수학 과목 구조

공통 과목	선택 과목		
	일반 선택 과목	진로 선택 과목	융합 선택 과목
공통수학1, 공통수학2	대수, 미적분 I, 확률과 통계	미적분 II, 기하, 경제 수학, 인공지능 수학, 직무 수학	수학과 문화, 실용 통계, 수학과제 탐구
기본수학1, 기본수학2		전문 수학, 이산 수학, 고급 대수, 고급 미적분, 고급 기하	

라 일반 선택과목 <대수>의 성격과 목표, 내용체계표

성격

<대수>는 규칙적으로 변화하는 관계를 표현한 함수에 대해 이해하고 탐구하는 과목이다. <대수>에서 학습한 내용은 매우 빠르게 또는 느리게 증가하거나 감소하는 수량이나 현상 혹은 주기적인 현상을 표현하고 탐구하거나, 규칙적으로 나열된 수를 일반적인 식으로 나타내는 데 도움이 된다.

<대수>를 학습한 학생들은 큰 수를 더 편리하게 다루고, 주기적인 성질을 이해하여 다양한 사회 현상이나 자연 현상을 수학적으로 해석하고 탐구할 수 있으며, 모든 자연수에서 성립하는 규칙의 일반성을 귀납적 추론 또는 연역적 추론을 통해 수학적으로 정당화할 수 있다. <대수>는 자신의 진로와 적성을 고려하여 대수에 대한 지식과 기능을 습득하기를 원하는 학생들이 선택할 수 있다. <대수>에서 학습한 내용은 자연과학, 공학, 의학, 경제·경영학을 포함한 사회과학 등 여러 분야를 학습하는 데 기초가 된다.

학생들은 <대수>의 학습을 통해 규칙성과 관계에 대한 안목을 가지고 수학적 사고 과정에 요구되는 기능을 형성하며 수학의 가치를 인식하고 바람직한 수학적 태도를 갖추어 수학 교과 역량을 함양할 수 있다. 또한 <대수>를 학습하는 과정에서 협력하여 문제를 해결하고 성찰하는 경험을 통해 다른 사람에 대한 포용성을 갖춘 민주 시민이자 인간과 환경의 공존 및 지속가능한 발전을 추구하며 사회적 책임감을 가지고 합리적으로 의사 결정하는 세계 공동체의 일원으로 성장할 수 있다.

목표

<대수>의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학의 가치를 인식하며 바람직한 수학적 태도를 길러 수학적으로 추론하고 의사소통하며 다양한 현상과 연결하여 정보를 처리하고 문제를 창의적으로 해결하는 수학 교과 역량을 함양한다.

- (1) 대수 지식을 이해하고 활용하여 적극적이고 자신감 있게 여러 가지 문제를 해결한다.
- (2) 대수에 흥미와 관심을 갖고 추측과 정당화를 통해 추론한다.
- (3) 대수에서 활용되는 수학적 사고와 전략에 대해 의사소통하고 수학적 표현의 편리함을 인식한다.
- (4) 대수와 관련된 수학의 개념, 원리, 법칙 간의 연결성을 탐구하고 실생활이나 타 교과에 수학을 적용하여 수학의 유용성을 인식한다.
- (5) 목적에 맞게 교구나 공학 도구를 활용하며 자료를 수집하고 처리하여 정보에 근거한 합리적 의사 결정을 한다.

●● 내용 체계표 ●●

핵심 아이디어		· 지수함수, 로그함수는 급격히 증감하는 대상이나 현상을, 삼각함수는 주기적으로 변하는 대상이나 현상을 표현하고 이해하는 데 활용된다. · 수열은 나열된 대상의 규칙을 수학적으로 표현하고 이해하는 데 활용되며, 수학적 귀납법은 자연수에 대해 성립하는 명제를 증명할 때 사용된다.
범주	구분	내용 요소
지식·이해	지수함수와 로그함수	· 지수와 로그 · 지수함수와 로그함수
	삼각함수	· 삼각함수 · 사인법칙과 코사인법칙
	수열	· 등차수열과 등비수열 · 수열의 합 · 수학적 귀납법
과정·기능		· 대수의 개념, 원리, 법칙 탐구하기 · 식과 그래프, 수학 기호 등을 비교하고, 표현하기 · 대수의 개념, 원리, 법칙이나 자신의 수학적 사고와 전략 설명하기 · 적절한 전략을 사용하여 문제해결하기 · 대수의 개념, 법칙 활용하기 · 적절한 공학 도구를 선택하여 함수의 그래프 그리고 탐구하기 · 상용로그, 삼각함수를 실생활과 연결하기 · 등차수열과 등비수열의 일반항과 그 합 구하기 · 수학적 귀납법으로 증명하기
가치·태도		· 지수와 로그 표현의 편리함 인식 · 실생활과의 연결을 통한 지수함수, 로그함수, 삼각함수의 유용성 인식 · 수학적 귀납법으로 명제를 증명하여 논리적으로 사고하는 태도

2

고교학점제 안내

가 고교학점제의 이해

(1) 고교학점제

- 학생이 기초 소양과 기본 학력을 바탕으로 진로·적성에 따라 과목을 선택하고, 이수 기준에 도달한 과목에 대해 학점을 취득·누적하여 졸업하는 제도
- 취지 : 4차 산업혁명과 저출생에 따른 인구구조의 변화, 새로운 세대의 학습 성향 등의 시대적 변화를 반영하여 학생이 희망하는 진로를 찾아가는 데 도움을 줌으로써 학생들이 미래의 주역이 될 수 있도록 교육과정을 운영하려고 함.
- 학교는 학생의 진로와 흥미, 관심 분야에 따라 과목을 선택할 수 있는 학생 맞춤형 교육과정을 운영하여 학생들의 미래 설계에 도움을 주도록 노력해야 함.

(2) 고교학점제의 운영 중점

- 학생의 수요 반영 : 선택 과목 수요 조사, 수강 신청 절차 운영 등을 통해 학생 개개인의 수요를 반영한 교육과정 구성
- 진로·학업 설계 지도 : 학생들이 진로와 연계된 학업 계획을 수립하고 책임 있게 이수할 수 있도록 진로·학업 설계 지도 체계화
- 최소 성취수준 보장 : 학생들이 과목 이수 기준에 도달하여 학점을 취득할 수 있도록 최소 성취수준 미도달 예방 보충 지도 등 학교 책임 교육 강화

(3) 고교학점제 시행에 따른 변화 내용¹⁾

	변화 내용('25년~)	
수업량	• 교과 174학점(1학점: 16회 수업)	• 창의적 체험활동 18학점(288시간) - 주당 평균 3시간(학기당 3학점)
졸업 요건	• 과목별 이수 기준 적용 - 이수 기준: 과목 출석률 2/30이상 + 학업 성취율 40% - 이수 기준 미충족시 보충 지도를 통한 학점 취득 • 3년간 최소 192학점 이상 취득시 졸업	
평가	• 상대평가 등급 병기(5등급) ※ 체육·예술·교양 교과(군) 과목, 과학탐구실험, 사회·과학 융합 선택 과목은 절대평가 성취도만 기재 • 과목별 5단계 성취도(A~E) ※ 체육·예술·교과(군)·과학탐구실험 3단계(A~C), 교양 교과(군) P	

1) 고교학점제 도입 운영 안내서(교육부, 2023), 2022 개정 고등학교 교육과정 편성·운영 톺아보기(교육부, 2024), 2028 대학 입시제도 개편 확정안(2023)을 참고하여 재구성함.

(4) 고교학점제의 학사 제도 운영



- 1단계: 다양한 과목 개설
 - 학교는 학생의 진로와 적성, 흥미 등을 고려한 과목 선택이 가능하도록 학생 맞춤형 교육과정을 준비
 - 학교지정 과목 수를 늘리면 학생의 과목 선택이 제한되므로 학교 지정 과목 수를 최소화하여 학생의 선택을 확대하는 것이 바람직함
 - 학생의 다양한 진로를 고려하여 각 교과에서 학기별 이수 과목을 정하고, 이를 바탕으로 학교 교육과정을 편성해야 함
- 2단계: 진로·학업 설계
 - 학생별 진로·학업 상담을 통하여 학생이 자신의 진로를 설계하고 진로에 따른 과목을 선택하도록 꾸준히 지도하고 안내
 - 교육과정 이수 지도팀 구성, 교육과정 박람회, 교육과정 설명회, 선후배 멘토링, 학업 계획서 작성 지도 등 학교 상황과 여건에 맞는 체계적인 진로·학업 설계 방안 운영
- 3단계: 수강 신청
 - 학생 개인이 수강 신청을 하되, 학교는 교육과정 이수 조건 충족 및 과목 간 위계 준수 여부 등에 대해 모니터링을 함
 - 학생들의 수강 신청이 완료되면 과목 개설 여부를 학교 교육과정 규정에 따라 심의하여 결정
 - 학교 여건상 과목 개설이 어려운 경우는 학교간 공동교육과정 등을 통해 이수하는 방안이 있다는 점도 학생에게 안내
- 4단계: 수업 운영
 - 교사는 학습자의 학습 과정과 결과를 심층적으로 파악하여 학생의 개별 성장을 지원함
 - 학생 주도의 성장과 자발적인 배움을 촉진하기 위해 학생 참여 중심 수업을 다양한 형태로 확대
 - 수업의 교육적 효과를 높이고 학생 맞춤형 학습 환경 등을 제공하기 위해 에듀테크를 수업에 적극적으로 활용하는 방안도 고려
- 5단계: 학생 평가
 - 교사는 수업을 통해 학생이 성장하는 과정을 과목별 성취기준에 따라 평가

- 평가 결과에 대한 피드백을 학생에게 지속적으로 제공하여 학생의 성장을 도움
- 학생의 학습 과정과 결과를 누가 기록하고, 학습 과정을 통해 드러난 학생의 성취수준 및 학습 활동 참여도 등 특기할 만한 사항을 학교생활기록부의 '과목별 세부능력 및 특기사항' 란에 기록
- 6단계: 이수/미이수
 - 과목 수업의 2/3 이상 출석과 함께 학업 성취율이 40% 이상 충족되어야 해당 과목의 이수 및 학점이 인정됨
 - 이 기준에 도달하지 못하면 미이수가 되는데 이때는 보충 지도에 참여하여 해당 과목을 이수할 수 있음. 미이수를 예방하기 위해서는 학점 취득의 두 요건을 모두 충족하기 위한 학생과 교사의 노력이 필요함.
- 7단계: 학점 취득과 졸업
 - 2025학년도 입학생부터 과목 출석률과 학업성취율 두 요건을 충족하여 3년간 192학점(교과 174학점, 창체 18학점) 이상을 취득하면 졸업 자격을 얻음

나 고교학점제 주요 요소 및 운영개선사항²⁾

(1) 주요 요소

- (과목 선택) 학생이 진로·적성과 연계된 학업 계획을 수립하고, 학교는 학생 수요를 반영한 교육과정 편성·운영 → 과목 선택 확대를 위해 학기제 운영
- (과목 이수 기준) 과목출석률(2/3이상), 학업성취율(40%이상) 동시 충족 시 학점 취득, 3년간 192학점 취득 시 졸업
- (최소 성취수준 보장지도) 과목 수업 종료 후 최소한의 도달 수준을 보장하기 위한 지도를 통해 책임교육 강화
 - ※ 학점 이수 기준 '미충족' 시 일정한 보충학습(예: 4학점 과목의 경우 20시간) 제공 후 '이수' 처리
- (내신 평가) 고등학교 내신의 신뢰성 확보를 위해 성취평가(5단계, A~E)와 상대평가(1~5등급) 병기

(2) 운영 개선 사항

- 고교학점제의 기초를 유지하며, '학생 지원 강화', '현장 수용성 제고', '운영 여건 개선 및 격차 해소'를 주요 내용으로 운영 개선 추진
 - 초·중학교 단계부터 기초학력 보장 지도를 체계적으로 운영하여 학습 결손 누적 예방
 - 기초학력 미달, 경제적·심리적 문제 등 학생의 복합적 어려움을 종합적으로 파악하고, 학생 개인별 다양한 원인에 따른 맞춤형 지원 강화('26~)
 - 학생맞춤통합지원법」시행('26.3.~)에 따라 사업 간 연계·지원

2) 교육부. (2025, 9월 25일). 교육부, 학생 맞춤형 교육 내실화와 현장 안착을 위한 고교학점제 운영 개선 대책 발표 [보도자료]. <https://www.moe.go.kr/boardCnts/viewRenew.do?boardID=294&boardSeq=104174&lev=0&searchType=nulI&statusYN=W&page=10&s=moe&m=020402&opType=N>

3

수학에 자신감을 키워주는 학습자 참여 중심 프로그램

가 프로그램 개요

- 본 프로그램은 2022 개정 수학과 교육과정 일반 선택과목에서 기초학력을 보장하기 위한 학습자 참여 중심 보충·지원 프로그램임.
 - 대상 과목은 <대수>, <미적분 I>, <확률과 통계>임.
 - 선택과목에서 최소한의 성취기준에 해당하는 기초 개념과 기본 기능을 중심으로 구성하여, 기초학력이 취약한 학생이 선택과목에 적응할 수 있도록 돕는 보충 자료집의 성격을 가짐.
 - 정규 수업과 연계하여 성취기준 학습 10차시와 ‘함께 하는 수학’ 1차시를 운영하고, 정서지원 프로그램 3차시를 더해 학생의 인지적·정의적 영역을 통합적으로 지원함.
- 본 프로그램은 기존 기초학력 보장 자료와의 연속성을 유지하면서, 고교 선택과목에 특화된 보충·지원 프로그램이라는 점에서 차별성을 가짐.
 - 진단-지원-사후관리라는 기본 흐름, 예방적 지원과 보정지도의 결합, 학습과 정서·동기의 통합 지원이라는 점에서 국가·시도를 교육부 및 시도교육청 기초학력 정책과 방향을 같이함.
 - 동시에 2022 개정 수학과 교육과정의 선택과목(<대수>, <미적분 I>, <확률과 통계>)에 특화된 10+1+3 구조를 제시하여, 선택과목 수업 속에서 바로 활용 가능한 차시형 프로그램북·가이드북을 제공함.
 - 학습결손 해소를 위한 방과후·방학 중 교과보충, 튜터링 등과도 연계하여 사용할 수 있도록, 정규 수업과 별도의 시간대 운영을 모두 고려한 구성을 지향함.

나 프로그램 목표

- 수학 선택과목에서 모든 학생의 기초학력을 보장하고, 특히 기초학력이 취약한 학생이 선택과목 학습을 지속할 수 있도록 지원하는 데 있음.
 - 선택과목 학습의 바탕이 되는 기초 개념, 기본 계산, 간단한 문제 해결 능력을 확보하도록 지원함.
 - 안내된 절차 문항과 협력 활동을 통해 느린 학습자도 단계적으로 학습에 참여하도록 돕고, 학업 실패 경험을 줄임.
 - 수학에 대한 부정적 정서를 완화하고 학습 동기와 자기효능감을 높이는 활동을 포함하여, 선택과목 학습을 지속할 수 있는 기반을 형성함.

다 프로그램 내용 및 구성

- 프로그램은 성취기준 학습 10차시, 함께 하는 수학 1차시, 정서지원 프로그램 3차시로 이루어짐.
 - 전체 프로그램은 과목별로 총 14차시 course로 구성됨.
- 성취기준 학습(10차시)
 - 선택과목 전체 내용을 모두 다루기보다, 기초학력 보장에 필수적인 성취기준을 선별하여 구성함.
 - 학습자 참여 중심으로 구성하기 위하여 단계적 비계와 협력 활동을 통해 기초학력 보장을 도모함.
 - 각 성취기준 학습 차시는 개념 흐름도-준비 학습-생각열기-안내된 절차 문항-오늘의 개념-자기평가-스스로 학습하기의 공통 틀을 따르며, 학생의 적극적 참여를 유도함.
 - 각 차시는 개념 흐름도와 준비 학습으로 선행 개념을 다시 짚어주고, 생각열기 활동으로 학생의 흥미와 배경지식을 활성화함.
 - 안내된 절차 문항을 활용하여 복잡한 문제를 단계별로 제시하고, 학생이 각 단계에서 스스로 해결·설명하게 함.
 - 짝·모둠 활동, 전체 토의 등을 통해 서로의 풀이를 비교·설명하게 하고, 교사는 과정을 중심으로 피드백함.
 - 오늘의 개념과 자기평가를 통해 학습 내용을 정리하고, 스스로 학습하기를 통해 기본 문제를 반복 연습하게 함.
- 함께 하는 수학(1차시)
 - 실생활 맥락의 프로젝트형 협력 활동을 통해 수학적 의사소통과 문제 해결을 경험하게 함.
- 정서지원 프로그램(3차시)
 - 수학 경험·동기·학습 습관을 돌아보고 미래 계획을 세우는 활동으로 구성하여, 학습·정서 측면을 함께 다룸.
 - “수학과 나, 다시 연결하기” 프로그램은 말하기-쓰기-나눔을 중심으로 운영하며, 정답 평가보다는 경험 공유와 공감 형성에 초점을 둠.
 - 1~3차시 전체 운영이 어려운 경우, 학교 상황에 따라 1차시(정서 회복), 2차시(동기 진단), 3차시(습관 개선) 중 필요한 차시만 선택적으로 운영함.
 - 진로 교육과 연계가 필요한 경우, 3차시에 수학 활용 직업 탐색 활동을 추가하여 운영함.

라 프로그램 특징 - 학습자 참여중심 프로그램

- 운영 원칙
 - 고교 선택과목 기초학력 보장을 위해 수업 전-중-후 전 과정에서 학습자 참여를 중심에 두는 운영 원칙을 적용함.
 - 학생이 직접 읽고 쓰고 말하며 문제를 해결하는 활동을 통해 능동적 참여를 유도함.
 - 정규 수업, 보충지도, 정서지원 활동을 서로 분리된 프로그램이 아니라 연결된 하나의 course로 운영함.
- 학습자 참여 중심 프로그램 유형
 - 학습자 참여를 증진하기 위하여 ‘탐구’ 중심 프로그램으로 구성
 - 생각열기 - 탐구 - 스스로 학습하기 로 이어지는 차시 구조를 통해, 학생이 수학적 개념과 문제를 탐구할 수 있게 구성함.

- 안내된 절차를 제시하여, 비계를 통해서 학습자들이 포기하지 않고, 꾸준히 참여할 수 있도록 독려함.
- 배움목표 진술, 자기평가를 통해서 목표를 수립하고, 성찰을 통하여 학습자들의 정의적 성취를 향상시키며, 참여를 할 수 있게 함.
- 정서지원 목표와 학습 관찰 활동을 결합하여, 학생이 자신의 학습 수준과 감정을 함께 돌아보며 학습과 성장에 참여하도록 설계함.
- 게이미피케이션 요소를 통해서 체험, 탐구를 통해서 학습자가 자발적으로 참여하여
- 말하기·쓰기·나눔을 중심으로 한 정서지원 활동과 프로젝트형 ‘함께 하는 수학’, 모둠·또래 활동을 통해, 인지적 참여와 정서적 참여를 동시에 촉진함.

마 프로그램 활용 방법 및 대상

• 프로그램 활용 방법

- 정규 수업 후에도 기초 개념이 충분히 자리 잡지 않은 학생에게 프로그램북의 문항·안내된 절차·예시를 변형하여 소집단 보충지도에 활용함. 또래 튜터링·협력학습을 활용해 학생끼리 설명·질문할 기회를 제공하고, 교사는 개별 피드백으로 학습·정서 지원을 병행함.
- 프로그램은 학교 기초학력 보장 체계 안에서 정규 수업과 보충지도를 아우르는 모듈형 자료로 활용할 수 있음.
- 학교별·지역별 여건, 학생 수준에 따라 차시를 묶어 짧은 course로 운영하거나, 14차시 전체를 활용하는 등 탄력적으로 재구성할 수 있음.
- 학급의 수준과 학교 여건에 따라, 일부 차시는 전체 학생 대상 정규 수업에서, 일부 차시는 공강 시간·방과후 보충 프로그램에서 운영가능함.

• 프로그램 적용 대상

- 프로그램의 적용 대상은 선택과목을 수강하는 학생 전체와, 그 중 기초학력이 특히 취약한 학생으로 나누어 안내함.
- 기본안(기초학력 보장 중심 운영):
학교의 기초학력 진단검사, 맞춤형 학업성취도 평가, 교사 관찰과 면담 결과 등을 활용하여 선택과목에서 기초학력 보장이 필요한 학생을 중심 대상으로 설정함.
이 학생들을 대상으로 정규 수업 중·후, 공강, 방과후, 보충지도 시간에 프로그램 차시를 집중적으로 운영함.
교수·학습 과정에서 거꾸로 수업, 협력학습과 같은 다양한 교수·학습 방법 활용 가능함.
- 확장안(전체 학생 보충·탐구형 운영):
해당 선택과목을 수강하는 전체 학생을 대상으로, 교과서의 보충자료로 개발된 프로그램 차시를 활용함.

• (예시안- 확률과 통계 과목)

- 중복순열 자료는 기초학력 보장이 필요한 학생을 중심으로 공강 시간, 방과후 교과보충 프로그램 등에서 활용 가능함.
- 중복조합 관련 자료는 정규 수업 시간에 교과서를 보충하는 자료로 전체 학생 대상으로 활용 가능함.

• 정서지원 프로그램

- 수학에 대한 불안·회피·체념이 두드러지는 학생은 정서지원 프로그램을 중심으로 추가 지원하고, 필요 시 학교 내 다른 학습지원·상담 체계와 연계함.

바 프로그램 활용을 위한 교원의 역할

- 교원의 역할은 학교의 기초학력 보장 계획 안에서 진단-수업-보충지도-정서지원-평가-피드백 전 과정을 설계·조정하는 데 있음.
- 사전 진단 및 계획 단계에서는 기초학력 보장 지원이 필요한 학생을 파악하고 연간·학기별 운영 계획을 수립함.
 - 학기 초 진단평가·전년도 성적·교사 관찰 등을 활용하여 기초학력 보장 지원이 필요한 학생을 확인함.
 - 학급별로 성취기준 학습 10차시, 함께 하는 수학 1차시, 정서지원 프로그램 3차시를 언제·어떤 순서로 배치할지 연간·학기별 운영 계획을 세움.
 - 학교 여건에 따라 정서지원 3차시는 학기 초·중·말 또는 필요 시기에 분산하여 운영함.
- 정규 수업 내 성취기준 학습 단계에서는 단계적 비계와 협력 활동을 통해 기초학력 보장을 도모함.
 - 가이드북의 [지도의 주안점]과 프로그램 전체 흐름도를 참고하여, 정규 수업, 공강 시간, 방과후·방학 중 보충지도를 어떻게 배치할지 학교의 기초학력 운영 계획과 연결하여 설계함.
- 말하기-쓰기-나눔 활동에서 학생이 자신의 경험과 생각을 안전하게 표현할 수 있도록 정서적 안전망을 마련함.
 - 성취기준 습득 정도와 정서·동기 변화를 바탕으로, 필요 시 개별·소집단 보충지도를 계획하고, 두드림학교, 학습종합클리닉센터 등 학교 안팎의 지원체계와 연계함.
- 본 프로그램은 수학 학습에 어려움을 겪는 학생(느린학습자 포함)을 고려하여 단계적 안내와 보조 자료를 제공하며, 학교·교사·학생의 상황에 따라 최소 성취수준 보장지도에도 활용 가능함.

4

영역별 프로그램

대 수

지수함수와 로그함수

1

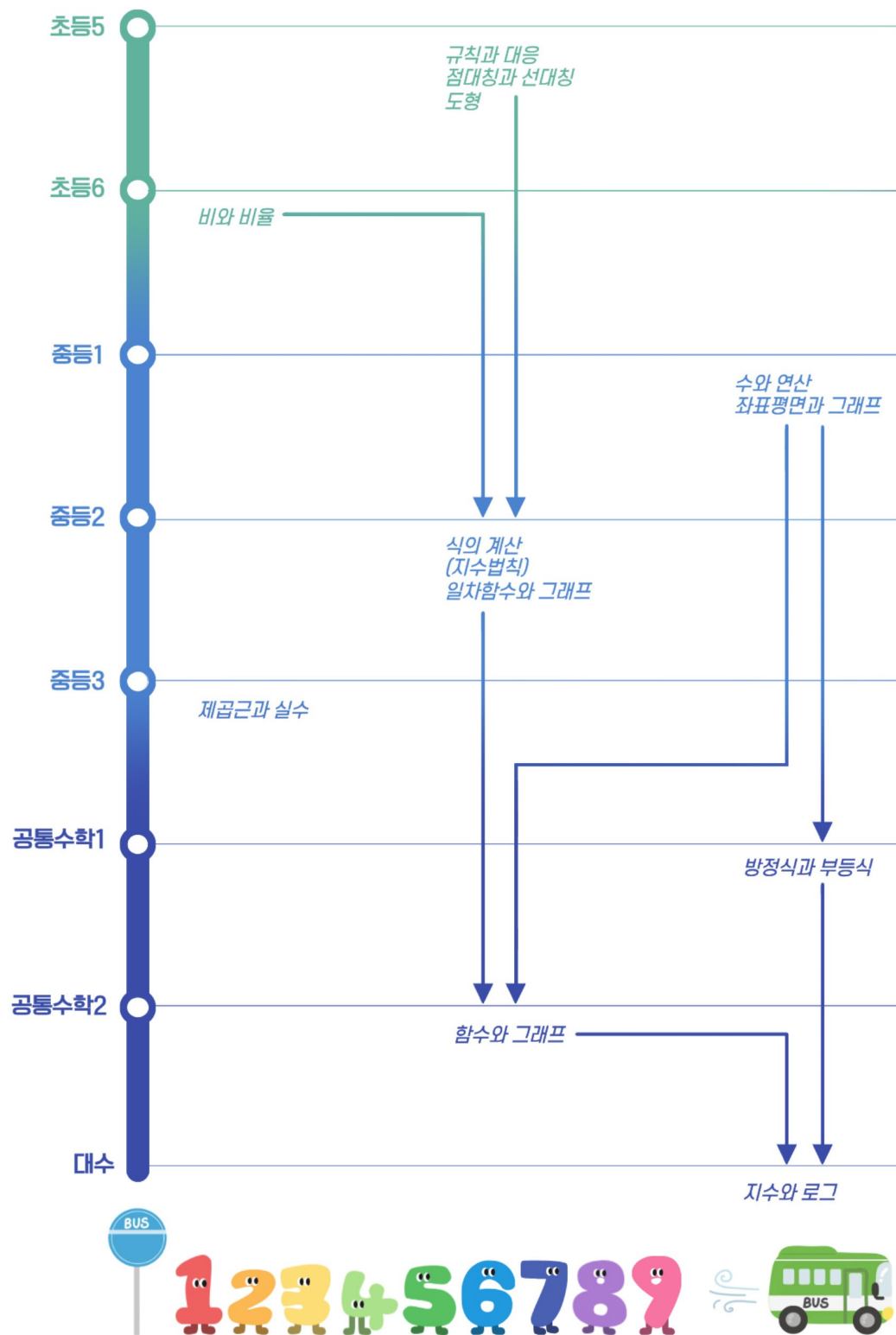
[12대수01] '지수함수와 로그함수' 영역의 최소 성취수준 진술문

영역	영역별 성취수준(E)		성취기준별 성취수준(E)	최소 능력의 수행 특성
[12대수01] 지수 함수와 로그 함수	지식 · 이해	지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음과 지수법칙, 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다.	01. 안내된 절차에 따라 거듭제곱과 거듭제곱근을 계산할 수 있다. 02. 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 안다. 03. 지수법칙을 안다. 04. 안내된 절차에 따라 로그에 관한 간단한 계산을 할 수 있다. 05. 안내된 절차에 따라 상용로그에 관한 간단한 문제를 해결할 수 있다. 06. 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. 07. 안내된 절차에 따라 간단한 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있다. 08. 안내된 절차에 따라 지수함수 또는 로그함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.	㉡ 안내된 절차에 따라 거듭제곱근 중 실수인 것을 구할 수 있다.
	과정 · 기능	안내된 절차에 따라 거듭제곱과 거듭제곱근을 계산하고 로그에 관한 간단한 계산을 할 수 있으며 상용로그에 관한 간단한 문제를 해결할 수 있다. 안내된 절차에 따라 간단한 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고 지수함수 또는 로그함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.		㉢ 지수가 유리수까지 확장될 수 있음을 안다. ㉣ 지수법칙을 부분적으로 안다. ㉤ 안내된 절차에 따라 간단한 로그의 값을 구할 수 있다.
	가치 · 태도	간단한 예를 통해 지수함수와 로그함수에 관심을 가진다.		㉥ 안내된 절차에 따라 간단한 상용로그의 값을 구할 수 있다. ㉦ 지수함수 또는 로그함수의 뜻을 안다. ㉧ 안내된 절차에 따라 지수함수 $y = a^x$ 또는 로그함수 $y = \log_a x$ 의 그래프를 그릴 수 있다. ㉨ 안내된 절차에 따라 지수함수 또는 로그함수를 활용하여 간단한 방정식의 해를 구할 수 있다. ㉩ 간단한 예를 통해 지수함수와 로그함수에 관심을 가진다.

1) 해설 및 차시 개요

- 성취기준별 성취수준(E)에 제시된 01, 08의 내용 중 학습 부담을 고려하여 거듭제곱근 중 허근을 구하는 경우, 지수함수 또는 로그함수를 활용한 부등식의 해를 구하는 경우는 제외하였다.
- 성취기준별 성취수준(E)에 제시된 02, 04, 05, 07의 내용 중 학습 부담을 고려하여 지수가 유리수까지 확장되는 경우로, 간단한 로그의 계산은 $\log_a a^n$ 의 경우로, 상용로그의 계산은 $\log 10^k$ 의 경우로, 지수함수와 로그함수는 $y = a^x$, $y = \log_a x$ 를 다루는 것으로 제한하였다.
- 성취기준별 성취수준(E)에 제시된 01, 04, 05, 07, 08의 내용 중 학습 부담을 고려하여 안내된 절차를 추가하였으며 구체적인 적용 예는 최소 성취수준 보장지도 자료에 제시하였다.
- 간단한 예를 통해 지수함수와 로그함수에 관심을 가진다는 내용을 추가하여 학생의 정의적 특성을 고려하고자 하였다.

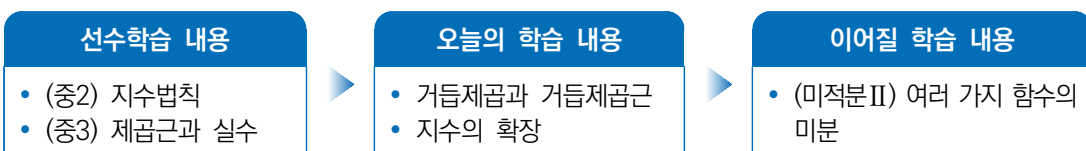
차시	차시 개요
01. 거듭제곱과 지수법칙	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉠과 ㉡, ㉢의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 길이, 단위, 데이터양의 단위를 소재로 탐구 활동을 하며 거듭제곱을 이해하고 거듭제곱근을 구할 수 있도록 구성하였다. 그리고 지수가 실수까지 확장될 수 있음을 이해하고, 안내된 절차에 따라 지수가 실수인 범위에서 지수의 값을 구하며 지수법칙이 부분적으로 성립함을 알 수 있도록 하였다.
02. 로그와 상용로그	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉣와 ㉤의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 개념을 이해하며 안내된 절차에 따라 간단한 로그와 상용로그의 값을 구할 수 있도록 구성하였다. 또 생활 속 소재를 중심으로 탐구 활동을 하며 로그의 유용성을 이해할 수 있도록 하였다.
03. 지수함수와 로그함수	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉥와 ㉦의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 생활 속 소재로 탐구 활동을 하며 지수함수를 이해할 수 있도록 구성하였다. 그리고 안내된 절차에 따라 지수함수와 로그함수의 그래프를 좌표평면 위에 직접 그려보며 함수의 성질을 탐구하고, 밑의 크기에 따라 그래프의 모양이 달라짐을 알며 지수함수와 로그함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대칭인 관계임을 알 수 있도록 하였다.



프로그램 개요

과목	대수	영역	지수함수와 로그함수
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이용하여 계산할 수 있다. [12대수01-02] 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12대수01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.		안내된 절차에 따라 거듭제곱과 거듭제곱근을 계산할 수 있다. 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 안다. 지수법칙을 안다.	
최소성취수준 진술문	- 안내된 절차에 따라 거듭제곱근 중 실수인 것을 구할 수 있다. - 지수가 유리수까지 확장될 수 있음을 안다. - 지수법칙을 부분적으로 안다.		
차시 주제	거듭제곱근과 지수법칙		
교과역량	문제해결 (O) 추론 () 의사소통 (O) 연결 (O) 정보처리 (O)		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	• 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 이해하고, 안내된 절차에 따라 간단한 문제를 해결 과정의 일부를 완성함으로써 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다. • 제곱했을 때 81이 되는 어떤 수를 찾고, 이를 통해 주어진 수의 제곱근을 구하는 활동은 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다. • 지수가 유리수 및 실수인 경우는 밑이 양수인 조건이 필요함을 이해하게 하고, 수를 표현하는 과정에서 지수를 이용할 때 편리함을 인식할 수 있게 지도한다.		
수업 전개			
도입	• 준비학습 : 거듭제곱과 거듭제곱근에 필요한 선수학습 요소를 확인한다. • 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표		
전개	• 생각열기 활동1 - 탐구 활동에서 안내된 절차에 따라 거듭제곱과 거듭제곱근을 이해하고 구할 수 있도록 지도한다. • 생각열기 활동2 - 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^n = a$의 실근이므로 함수 $y = x^n$의 그래프와 직선 $y = a$의 교점의 x좌표와 같음을 알게 지도한다. • 생각열기 활동3 - 탐구활동에서 길이, 질량, 데이터량 등을 수치로 나타낼 때, 지수를 이용하여 단위를 만들면 아주 큰 수나 아주 작은 수를 간단히 표현할 수 있음을 알게 한다.		
마무리	• 오늘의 개념 • 자기 평가 기록지 • 스스로 학습하기		

학습 연결 개념도



01

거듭제곱근과 지수법칙



개념 흐름도



준비 학습

01. 다음 □ 안에 알맞은 수를 적어보자.

(1) $2^2 \times 2^3 = 2^{\square}$

(2) $(5^2)^3 = 5^{\square}$

(3) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^{\square}}{5^{\square}}$

(4) $7^6 \div 7^4 = 7^{\square}$

02. 다음 수의 제곱근을 구해보자.

(1) 2

(1) $\pm \sqrt{2}$

(2) 4

(2) ± 2

(3) $(-5)^2$

(3) ± 5



학습 내용

학습목표

성취수준	안내된 절차에 따라 거듭제곱과 거듭제곱근을 계산할 수 있다. 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 안다. 지수법칙을 안다.
학습목표	안내된 절차에 따라 거듭제곱근 중 실수인 것을 구할 수 있다. 지수가 유리수까지 확장될 수 있음을 이해할 수 있다. 지수법칙을 부분적으로 이해할 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

📊 [생각열기 활동1]

어떤 자연수 a 를 계속 n 번 곱하면 a 의 n 제곱이라 하고, a^n 와 같이 표현한다.

탐구1

교사: "어떤 정수를 계속 곱했더니 81이 되었어요. 그 수는 무엇이었을까요?"

학생 답변: ± 3 , ± 9 입니다.

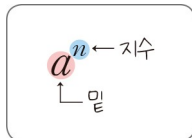
탐구2

교사: 같은 수를 계속 곱해서 81이 되는 원래 자연수를 찾고 싶다면 어떻게 해야 할까요?"

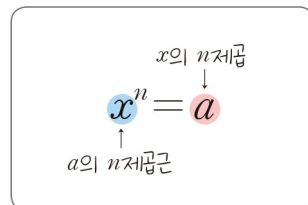
학생 답변: 81에 $\sqrt{\quad}$ 를 씌우고, 나온 값에 또 $\sqrt{\quad}$ 를 씌우는 활동을 계속하면서 가장 작은 자연수를 찾는다.

* 거듭제곱과 거듭제곱근이란 무엇일까?

- 교사** 자, 오늘은 거듭제곱과 거듭제곱근에 대해 이야기해 봅시다. 혹시 ‘거듭제곱’이 뭔지 알고 있나요?
- 학생** 음... 같은 수를 여러 번 곱하는 거죠? 예를 들어 $2 \times 2 \times 2$ 같은 거요.
- 교사** 맞아요. 수 a 를 n 번 곱한 것을 a^n 이라고 쓰고, 이것 a 의 n 제곱이라고 합니다. 여기서 a 는 ‘밑’, n 은 ‘지수’예요.
- 학생** 그러면 2^3 은 2를 세 번 곱한 8이네요.
- 교사** 네 맞습니다.
- 학생** 선생님~ 그러면 거듭제곱근은 거듭제곱이랑 반대 개념인가요?
- 교사** 네, 맞아요. 거듭제곱근은 어떤 수를 거듭제곱했을 때 주어진 수가 되는 값을 말해요. 예를 들어, 9의 제곱근은 무엇일까요?
- 학생** 3이요! $3^2 = 9$ 니까요.
- 교사** 맞습니다. 그런데 사실 -3 도 맞아요. 왜냐하면 $(-3)^2 = 9$ 이거든요. 그래서 제곱근은 양수와 음수 두 개가 있습니다.
- 학생** 아, 그래서 제곱근 9는 3이지만, 9의 제곱근이라고 하면 ± 3 이 되는군요.
- 교사** 그렇죠. 여기서 $\sqrt{a}$ 는 양의 제곱근을 나타내는 기호입니다. ‘루트’라고 부르죠.
- 학생** 그럼 세제곱근은요?
- 교사** 세제곱근은 어떤 수를 세 번 곱해서 주어진 수가 되는 값이에요. 예를 들어 $\sqrt[3]{8} = 2$, 왜냐하면 $2^3 = 8$ 이니까요. 세제곱근은 제곱근과 달리 음수도 실수 범위에서 유일하게 하나만 있습니다. 예를 들어 $\sqrt[3]{-8} = -2$ 죠.



5^2 은 ‘5의 제곱’
 5^3 은 ‘5의 세제곱’
 5^4 은 ‘5의 네제곱’
 $\vdots$
 5^n 은 ‘5의 n 제곱’이라고 읽는다.



지도의 주안점

탐구과정에서 $n = 2$ 일 때 ‘ a 의 2제곱근’이 아닌 ‘ a 의 제곱근’으로 사용함을 알게하고, 거듭제곱과 거듭제곱근의 표현을 혼동하여 사용하지 않도록 지도합니다.

문항1

다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구해보자.

- (1) 27의 세제곱근 3 (2) 81의 네제곱근 ± 3

📊 [생각열기 활동2]

실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^n = a$ 의 실근이므로 함수 $y = x^n$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

함수 $y = x^n$ 의 그래프를 이용하여 n 이 홀수인지, 짝수인지에 따라 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것을 구해보자.

1. n 이 홀수일 때

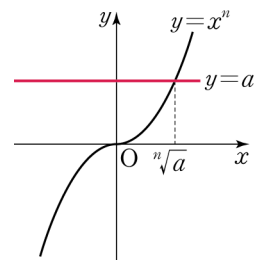
x 가 임의의 실수일 때, $(-x)^n = -x^n$ 이므로 함수 $y = x^n$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다. 이때 이 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점은 실수 a 의 값에 관계없이 항상 1개이다.

따라서 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 오직 하나뿐이고,

이것을 기호로

$$\sqrt[n]{a}$$

와 같이 나타낸다.



2. n 이 짝수일 때

x 가 임의의 실수일 때, $x^n \geq 0$ 이고 $(-x)^n = x^n$ 이므로 함수 $y = x^n$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. 이때 이 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수는 실수 a 의 값에 따라 다음과 같이 달라진다.

- (i) $a > 0$ 이면 교점은 2개이고, 그 두 교점의 x 좌표는 각각 양수와 음수이다.

따라서 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 양수인 것과 음수인 것이 1개씩 있으며,

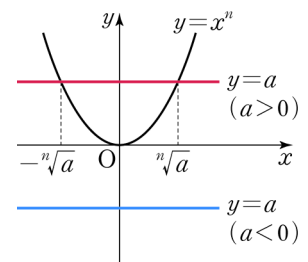
이것을 각각 기호로 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$

와 같이 나타낸다.

- (ii) $a = 0$ 이면 교점은 1개이고, 그 교점의 x 좌표는 0이다.

따라서 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 0 하나뿐이다. 즉, $\sqrt[n]{0} = 0$ 이다.

- (iii) $a < 0$ 이면 교점이 없으므로 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.



지도의 주안점

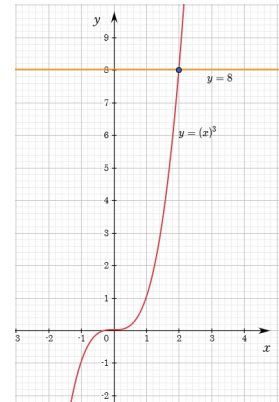
거듭제곱근을 구하려면 방정식을 세우고 이를 이용하여 구한 근이 거듭제곱근이 됨을 알게 하고, 또 $y = x^n$ 의 그래프를 직접 그려서 $y = a$ 와 만나는 점을 표시하고, 교점의 x 좌표가 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것임을 이해하도록 지도합니다.

탐구1 | n 이 2 이상의 정수일 때 빈칸을 채워 보자.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	(없다)

탐구2 |

8의 3제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^3 = 8$ 의 실근이므로
함수 $y = x^3$ 의 그래프와 직선 $y = 8$ 의
교점의 x좌표 와 같다.



문항2 |

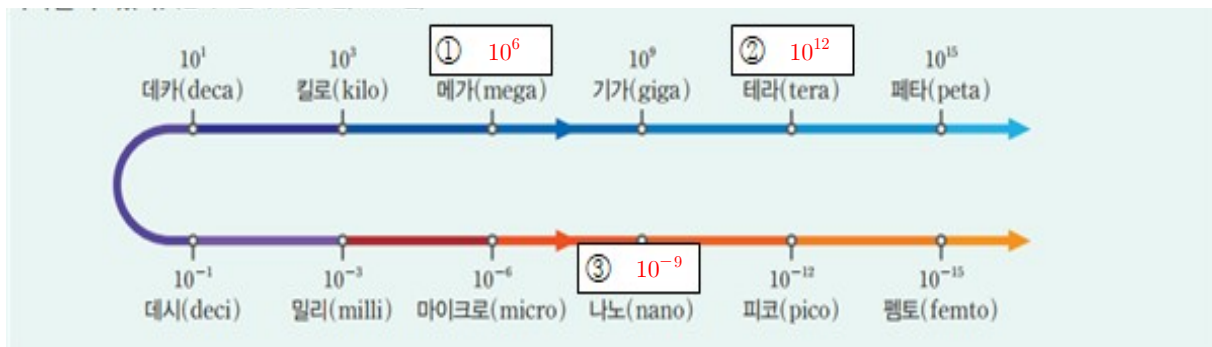
다음 값을 간단히 해보자.

- (1) $\sqrt[3]{-8}$ -2 (2) $\sqrt[4]{16}$ 2 (3) $\sqrt[4]{81}$ 3

📊 생각열기 활동3

탐구1 | 아래 안에 알맞은 수를 넣어 보자.

검색을 통해 길이, 질량, 데이터량 등을 수치로 나타낼 때, 지수를 이용하여 단위를 만들면 아주 큰 수나 아주 작은 수를 간단히 표현할 수 있다. 어떤 기준이 되는 단위를 정하고 그것에 접두어를 붙이면 더 큰 단위나 더 작은 단위로 간단히 나타낼 수 있다.(한국표준과학연구원, 2020년)



출처: YBM <대수> p. 19

지금까지 지수법칙은 지수가 자연수인 경우만 다루었으나 이제 지수가 0 또는 음의 정수일 때도 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 정수까지 확장해 보자.

지수가 양의 정수일 때 성립하는 지수법칙이 지수가 0 또는 음의 정수인 경우에도 성립하도록 지수의 범위를 확장하여 보자.

지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$ ($a \neq 0$)이 $m=0$ 일 때에도 성립한다고 하면 양의 정수 n 에 대하여

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$$

이므로 $a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$ 이어야 한다. 따라서 $a \neq 0$ 일 때,

$$a^0 = 1$$

로 정의한다. 또, 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$ ($a \neq 0$)이 $m=-n$ 인 경우에도 성립한다고 하면 양의 정수 n 에 대하여

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

이므로 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 이어야 한다. 따라서 $a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

로 정의한다.

그리고

I. m, n 이 모두 음의 정수일 때

$a \neq 0$ 이고 m, n 이 모두 음의 정수일 때, $m=-p, n=-q$ (p, q 는 양의 정수)로 놓으면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{-p} a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} \\ &= a^{-(p+q)} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n} \end{aligned}$$

II. m, n 중에서 하나가 음의 정수일 때

$a \neq 0$ 이고 m 이 양의 정수, n 이 음의 정수일 때, $n=-q$ (q 는 양의 정수)로 놓으면

$$a^m a^n = a^m a^{-q} = a^m \times \frac{1}{a^q} = a^m \div a^q = \begin{cases} a^{m-q} = a^{m+n} & (m > q) \\ 1 = a^0 = a^{m-q} = a^{m+n} & (m = q) \\ \frac{1}{a^{q-m}} = a^{m-q} = a^{m+n} & (m < q) \end{cases}$$

이다. 즉 m, n 중에서 어느 하나가 음의 정수일 때도 $a^m a^n = a^{m+n}$ 이 성립한다.

III. m, n 중에서 하나가 0일 때

$a \neq 0$ 이고 $m=0, n$ 이 정수일 때, $a^m = 1$ 이므로

$$a^m a^n = 1 \times a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n}$$

이다. 즉 m, n 중에서 어느 하나가 0일 때에도 $a^m a^n = a^{m+n}$ 이 성립한다.

따라서 $a \neq 0$ 이고 m, n 이 정수일 때

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

이 성립한다.

지도의 주안점

위 내용에서는 직관적으로 지수가 정수로 확장됨을 이해하게 합니다. 지수가 0 또는 음의 정수로 확장되면서 밑이 0을 제외한 실수라는 점을 주지시킵니다.

일반적으로 지수가 정수일 때, 다음 지수법칙이 성립한다.

0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때

$$1. a^0 = 1 \qquad 2. a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

지수가 정수일 때의 지수법칙

$a \neq 0, b \neq 0$ 이고 m, n 이 정수일 때

$$\begin{aligned} 1. a^m a^n &= a^{m+n} & 2. a^m \div a^n &= a^{m-n} \\ 3. (a^m)^n &= a^{mn} & 4. (ab)^n &= a^n b^n \end{aligned}$$

문항3 | 다음 값을 구해보자.

$$\begin{aligned} (1) 2^0 &= 1 & (2) (-3)^0 &= 1 \\ (3) 4^{-2} &= \frac{1}{16} & (4) (-3)^2 &= 9 \end{aligned}$$

지수가 유리수일 때로 지수의 범위를 확장해 보자.

$a > 0$ 이고 m, n 이 정수일 때, 지수법칙

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

이 성립한다.

지수가 유리수일 때에도 이 지수법칙이 성립한다고 하면 $m, n (n \geq 2)$ 이 정수일 때

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

이다.

그런데 $a > 0$ 이므로 $a^{\frac{m}{n}} > 0$ 이다.

즉, $a^{\frac{m}{n}}$ 은 a^m 의 양의 n 제곱근이므로

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

이 성립한다.

따라서 지수가 유리수일 때, 다음과 같이 정의한다.

유리수인 지수

$a > 0$ 이고, $m, n (n \geq 2)$ 이 정수일 때

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

특히, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

지도의 주안점

$a^0, a^{-n}, a^{\frac{m}{n}}$ 의 정의를 도출한 과정을 확인하고 특히 유리수인 지수를 정의할 때 밑이 양수인 조건을 작성하지 않은 경우 첨삭하여 지도하고, 이런 오류를 자주 하는 경우, 밑이 양수인 조건이 반드시 필요하며, 지수법칙 또한 그 조건이 그대로 이어짐을 다시 한 번 강조하여 지도합니다.

문항4

다음에서 근호를 사용하여 나타낸 것은 지수를 사용하여 나타내고, 지수를 사용하여 나타낸 것은 근호를 사용하여 나타내자.

(1) $\sqrt[3]{8}$ $8^{\frac{1}{3}}$

(2) $3^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{3}$

지수가 무리수일 때, 예를 들어 $2^{\sqrt{2}}$ 은 어떻게 정의할 수 있는지 알아보자.

$\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$ 이므로 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ...과 같이 $\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워지는 유리수를 지수로 갖는 수

$$2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, 2^{1.41421}, \dots$$

은 어떤 일정한 수에 한없이 가까워진다는 것이 알려져 있다.

이때 이 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$ 으로 정의한다.

이와 같은 방법으로 x 가 임의의 무리수일 때 2^x 을 정의할 수 있다.

같은 방법으로 $a > 0$ 이고, x 가 임의의 실수일 때 a^x 을 정의할 수 있다.

지수가 실수일 때에도 다음 지수법칙이 성립한다는 것이 알려져 있다.

지수가 실수일 때의 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고, x, y 가 실수일 때

1. $a^x a^y = a^{x+y}$

2. $a^x \div a^y = a^{x-y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$

4. $(ab)^x = a^x b^x$

지도의 주안점

지수가 유리수 및 실수인 경우는 밑이 양수인 조건이 필요함을 이해하게 합니다, 지수가 실수인 경우의 지수법칙은 직관적으로 다룰 수 있도록 지도합니다. 또 아주 작거나 아주 큰수를 표현할 때 지수를 이용하면 편리함을 인식하게 합니다.

문항5

다음식을 간단히 해보자.

$$(1) 2^{\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}} \quad 2^{3\sqrt{3}}$$

$$(2) 2^{\sqrt{3}} \div 2 \quad 2^{\sqrt{3}-1}$$

$$(3) (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} \quad 9$$

$$(4) (2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 4^{\frac{1}{\sqrt{3}}})^{\sqrt{3}} \quad 2^{\frac{7}{2}}$$

정리 학습

● 오늘의 개념

1. 일반적으로 2 이상의 자연수 n 에 대하여 n 제곱하여 실수 a 가 되는 수, 즉

$$x^n = a$$

를 만족시키는 수 x 를 a 의 n 제곱근 이라고 한다.

이때 a 의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, ...을 통틀어 a 의 거듭제곱근 이라고 한다.

2. $a > 0$, $b > 0$ 이고, x , y 가 실수일 때 빈칸에 알맞은 식을 적어보자.

$$(1) a^x a^y = \boxed{a^{x+y}}$$

$$(2) a^x \div a^y = \boxed{a^{x-y}}$$

$$(3) (a^x)^y = \boxed{a^{xy}}$$

$$(4) (ab)^x = \boxed{a^x b^x}$$

자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	☹️
학습 내용	거듭제곱과 거듭제곱근을 구할 수 있다.			
	지수법칙의 성질을 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.			
학습 태도	거듭제곱과 거듭제곱근을 이해하고 지수법칙을 학습할 때, 실수나 어려움이 있어도 도전하며 끈기있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

1. 다음 네 학생 중 잘못 말한 학생을 모두 찾고, 그 까닭을 말해 보자.



출처: 천재교육 <대수> p. 15

은서: -8 의 세제곱근은 $-2, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$ 이므로 틀린 말이다.

건우: 16 의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $2, -2$ 이므로 틀린 말이다.

서윤: -25 의 세제곱근 중에서 실수인 것은 $-\sqrt[3]{25}$ 이므로 틀린 말이다.

준혁: $x^4 = 9 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$ 실수해는 2개이다. 따라서 맞는 말이다.

2. 다음식을 간단히 해보자.

$$(1) \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times (-3)^{-4} \quad 3^{-4} = \frac{1}{81}$$

$$(2) 5^2 \div 5^{-3} \times 5^{-1} \quad 5^4$$

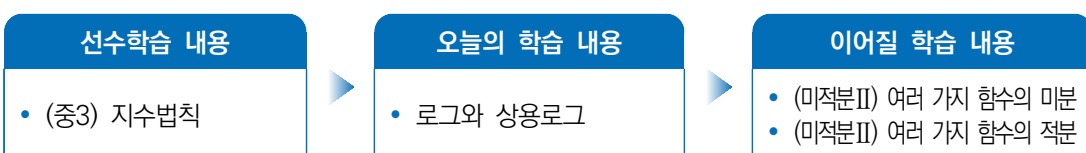
$$(3) \left(\frac{a^{-5}}{b^3}\right)^{-2} \quad a^{10}b^6$$

$$(4) (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} \quad 9$$

프로그램 개요

과목	대수	영역	지수함수와 로그함수
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이용하여 계산할 수 있다.		안내된 절차에 따라 로그에 관한 간단한 계산을 할 수 있다.	
[12대수01-05] 상용로그를 이해하고, 이를 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.		안내된 절차에 따라 상용로그에 관한 간단한 문제를 해결할 수 있다.	
최소성취수준 진술문	- 안내된 절차에 따라 간단한 로그의 값을 구할 수 있다. - 안내된 절차에 따라 간단한 상용로그의 값을 구할 수 있다.		
차시 주제	로그와 상용로그		
교과역량	문제해결 (O) 추론 () 의사소통 (O) 연결 (O) 정보처리 (O)		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	• $a^x = N$ 꼴의 문제를 해결하며 로그 개념의 필요성을 발견하고, 이를 통해 로그의 정의와 기호를 이해하도록 하여 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다. • 소리의 세기를 dB(데시벨)로 나타내어 로그가 지수적 크기를 간단히 표현하는 도구임을 탐구하고 실생활과 수학 개념의 연관성을 이해하도록 한다. 나아가 밑이 10인 로그를 상용로그로 정의하고 10의 거듭제곱 꼴 수를 간단히 표현하며 로그의 성질을 적용한 실제 문제해결에 활용하는 과정을 통해 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다. • 주어진 로그의 값을 직접 구하고 상용로그의 계산을 수행함으로써 로그 계산의 원리와 기본 성질을 익히고, 이를 통해 로그의 의미와 활용 방법을 이해하도록 한다.		
수업 전개			
도입	• 준비학습 : 로그와 상용로그에 필요한 선수 학습 요소를 확인한다. • 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표		
전개	• 생각열기 활동1 - 로그의 정의를 이해하고, 지수식과 로그식이 서로 변환될 수 있음을 알 수 있도록 지도한다. • 생각열기 활동2 - 주어진 로그의 값을 구하는 활동을 통해 로그 계산의 원리와 기본 성질을 이해하고, 상용로그를 이용하여 거듭제곱 꼴 수를 간단히 표현하는 방법을 탐구할 수 있도록 지도한다. - 소리의 크기를 나타내는 데시벨(dB) 개념을 활용하여 로그가 실생활에서 지수적 크기를 간단히 표현하는 도구임을 알고 실제 문제 상황에 적용할 수 있도록 지도한다. • [문항]은 모두 최소 능력의 수행 특성을 묻는 평가 문항으로 활용할 수 있으며, 지수식의 등식을 로그의 정의에 따라 변환하거나 $a^x = N$ 꼴의 등식을 로그로 나타내는 과정을 통해 로그의 기본 개념과 지수와 로그의 상호 관계를 이해하도록 한다.		
마무리	• 오늘의 개념 • 자기 평가 기록지 • 스스로 학습하기		

학습 연결 개념도

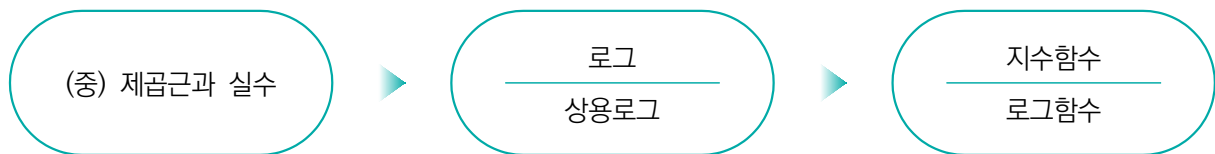


02

로그와 상용로그



개념 흐름도



준비 학습

01. 다음 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) $2^{\boxed{3}} = 8$

(2) $3^{\boxed{0}} = 1$

(3) $5^{\boxed{-1}} = \frac{1}{5}$

02. $a > 0$ 이고 m, n 이 실수일 때, 다음 을 채워 보자.

(1) $a^m \times a^n = a^{\boxed{m+n}}$

(2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{\boxed{m-n}}$



학습 내용

학습목표

성취수준	안내된 절차에 따라 로그에 관한 간단한 계산을 할 수 있다. 안내된 절차에 따라 상용로그에 관한 간단한 문제를 해결할 수 있다.
학습목표	안내된 절차에 따라 간단한 로그의 값과 상용로그의 값을 구할 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

📅 [생각열기 활동1]

| 탐구1 |

원우: $2^x = 2$ 를 만족시키는 x 의 값은 1이야.

태연: $2^x = 4$ 를 만족시키는 x 의 값은 2야.

지연: $2^x = 8$ 을 만족시키는 x 의 값은 3이지.

성우: 그러면 $2^x = 5$ 를 만족시키는 x 의 값은 대략 어느 정도일까?

추측하여 말해 보자.

x 의 값은 2보다 크고 3보다 작아야 한다.

위에서 $2^x = 2$, $2^x = 4$, $2^x = 8$, ...을 만족시키는 x 의 값은 각각 1, 2, 3, ...으로 하나씩만 존재함을 알 수 있다. 하지만 $2^x = 5$ 를 만족시키는 x 의 값은 쉽게 알 수 없다.

탐구2

이제 $a^x = N$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 알아보자.

$a > 0$, $a \neq 1$ 이고, N 이 양수일 때

$$a^x = N$$

을 만족시키는 실수 x 는 오직 하나 존재한다.

이 실수 x 를 a 를 밑으로 하는 N 의 **로그**라고 하며, 이것을 기호로

$$\log_a N$$

과 같이 나타낸다. 이때 N 을 $\log_a N$ 의 **진수**라고 한다.



로그의 정의

$a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$ 일 때

$$a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$$

지도의 주안점

로그 단원 지도에서는 정수 지수로 표현할 수 없는 경우를 통해 새로운 개념의 필요성을 느끼게 하고, 탐구 과정을 통해 로그의 정의와 기호를 자연스럽게 도입하도록 합니다. 또한 지수와 로그의 역관계 및 상호 변환을 강조하여 개념을 명확히 이해하도록 지도합니다.

문항1

위 로그의 정의를 참고하여 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내자.

(1) $2^3 = 8$ $3 = \log_2 8$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ $2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

문항2

다음 등식을 $a^x = N$ 의 꼴로 나타내자.

(1) $\log_5 125 = 3$ $5^3 = 125$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

문항3

다음 값을 구해보자.

(1) $\log_2 32$ 5

(2) $\log_2 \frac{1}{64}$ -6

[생각열기 활동2]

소리의 크기는 dB(데시벨)을 이용하여 나타낸다. 사람이 들을 수 있는 가장 낮은 소리의 세기인 $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ 를 기준으로 소리의 세기가 $I \text{ W/m}^2$ 일 때, 소리의 크기 $D \text{ dB}$ 은

$$D = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

라고 한다. (단, W/m^2 는 와트 퍼 제곱미터라고 읽는다.)

탐구1

다음 표는 소리의 세기와 그에 대응하는 소리의 크기를 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 값을 써넣어 보자.

$I(\text{W/m}^2)$	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}
$D(\text{dB})$	0	① 10	20	② 30	40

탐구2

나뭇잎 부딪히는 소리의 크기가 20dB, 자동차의 경적 소리의 크기가 110dB일 때, 자동차의 경적 소리의 세기는 나뭇잎 부딪히는 소리의 세기보다 몇 배 큰지 말해 보자.

나뭇잎 부딪히는 소리의 세기를 I_A , 자동차의 경적 소리의 세기를 I_B 라고 하면

$I_A = 10^{-10}$, $I_B = 10^{-1}$ 이다. 이때 $\frac{I_B}{I_A} = \frac{10^{-1}}{10^{-10}} = 10^9$ 이므로 자동차의 경적소리의세기는 나뭇잎 부딪히는 소리의 세기보다 10^9 배 더 크다.



출처: 국가소음정보시스템, “정보마당/소음이란?/소음의 영향”, <https://www.noiseinfo.or.kr/inform/noise.do>

지도의 주안점

소리의 크기를 나타내는 데시벨 개념을 통해 로그가 실생활 현상을 설명하는 유용한 도구임을 인식하도록 하고, 탐구활동을 통해 소리의 세기와 로그의 관계를 이해하게 합니다. 또한 상용로그의 정의와 성질을 활용하여 실생활 문제해결에 연결하도록 지도합니다.

탐구3

$\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$, $\log_{10} 4$ 와 같이 밑이 10인 로그를 상용로그라고 하며, 양수 N 의 상용로그 $\log_{10} N$ 은 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

10의 거듭제곱 꼴로 나타낸 수의 상용로그의 값은 로그의 성질을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

문항4

다음 값을 구해보자.

(1) $\log 100$ 2

(2) $\log \frac{1}{100}$ -2

(3) $\log \sqrt{100}$ 1

정리 학습

오늘의 개념

1. 10을 밑으로 하는 로그를 상용 로그라 하고,
양수 N 에 대하여 $\log_{10} N$ 은 밑 10을 생략하여 기호로 $\log N$ 과 같이 나타낸다.

자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	😞
학습 내용	로그와 상용로그의 값을 구할 수 있다.			
학습 태도	로그와 상용로그를 학습할 때, 실수나 어려움이 있어도 도전하며 끈기있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

1. 다음 등식에서 $a^x = N$ 의 꼴로 나타낸 것은 로그를 사용하여 나타내고, 로그를 사용하여 나타낸 것은 $a^x = N$ 의 꼴로 나타내자.

(1) $3^4 = 81$ $4 = \log_3 81$

(2) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ $2^{-3} = \frac{1}{8}$

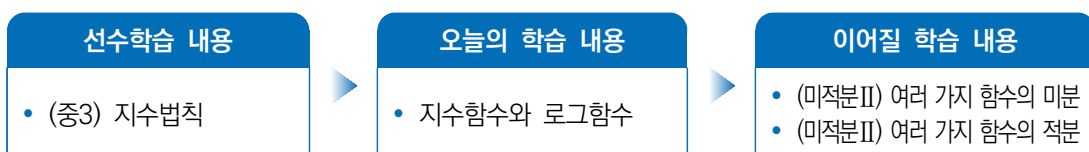
2. 다음 표는 양수 N 과 $\log N$ 의 값을 나타낸 것이다. 표를 완성해 보자.

N	100	10	1	$\frac{1}{10}$	(3) $\frac{1}{100}$
$\log N$	2	(1) 1	0	(2) -1	-2

프로그램 개요

과목	대수	영역	지수함수와 로그함수
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 알고, 이를 설명할 수 있다. [12대수01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 설명할 수 있다. [12대수01-08] 지수함수, 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.		지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. 안내된 절차에 따라 간단한 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있다. 안내된 절차에 따라 지수함수 또는 로그함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.	
최소성취수준 진술문	- 안내된 절차에 따라 지수함수 $y = a^x$ 또는 로그함수 $y = \log_a x$ 의 그래프를 그릴 수 있다. - 안내된 절차에 따라 지수함수 또는 로그함수를 활용하여 간단한 방정식의 해를 구할 수 있다. - 간단한 예를 통해 지수함수와 로그함수에 관심을 가진다.		
차시 주제	지수함수와 로그함수		
교과역량	문제해결 (O) 추론 (O) 의사소통 (O) 연결 () 정보처리 (O)		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	• 안내된 절차에 따라 주어진 지수식을 로그식으로 변환하는 활동을 통해 지수함수와 로그함수를 이해하며 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다. • 상용로그 개념을 도입하여 10의 거듭제곱 꼴 수를 간단히 표현하는 방법을 탐구하는 방법을 이해하고, 실생활 적용으로 소리의 크기를 나타내는 데시벨 개념을 통해 로그가 지수로 크기를 단순히 표현하는 유용한 도구임을 확인하게 하는 활동이다. • 지수함수와 로그함수의 그래프를 그리고 비교하면서 함수의 정의역·치역, 증가·감소, 점근선 등의 성질을 탐구하고, 지수함수와 로그함수의 의미를 시각적으로 이해하며 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다.		
수업 전개			
도입	• 준비학습 : 지수함수와 로그함수의 정의와 성질을 이해하며 학습 요소를 확인한다. • 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표		
전개	• 생각열기 활동1 - 지수함수의 유용성 인지 - 황새포도상구균의 증식 과정을 소재로 하여 지수함수의 필요성을 인식하고, 주어진 조건에서 지수함수의 식을 세워 그 의미를 이해하도록 한다. • 생각열기 활동2 - 지수함수의 성질 이해 - 지수함수의 표와 그래프를 작성하여 정의역과 치역을 확인하고, 그래프 점근선의 의미를 탐구함으로써 지수함수의 성질을 이해하도록 한다. • 생각열기 활동3 - 로그함수의 성질 이해 - 로그함수의 표와 그래프를 작성하고, 이를 지수함수의 그래프와 비교하고, 대칭시켜 로그함수의 성질을 파악하며 두 함수의 관계를 이해하도록 한다.		
마무리	• 오늘의 개념 • 자기 평가 기록지 • 스스로 학습하기		

학습 연결 개념도



03

지수함수와 로그함수



개념 흐름도

지수
로그



지수함수
로그함수



준비 학습

01. $a > 0$, $b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때, 다음을 완성해보자.

① $a^x a^y = a^{\boxed{x+y}}$

② $a^x \div a^y = a^{\boxed{x-y}}$

③ $(a^x)^y = a^{\boxed{xy}}$

④ $(ab)^x = a^{\boxed{x}} b^{\boxed{y}}$

02. 다음식의 빈칸을 알맞게 채워보자.

$a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$ 일 때, $a^x = N \Leftrightarrow x = \boxed{\log_a N}$

03. $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$ 일 때, 다음을 완성해보자.

① $\log_a 1 = \boxed{0}$, $\log_a a = \boxed{1}$

② $\log_a \boxed{MN} = \log_a M + \log_a N$

③ $\log_a \boxed{\frac{M}{N}} = \log_a M - \log_a N$

④ $\log_a \boxed{M^k} = k \log_a M$ (단, k 는 실수)



학습 내용

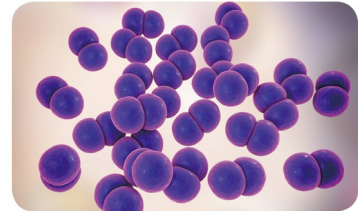
학습목표

성취수준	지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. 안내된 절차에 따라 간단한 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있다. 안내된 절차에 따라 지수함수 또는 로그함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
학습목표	지수함수 또는 로그함수의 뜻을 알 수 있다. 안내된 절차에 따라 간단한 지수함수 $y = a^x$ 또는 로그함수 $y = \log_a x$ 의 그래프를 그릴 수 있다. 안내된 절차에 따라 지수함수 또는 로그함수를 활용하여 간단한 방정식의 해를 구할 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

📅 [생각열기 활동1]

사람에게 식중독을 일으키는 대표적인 균인 황색포도상구균의 증식 속도는 온도 등 다양한 환경 요인에 의해 영향을 받는다. 한 실험실에서 특정한 환경 요인을 유지하면서 황색포도상구균을 배양하였더니 1시간 마다 균의 전체 질량이 두 배씩 증식되었다고 한다.



탐구1

다음 표는 황색포도상구균 1mg을 배양한 지 x 시간 후에 배양된 균의 전체 질량을 나타낸 것이다. 빈칸에 알맞은 값을 써넣어 보자.

x (시간)	1	2	3	4	5	...
질량(mg)	2	① 4	② 8	③ 16	④ 32	...

탐구2

황색포도상구균 1mg을 배양한 지 x 시간 후 배양된 균의 전체 질량을 y mg이라고 할 때, y 를 x 를 이용하여 나타내보자. $y = 2^x$



출처: 지학사 <대수> p. 38

위에서처럼 x 와 y 사이에 $y = 2^x$ 인 관계가 성립하고, x 의 값에 대하여 2^x 의 값이 하나로 정해질 때 $y = 2^x$ 은 x 에 대한 함수이다.

일반적으로 $a > 0$ 이고 $a \neq 1$ 이면 x 가 임의의 실수일 때, a^x 의 값은 하나로 정해지므로 $y = a^x$ 은 x 에 대한 함수이다. 이처럼 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$$

을 a 를 밑으로 하는 **지수함수**라 한다.

문항1

다음 중에서 지수함수인 것을 찾아보자. (2)

(1) $y = x^3$

x 에 대한 다항함수

(2) $y = 2^x$

2를 밑으로 하는 지수함수

(3) $y = x^{-1}$

유리함수

지도의 주안점

지수함수 $y = a^x$ 의 밑 a 는 1이 아닌 양수가 되어야 함을 이해하도록 지도하고, 지수함수의 성질은 그래프를 통하여 직관적으로 알게 합니다.

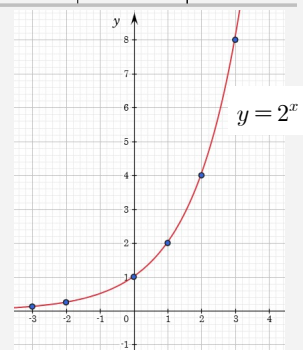
 [생각열기 활동2] 빈칸에 들어갈 내용을 보기에서 고르시오.

탐구3

지수함수 $y = 2^x$ 에서 실수 x 의 여러 가지 값에 대응하는 y 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

위의 표에서 얻은 순서쌍 (x, y) 를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내고, 점 들을 매끄럽게 연결하면 오른쪽 그림과 같은 지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프가 되고 이 그래프에서 다음을 알 수 있다.



① 지수함수 $y = 2^x$ 의 정의역은 **실수** 전체의 집합이고,

치역은 **양의 실수** 전체의 집합이다.

② 지수함수 $y = 2^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은

증가 한다.

③ 지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프는 점 **(0, 1)** 을 지나고, x 의 값이 한없이 작아지면 y 의

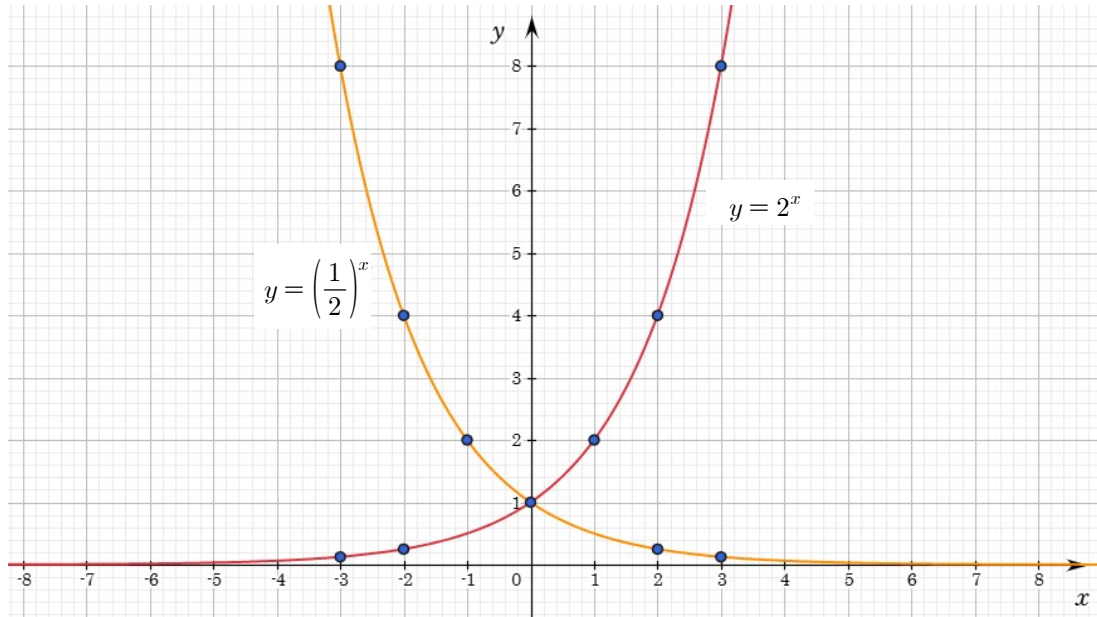
값은 0에 한없이 가까워지므로 **x 축** 을 점근선으로 갖는다.

보기

실수 x 축 증가 (0, 1) 양의 실수 전체 감소

문항2

[생각열기 활동2]의 자료를 참고하여 지수함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 그려보자.



지도의 주안점

$y = 2^x$ 의 그래프는 그래프가 지나는 몇 개의 점을 찾아 좌표평면 위에 나타낸 후 매끄러운 곡선으로 연결하고, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하여 그릴 수 있게 합니다.

지수함수 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

이제 지수함수 $y = a^x$ 의 역함수를 구하여 보자.

로그의 정의로부터

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

이므로 $x = \log_a y$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면 지수함수 $y = a^x$ 의 역함수

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

를 얻는다. 이 함수를 a 를 밑으로 하는 로그함수라 한다.

로그함수 $y = \log_a x$ 의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

문항3

다음 중에서 로그함수인 것을 찾아보자. (1), (2)

(1) $y = \log_2 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

(3) $y = \log_3 2^x$

(1) 2를 밑으로 하는 로그함수

(2) $\frac{1}{3}$ 을 밑으로 하는 로그함수

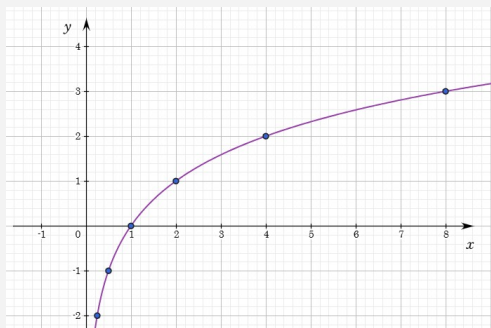
(3) 다항함수

다음은 로그함수의 그래프를 알아보는 과정이다.

탐구1

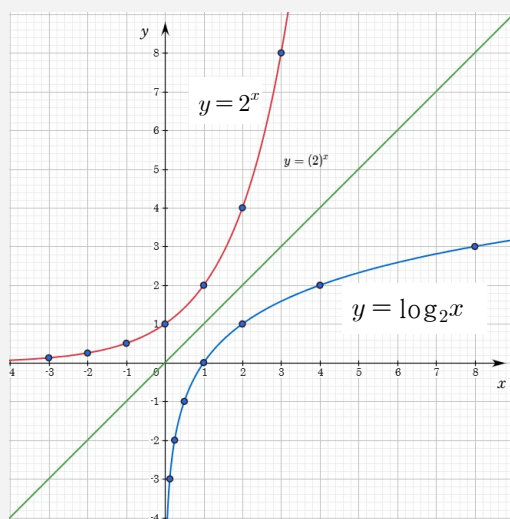
로그함수 $y = \log_2 x$ 에서 양의 실수 x 의 값에 대응하는 y 의 값을 구하여 다음 표를 완성해 보자. 또 x, y 의 값의 순서쌍 (x, y) 를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내고 연결해 보자.

x	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
y	...	-2	-1	0	1	2	3	...



탐구2

오른쪽 그림의 지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프를 그려보자.



탐구3

1, 2의 그래프를 비교해 보자.

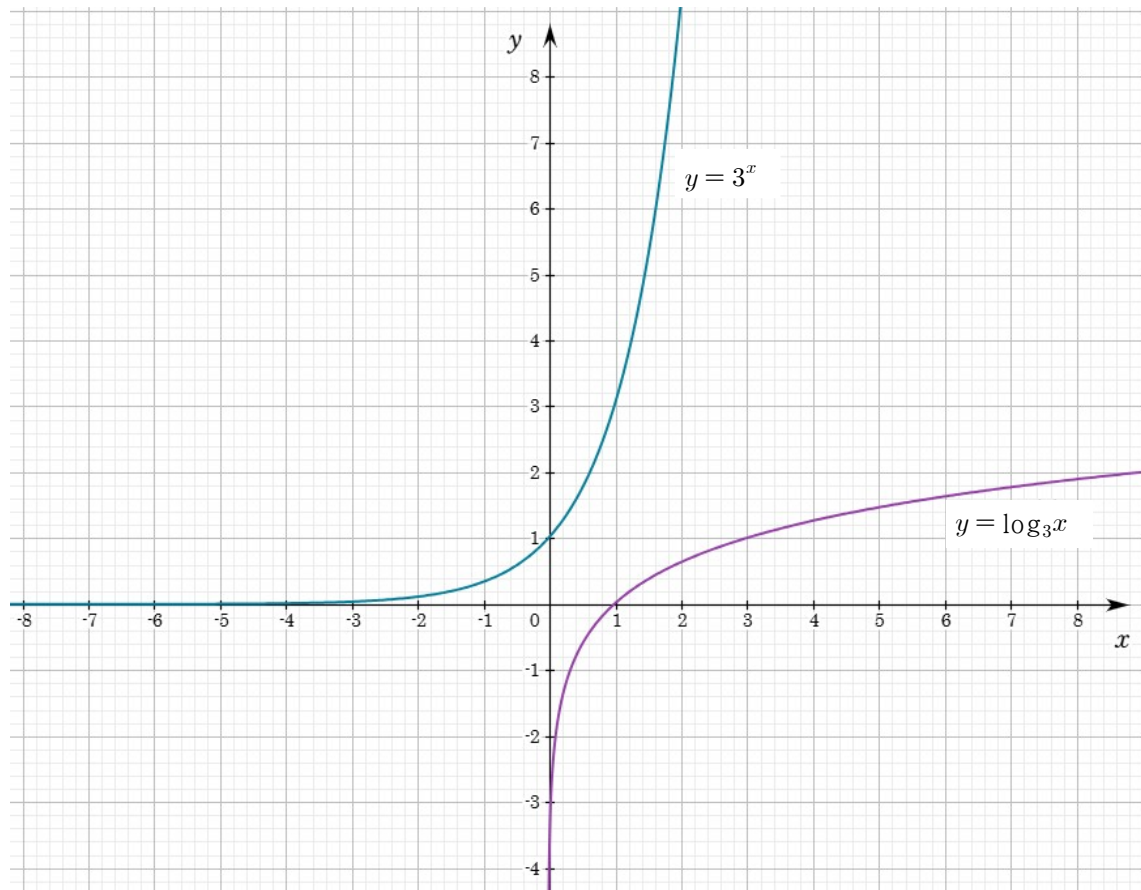
두 그래프는 역함수 관계로 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

지도의 주안점

로그함수는 지수함수의 역함수로 도입하며, 두 함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭임을 이용하여 로그함수의 그래프를 그릴 수 있게 하고, 로그함수의 성질은 그래프를 통하여 직관적으로 알 수 있게 합니다.

문항4

지수함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 이용하여 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 그려 보자.



문항5

처음 가격이 100만 원인 어느 스마트폰의 가격이 매년 10%씩 하락한다고 한다. n 년 후 이 스마트폰의 가격은 $100 \times (0.9)^n$ (만 원)이 된다. 이 스마트폰의 가격이 72.9만 원이 되는 시점을 n 년이라고 할 때, 로그를 이용하여 n 을 구해 보자.

$$100 \times (0.9)^n = 72.9$$

$$(0.9)^n = \frac{72.9}{100} = 0.729$$

$$n \log 0.9 = \log 0.729$$

$$n = \frac{\log 0.729}{\log 0.9} \text{ 계산하면 } n = 3, \text{ 따라서 이 스마트폰의 가격이 72.9만원이 되는 시점은 3년 후이다.}$$

정리 학습

● 오늘의 개념

로그의 정의로부터

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

이므로 $x = \log_a y$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면 지수함수 $y = a^x$ 의 **역함수**

$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 를 얻는다.

자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	😞
학습 내용	지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있다.			
학습 태도	지수함수와 로그함수를 탐구할 때, 실수나 어려움이 있어도 도전하며 끈기있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

- 지수함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 에 대하여 다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.
 - 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 **양의 실수 전체의 집합** (이)다.
 - $a > 1$ 일 때,
 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 **증가** 한다.
 $0 < a < 1$ 일 때,
 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 **감소** 한다.
 - 그래프는 점 **(0, 1)**을/를 지나고, **x** 축을 점근선으로 갖는다.
- 로그함수 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 에 대하여 다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.
 - 정의역은 **양의 실수 전체의 집합** (이)고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
 - $a > 1$ 일 때,
 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 **증가** 한다.
 $0 < a < 1$ 일 때,
 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 **감소** 한다.
 - 그래프는 점 **(1, 0)**을 지나고, **y** 축을 점근선으로 갖는다.

지도의 주안점

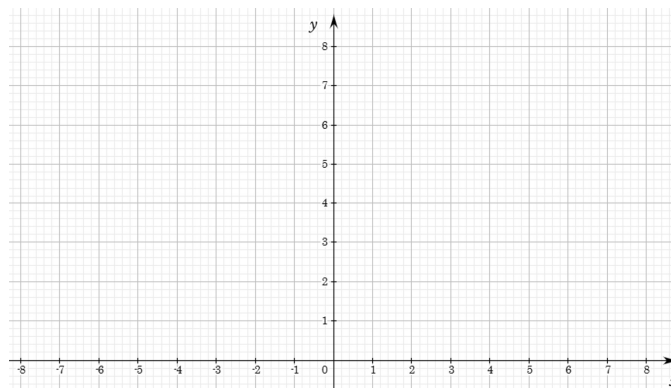
지수함수와 로그함수는 서로 역함수 관계에 있으므로 지수함수의 정의역이 로그함수의 치역이고, 지수함수의 치역이 로그함수의 정의역임을 직관적으로 발견할 수 있게 합니다.

기초학력 진단을 위한 도움자료

1. 밑이 2인 지수함수 $y = 2^x$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	(가)	(나)	1	2	4

- (1) (가), (나)에 들어갈 알맞은 값을 구하시오.
- (2) 지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프는 점점 증가하는 형태임을 알 수 있다. x 가 1커질 때 마다 y 값이 ()배가 됨을 표를 통해 확인해보자.
- (3) 지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 그려보시오



이 문항은 지수함수의 기본 개념과 그래프의 성질을 이해하고, 지수의 음수 확장 의미를 확인하기 위한 최소성취수준 확인 문항이다.

학생이 좌표평면 위에서 $y = 2^x$ 의 값을 직접 구하고 점으로 나타내면서 지수함수의 그래프의 개형을 시각적으로 파악하게 할 수 있다.

지도의 주안점

수직선 위에서 x 값이 커질수록 y 값이 일정한 비율로 커진다는 점을 관찰하게 합니다.

특히 음의 지수를 대입한 경우 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 과 같은 값이 나타남을 통해 ‘지수가 음수일 때 역수가 된다’는 개념을 자연스럽게 이해할 수 있도록 합니다.

표를 완성하면서 함수의 규칙성(비례적 증가)을 찾게 함으로써 지수함수의 정의를 직관적으로 이해할 수 있도록 합니다.

활용 방안

수업 중 학생들에게 계산기나 그래프 도구(알지오매스 등)를 활용하여 표를 완성하게 한 뒤, 그래프를 그리고 규칙을 말로 표현하게 합니다. 특히 최소성취수준 보장지도 대상 학생에게는 $x = 0, 1, 2$ 일 때의 계산부터 안내하고, 점진적으로 음의 지수까지 확장하도록 지도합니다.

학습 후, “지수가 1씩 커질 때마다 y 가 2배가 된다”는 문장을 학생이 스스로 말할 수 있도록 지도합니다.

1

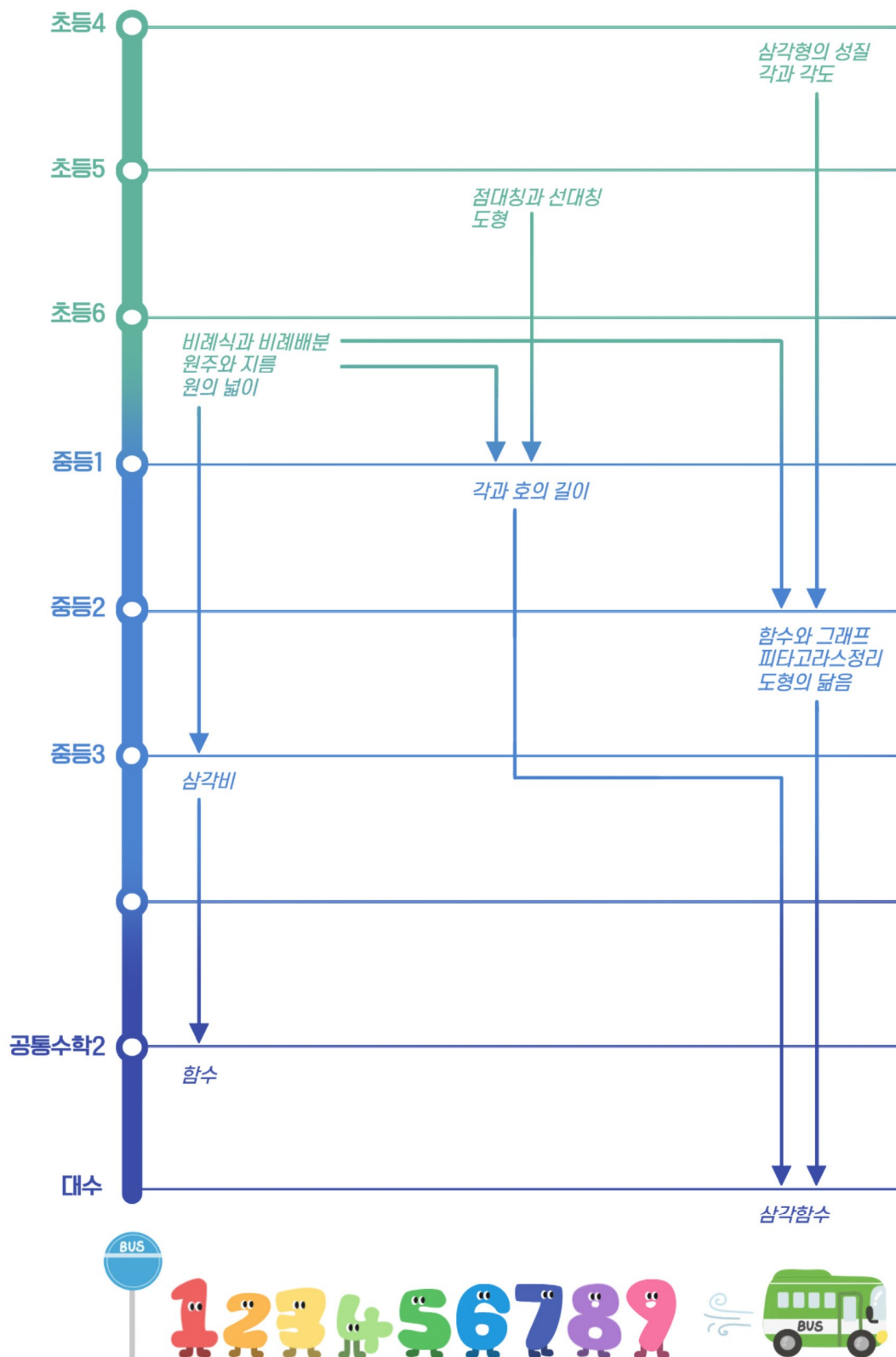
[12대수02] '삼각함수' 영역의 최소 성취수준 진술문

영역	영역별 성취수준(E)	성취기준별 성취수준(E)	최소 능력의 수행 특성
[12대수02] 삼각 함수	지식 · 이해	일반각 또는 호도법의 뜻을 안다.	㉗ 안내된 절차에 따라 주어진 각을 일반각 또는 호도법으로 나타낼 수 있다.
	과정 · 기능	01. 일반각 또는 호도법의 뜻을 안다. 02. 안내된 절차에 따라 간단한 사인함수, 코사인함수 또는 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있고 사인법칙 또는 코사인법칙에 관한 간단한 문제를 해결할 수 있다.	㉘ 안내된 절차에 따라 삼각함수 $y = \sin x$ 또는 $y = \cos x$ 또는 $y = \tan x$ 의 그래프의 일부를 그릴 수 있다.
	가치 · 태도	03. 안내된 절차에 따라 사인법칙 또는 코사인법칙에 관한 간단한 문제를 해결할 수 있다.	㉙ 안내된 절차에 따라 사인법칙 또는 코사인법칙에 관한 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성할 수 있다. ㉚ 간단한 예를 통해 삼각함수에 관심을 가진다.

1) 해설 및 차시 개요

- 성취기준별 성취수준(E)에 제시된 01의 내용 중 학습 부담을 고려하여 안내된 절차를 추가하였으며 구체적인 적용 예는 최소 성취수준 보장지도 자료에 제시하였다.
- 성취기준별 성취수준(E)에 제시된 02, 03의 내용 중 그래프의 경우 그래프의 일부로, 사인법칙 또는 코사인법칙에 관한 간단한 문제의 경우 간단한 문제해결 과정의 일부로 제한하였다.
- 간단한 예를 통해 삼각함수에 관심을 가진다는 내용을 추가하여 학생의 정의적 특성을 고려하고자 하였다.

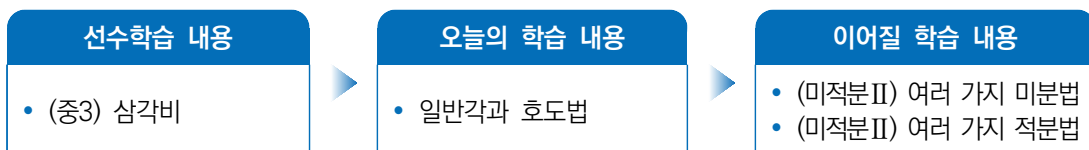
차시	차시 개요
04. 일반각과 호도법	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉗의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 탐구 활동을 통해 분침이 도는 방향과 회전의 개념을 탐구하면서 각의 크기를 음의 부호와 양의 부호로 구분하여 나타내는 방법을 이해하고, 주어진 각을 일반각 또는 호도법으로 나타낼 수 있도록 구성하였다.
05. 삼각함수의 그래프	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉘의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 안내된 절차에 따라 삼각함수 $y = \sin x$ 또는 $y = \cos x$ 또는 $y = \tan x$ 의 그래프의 일부를 그릴 수 있도록 구성하였다.
06. 사인법칙과 코사인법칙	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉙의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 삼각형에서 사인법칙이 성립함을 발견하고 안내된 절차에 따라 사인법칙 또는 코사인법칙에 관한 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성할 수 있도록 구성하였다.



프로그램 개요

과목	대수	영역	삼각함수
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 알고, 그 관계를 설명할 수 있다.		일반각 또는 호도법의 뜻을 안다	
최소성취수준 진술문	- 안내된 절차에 따라 주어진 각을 일반각 또는 호도법으로 나타낼 수 있다.		
차시 주제	일반각과 호도법		
교과역량	문제해결 (O) 추론 () 의사소통 (O) 연결 (O) 정보처리 (O)		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	• 시계 바늘의 회전을 수학적 개념으로 연결하여 시초선, 종점, 동경을 도입하고, 각의 크기와 방향을 이해하며 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다. • 분침이 여러 바퀴 회전하는 경우를 일반화하여 일반각의 개념을 소개하고, 이를 수식 $360^{\circ} \times n + \alpha$로 표현하는 방법을 통해 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다. • 중심각과 호의 길이를 비교하며 각의 크기를 호도법(라디안)으로 나타내는 방법을 탐구한다. • 문항 풀이 활동에서는 일반각을 주어진 각으로 나타내고, 각을 호도법과 육십분법으로 변환하며, 표를 완성하는 과정을 통해 최소성취수준을 달성하도록 하였다.		
수업 전개			
도입	• 준비학습 : 특수각의 삼각비 값을 알고, 일반각의 선수학습 요소를 확인한다. • 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표		
전개	• 생각열기 활동 - 각의 크기 이해 - 시계 보는 상황을 통해 분침이 도는 방향과 회전의 개념을 탐구하면서 각의 크기를 음의 부호와 양의 부호로 구분하여 나타내는 방법을 이해하고, 나아가 일반각과 호도법의 정의 및 단위 환산을 탐구하여 각의 크기를 다양한 방식으로 표현할 수 있도록 하기 위함. • [문항]은 최소 능력의 수행 특성을 묻는 평가 문항으로 활용할 수 있다. 학습자는 각의 크기를 일반각으로 표현하고, 이를 호도법 단위로 변환하며, 육십분법과 호도법을 연결한 표를 완성하는 과정을 통해 각의 크기를 다양한 방식으로 나타내는 방법을 이해하도록 한다.		
마무리	• 오늘의 개념 • 자기 평가 기록지 • 스스로 학습하기		

학습 연결 개념도



04

일반각과 호도법



개념 흐름도

삼각비



일반각과 호도법



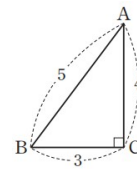
준비 학습

01. 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 다음 삼각비의 값을 구해 보자.

(1) $\sin B = \frac{4}{5}$

(2) $\cos B = \frac{3}{5}$

(3) $\tan B = \frac{4}{3}$



02. 다음 표를 완성해 보자.

삼각비 \ A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	



학습 내용

학습목표

성취수준	일반각 또는 호도법의 뜻을 안다.
학습목표	안내된 절차에 따라 주어진 각을 일반각 또는 호도법으로 나타낼 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

📅 생각열기 활동

원우가 동생들에게 시계보는 법을 알려주고 있다. 시계는 그림과 같이 7시를 가리키고 있다.



탐구1

원우가 동생들에게 7시 30분을 알려주려면 분침을 시계 바늘이 도는 방향으로 최소 몇 도만큼 돌려야 할지 생각해 보자.

분침을 시계바늘이 도는 방향으로 180° 만큼 돌리면 된다.

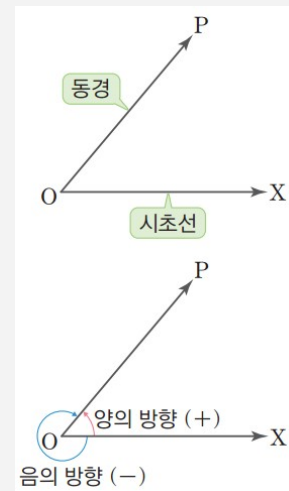
탐구2

원우가 동생들에게 4시를 가르쳐 주려면 분침을 시계 바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 최소 몇 도만큼 돌려야 할지 생각해 보자.

3바퀴 돌아야 하므로 1080° 이다

오른쪽 그림과 같이 평면 위의 두 반직선 OX 와 OP 에 의하여 $\angle XOP$ 가 정해진다. $\angle XOP$ 의 크기는 반직선 OP 가 고정된 반직선 OX 의 위치에서 시작하여 점 O 를 중심으로 회전한 양으로 정의한다. 이때, 반직선 OX 를 **시초선**, 반직선 OP 를 **동경**이라고 한다.

또, 동경 OP 가 시계바늘이 도는 방향과 반대로 회전할 때 양의 방향으로 회전한다고 하고, 시계바늘이 도는 방향으로 회전할 때 음의 방향으로 회전한다고 한다. 음의 방향으로 회전한 각의 크기는 음의 부호 $-$ 를 붙여서 나타낸다.



시초선 OX 와 동경 OP 가 나타내는 $\angle XOP$ 의 크기 중에서 하나를 α° 라 할 때, 동경 OP 가 나타내는 각의 크기는 다음과 같은 꼴로 나타낼 수 있다.

$360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n 은 정수)

이것을 동경 OP 가 나타내는 **일반각**이라 한다.

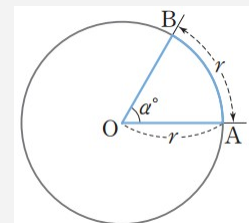
또 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 원 O 에서 길이가 r 인 호 AB 에 대한 중심각의 크기를 α° 라 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$r : 2\pi r = \alpha^\circ : 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$$

따라서 중심각의 크기 α° 는 원의 반지름의 길이 r 에 관계없이 일정하다.

이 일정한 각의 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라 한다.



육십분법과 호도법 사이의 관계

① 1라디안 = $\frac{180^\circ}{\pi}$

② $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 라디안

각의 크기를 호도법으로 나타낼 때, 보통 단위인 '라디안'은 생략한다.

지도의 주안점

동경이 나타내는 일반각의 표현에 익숙해지도록 지도하며 일반각의 필요성을 알게하고, 각의 크기를 정의할 때, 시초선, 동경, 회전 방향의 의미를 분명히 알게 합니다. 또 각의 크기는 회전 방향이 양이면 양의 부호 +를, 음이면 음의 부호 -를 붙여 나타내고, 일반적으로 양의 부호 +를 생략함을 알게 합니다. 그리고 호도법에서는 단위인 라디안을 생략하여 사용함을 강조하고, 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식에서 중심각(θ)는 라디안 값을 알게 합니다.

문항1

다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ 꼴로 나타내시오.

(단, n 은 정수, $0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$)

- (1) 45° (2) 420° (3) -110° (4) -450°
 (1) $360^\circ \times n + 45^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 60^\circ$ (3) $360^\circ \times n + 250^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 270^\circ$

문항2

다음 빈칸에 알맞은 것을 채워 보자.

- (1) $45^\circ = 45 \times 1^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180}(\text{라디안}) = \frac{\pi}{4}$
 (2) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times 1(\text{라디안}) = \frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$

문항3

다음 표를 완성해 보자.

육십분법	30°	45°	90°	120°	240°	330°	360°
호도법	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

● 오늘의 개념

반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기는 반지름의 길이와 관계없이 항상 일정하다. 이 일정한 각의 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 를 **1라디안** (이)라고 하며, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법** (이)라고 한다.

자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	😞
학습 내용	육십분법을 호도법으로, 호도법을 육십분법으로 나타낼 수 있다.			
학습 태도	육십분법과 호도법을 관계를 이해하고 학습할 때, 실수나 어려움이 있어도 끈기있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

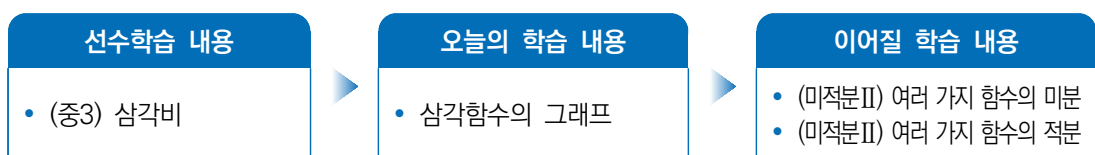
1. 다음에서 왼쪽과 오른쪽의 각의 크기가 같은 것끼리 연결해 보자.

- | | | | | |
|-----|-------------|---|---|------------------|
| (1) | 15° | • | • | $\frac{4}{3}\pi$ |
| (2) | 240° | • | • | $\frac{3}{4}\pi$ |
| (3) | 36° | • | • | $\frac{\pi}{12}$ |
| (4) | 135° | • | • | $\frac{\pi}{5}$ |
-

프로그램 개요

과목	대수	영역	삼각함수
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수02-02] 삼각함수의 개념을 이해하여 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그리고, 그 성질을 설명할 수 있다.		안내된 절차에 따라 간단한 사인함수, 코사인함수 또는 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.	
최소성취수준 진술문	- 안내된 절차에 따라 삼각함수 $y = \sin x$ 또는 $y = \cos x$ 또는 $y = \tan x$ 의 그래프의 일부를 그릴 수 있다.		
차시 주제	삼각함수의 그래프		
교과역량	문제해결 (O) 추론 (O) 의사소통 () 연결 () 정보처리 (O)		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	- 삼각비의 값을 적을 수 있는 표를 주고 완성한 표를 토대로 좌표평면에 점을 찍고, 이를 연결하여 삼각함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$의 그래프를 그리면서 하는 활동으로 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다. - 값이 같은 각도를 카드에서 찾는 보드게임을 통해 사인함수의 주기성과 대칭성을 자연스럽게 알아가면서 최소성취수준을 달성하도록 하였다.		
수업 전개			
도입	- 준비학습 : 특수각의 사인 및 코사인 값을 확인하고, 부족한 부분은 확인할 수 있게 한다. - 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표		
전개	생각열기 활동 - 각의 크기, 시곗바늘, 사인함수의 값 구하기를 통해 학생들이 친숙한 상황(시계, 게임, 카드 연결 등)을 활용하여 자연스럽게 각, 일반각, 사인 함수, 주기성 등을 도입 할 수 있도록 한다. - 일반각, 사인함수 값, 함수의 주기성, 그래프 그리기 순으로 개념을 확장하며 단계적 누적 학습이 가능하도록 한다. - 보드게임처럼 학생이 흥미를 느낄 수 있는 게임형 학습을 하며, 개념 이해와 연습 문제를 놀이처럼 경험할 수 있도록 한다.		
마무리	- 오늘의 개념 - 자기 평가 기록지 - 스스로 학습하기		

학습 연결 개념도

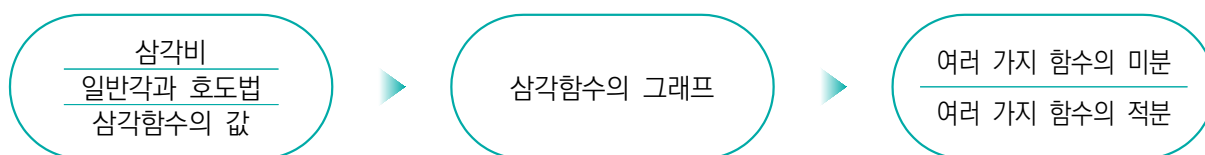


05

삼각함수의 그래프



개념 흐름도



준비 학습

01. 다음 삼각함수의 값을 구해보자.

- (1) $\sin \frac{\pi}{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (2) $\cos \frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (3) $\tan \frac{\pi}{6}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

02. 다음은 삼각함수의 값의 부호를 나타낸 표이다. 표를 완성해 보자.

삼각함수 \ 사분면	제1사분면 ($x > 0, y > 0$)	제2사분면 ($x < 0, y > 0$)	제3사분면 ($x < 0, y < 0$)	제4사분면 ($x > 0, y < 0$)
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-

지도의 주안점

좌표평면 위의 단위원과 동경의 교점의 좌표를 이용하여 삼각함수의 값의 부호를 결정하고, 동경이 위치한 사분면에 따라 삼각함수의 값의 부호를 구할 수 있음을 알게 합니다.



학습 내용

학습목표

성취수준	안내된 절차에 따라 간단한 사인함수, 코사인함수 또는 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
학습목표	안내된 절차에 따라 삼각함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 의 그래프의 일부를 그릴 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

[생각열기 활동1] 사인함수의 그래프를 그려보자.

탐구1 x 가 다음과 같을 때, $\sin x$ 의 값을 각각 적어 보자.

각(x)		값($\sin x$)
0	$\Rightarrow$	0
$\frac{\pi}{6}$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\Rightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\Rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\Rightarrow$	1
$\frac{2}{3}\pi$	$\Rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\Rightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{2}$
π	$\Rightarrow$	0

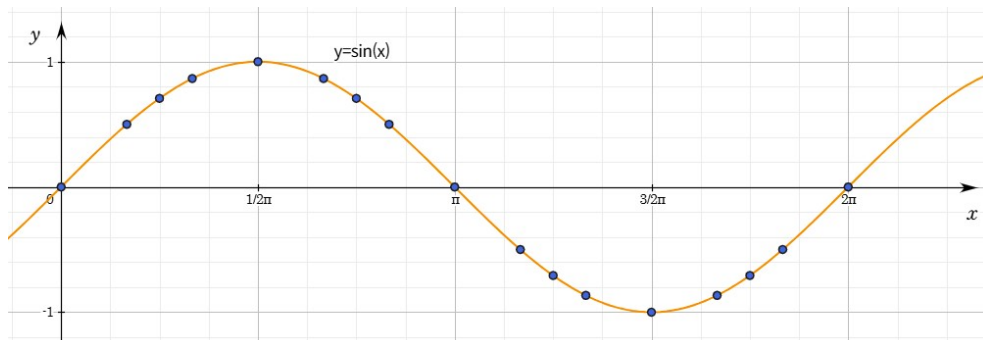
각(x)		값($\sin x$)
$\frac{7}{6}\pi$	$\Rightarrow$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	$\Rightarrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4}{3}\pi$	$\Rightarrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$	$\Rightarrow$	-1
$\frac{5}{3}\pi$	$\Rightarrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\Rightarrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11}{6}\pi$	$\Rightarrow$	$-\frac{1}{2}$
2π	$\Rightarrow$	0

탐구2 | 아래 칸에서 값이 서로 같은 것끼리 연결해 보자.

$\sin 10^\circ$	_____	$\sin 370^\circ$
$\sin 20^\circ$	_____	$\sin 180^\circ$
$\sin 130^\circ$	_____	$\sin 490^\circ$
$\sin 700^\circ$	_____	$\sin 200^\circ$
$\sin 540^\circ$	_____	$\sin 380^\circ$
$\sin 470^\circ$	_____	$\sin 210^\circ$
$\sin 330^\circ$	_____	$\sin 430^\circ$
$\sin 460^\circ$	_____	$\sin 140^\circ$
$\sin 40^\circ$	_____	$\sin 100^\circ$
$\sin 20^\circ$	_____	$\sin 160^\circ$

문항1

탐구1에서 알아본 내용을 참고하여 좌표평면에 순서쌍(x , $\sin x$)의 좌표를 찍고, 이를 바탕으로 $y = \sin x$ 의 그래프를 그리시오.



이상에서 다음과 같이 함수 $y = \sin x$ 의 그래프의 성질을 알 수 있다.

- ① 함수 $y = \sin x$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.
- ② 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\sin(-x) = -\sin x$$
가 성립한다.
- ③ 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 2π 간격으로 그 모양이 반복되므로 임의의 실수 x 에 대하여

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x (n \text{은 정수})$$
가 성립한다.

탐구3 | x 가 다음과 같을 때, $\cos x$ 의 값을 각각 적어 보자.

각(x)	값($\cos x$)
0	$\Rightarrow 1$
$\frac{\pi}{6}$	$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\Rightarrow \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\Rightarrow 0$
$\frac{2}{3}\pi$	$\Rightarrow -\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	$\Rightarrow -1$

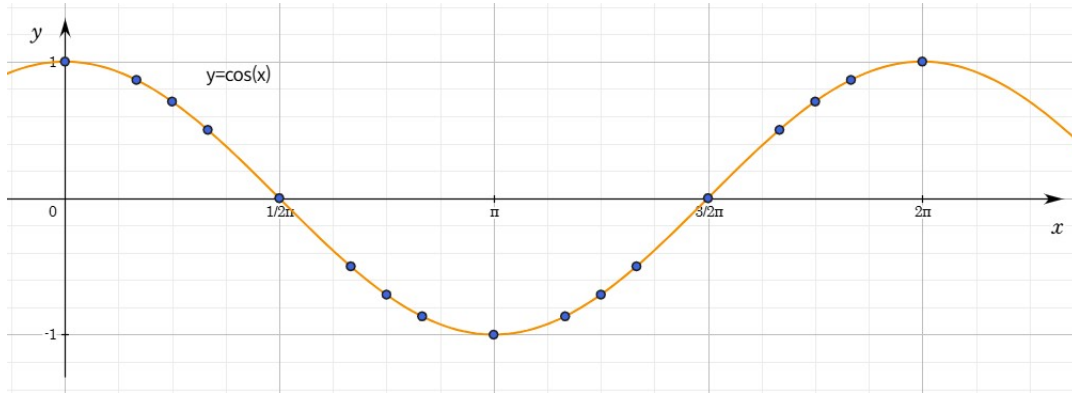
각(x)	값($\cos x$)
$\frac{7}{6}\pi$	$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4}{3}\pi$	$\Rightarrow -\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$	$\Rightarrow 0$
$\frac{5}{3}\pi$	$\Rightarrow \frac{1}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11}{6}\pi$	$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$
2π	$\Rightarrow 1$

탐구4 | 아래 칸에서 값이 서로 같은 것끼리 연결해 보자.

$\cos 10^\circ$	_____	$\cos 350^\circ$
$\cos 20^\circ$	_____	$\cos 180^\circ$
$\cos 130^\circ$	_____	$\cos 230^\circ$
$\cos 160^\circ$	_____	$\cos 200^\circ$
$\cos 540^\circ$	_____	$\cos 340^\circ$
$\cos 470^\circ$	_____	$\cos 390^\circ$
$\cos 330^\circ$	_____	$\cos 110^\circ$
$\cos 460^\circ$	_____	$\cos 320^\circ$
$\cos 40^\circ$	_____	$\cos 260^\circ$
$\cos 50^\circ$	_____	$\cos 310^\circ$

문항2

탐구3에서 알아본 내용을 참고하여 좌표평면에 순서쌍(x , $\cos(x)$)의 좌표를 찍고, 이를 바탕으로 $y = \cos x$ 의 그래프를 그리시오.



이상에서 다음과 같이 함수 $y = \cos x$ 의 그래프의 성질을 알 수 있다.

- ❶ 함수 $y = \cos x$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.
- ❷ 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\cos(-x) = \cos x$$
 가 성립한다.
- ❸ 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 2π 간격으로 그 모양이 반복되므로 임의의 실수 x 에 대하여

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x \quad (n \text{은 정수})$$
 가 성립한다. 따라서 함수 $y = \cos x$ 는 주기가 2π 인 주기함수이다.

지도의 주안점

$\sin x = \sin(2\pi + x), \quad \sin(\pi - x) = \sin x,$
 $\cos x = \cos(2\pi + x), \quad \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
 임을 알게 합니다.

📊 [생각열기 활동3] 탄젠트 그래프를 그려보자.

탐구5.

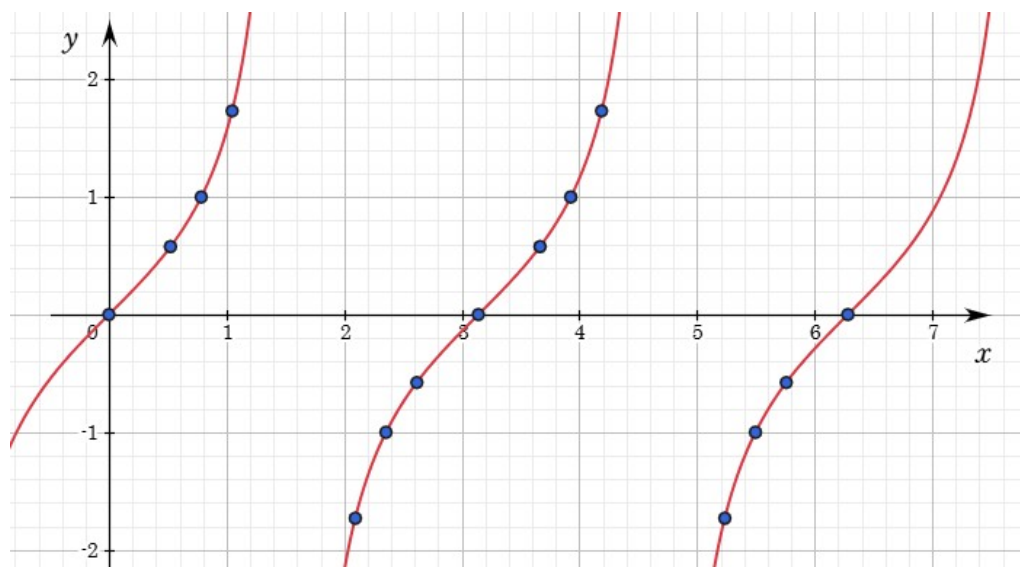
위에서 탐구한 각각의 각(x)에 대한 $\sin x$ 값과 $\cos x$ 값 그리고 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 임을 이용하여 $\tan x$ 값을 구해보자.

각(x)		값($\tan x$)
0	$\Rightarrow$	0
$\frac{\pi}{6}$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\Rightarrow$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\Rightarrow$	$\sqrt{3}$
$\frac{2}{3}\pi$	$\Rightarrow$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\Rightarrow$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$\Rightarrow$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
π	$\Rightarrow$	0

각(x)		값($\tan x$)
$\frac{7}{6}\pi$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5}{4}\pi$	$\Rightarrow$	1
$\frac{4}{3}\pi$	$\Rightarrow$	$\sqrt{3}$
$\frac{5}{3}\pi$	$\Rightarrow$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\Rightarrow$	-1
$\frac{11}{6}\pi$	$\Rightarrow$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
2π	$\Rightarrow$	0

문항3

탐구5에서 알아본 내용을 바탕으로 좌표평면에 순서쌍(각(x), 값($\tan x$))의 좌표를 찍고, 이를 바탕으로 $y = \tan x$ 의 그래프를 그리시오.



이상에서 다음과 같이 함수 $y = \tan x$ 의 그래프의 성질을 알 수 있다.

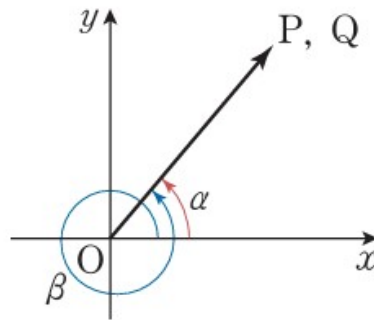
- ❶ 함수 $y = \tan x$ 의 정의역은 $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
- ❷ 임의의 정수 n 에 대하여 직선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프의 점근선이다.
- ❸ 함수 $y = \tan x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\tan(-x) = -\tan x$$
 가 성립한다.
- ❹ 함수 $y = \tan x$ 의 그래프는 π 간격으로 그 모양이 반복되므로 임의의 실수 x 에 대하여

$$\tan(x + n\pi) = \tan x \quad (n \text{은 정수})$$
 가 성립한다. 따라서 함수 $y = \tan x$ 는 주기가 π 인 주기함수이다.

지도의 주안점

두 동경 OP, OQ가 나타내는 각을 각각 α, β 라 하면 두 동경이 일치하는 경우의 위치 관계는 다음 그림과 같고 이를 식으로 표현하면 $\beta - \alpha = 2n\pi$ 임을 알게 합니다. (n 은 정수)

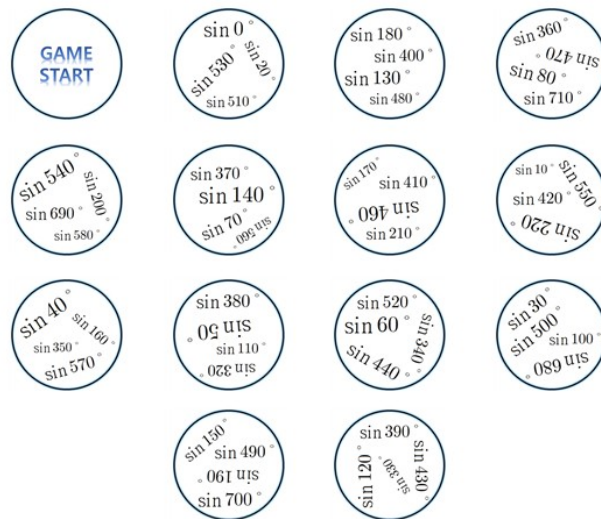


문항4

친구와 아래 규칙에 따라 게임을 해보자.

보드게임 규칙

- ① 카드를 한 장씩 나누어 갖고 자신의 앞에 삼각함수의 값이 보이게 놓는다.
- ② 나머지 카드는 삼각함수의 값이 보이게 가운데 쌓아두고 표지 카드를 덮어둔다.
- ③ 표지 카드를 없애면 가운데 쌓아놓은 카드 중 맨 위에 보이는 카드와 자신이 가지고 있는 카드에 있는 삼각함수의 값이 하나라도 일치하는 것을 찾는다.
- ④ 가장 먼저 찾은 사람이 쌓아놓은 카드를 한 장 가져간다.
- ⑤ 카드를 가져가는 순간 다음 게임이 바로 진행되며 가운데 쌓아놓은 카드가 하나도 없을 때 가장 많은 카드를 가지고 있는 사람이 이긴다.



정답 생략

지도의 주안점

$y = \sin x$, $y = \cos x$ 의 그래프를 그릴 때, 적어도 1주기 이상의 그래프를 그려 주기성을 이해하게 하고, 삼각함수의 그래프를 그릴 때, 처음에는 단위원에서 길이를 비교하여 그리고, 이후에는 함수의 평행이동을 이용하게 합니다. 또 $y = \tan x$ 의 그래프를 그릴 때도 적어도 1주기 이상의 그래프를 그려 주기성을 이해하게 하고, 탄젠트함수의 성질은 사인함수, 코사인함수와 비교할 때 다른 성질을 가지고 있음을 강조합니다.

정리 학습

● 오늘의 개념

- 사인함수 $y = \sin x$, 코사인함수 $y = \cos x$ 의 성질
 - 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다.
 - 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,
함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
 - 주기가 2π 인 주기함수이다.
- 탄젠트함수 $y = \tan x$ 의 성질
 - 정의역은 $\left\{x \mid x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (} n \text{은 정수)인 모든 실수} \right\}$ 이고,
치역은 실수 전체의 집합이다.
 - 그래프의 점근선은 직선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이다.
 - 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
 - 주기가 π 인 주기함수이다.

자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	😞
학습 내용	함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 의 그래프의 일부를 그릴 수 있다.			
학습 태도	삼각함수의 그래프를 탐구할 때, 실수나 어려움이 있어도 도전하며 끈기있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

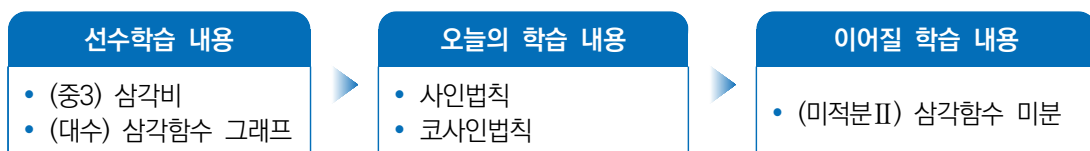
다음 (가)~(자)에 알맞은 것을 써넣어 보자.

삼각함수	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
정의역	(가) 실수 전체의 집합	실수 전체의 집합	$n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합
치역	(나) $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	(다) $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	(사) 실수 전체의 집합
대칭성	(라) 원점에 대하여 대칭	y 축에 대하여 대칭	(아) 원점에 대하여 대칭
주기	(마) 2π	(바) 2π	(자) π

프로그램 개요

과목	대수	영역	삼각함수
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.		안내된 절차에 따라 사인법칙 또는 코사인법칙에 관한 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성할 수 있다.	
최소성취수준 진술문	- 안내된 절차에 따라 사인법칙에 관한 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성할 수 있다. - 안내된 절차에 따라 코사인법칙에 관한 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성할 수 있다.		
차시 주제	사인법칙과 코사인법칙		
교과역량	문제해결 (O) 추론 (O) 의사소통 () 연결 (O) 정보처리 ()		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	• 삼각형에서 사인법칙이 성립함을 발견하고, 안내된 절차에 따라 사인법칙에 관한 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성하여 최소성취수준을 달성하도록 하였다. • 삼각형에서 각과 변 사이의 관계를 코사인법칙으로 설명됨을 이해하고 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성하여 최소성취수준을 달성하도록 하였다.		
수업 전개			
도입	• 준비학습 : 삼각함수 값을 확인하고, 사인법칙 또는 코사인법칙에 필요한 선수 학습 요소인 삼각비의 이해도를 확인한다. • 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표		
전개	• 생각열기 활동1 - 사인법칙 발견하기 - 삼각형의 한 각에 대한 대변의 비가 삼각형의 외접원의 지름의 길이와 같음을 발견하도록 함. • 생각열기 활동2- 코사인법칙 발견하기 - 삼각형의 두 변의 길이가 같을 때, 두 변 사이의 끼인 각의 크기에 따라 대변의 길이가 달라짐을 스스로 확인하도록 지도함. 예각, 직각, 둔각일 때의 코사인값을 비교해보고 코사인법칙을 적용하도록 지도함.		
마무리	• 오늘의 개념 • 자기 평가 기록지 • 스스로 학습하기		

학습 연결 개념도



06

사인법칙과 코사인법칙



개념 흐름도

(중) 삼각비



(고) 삼각함수 그래프



사인법칙과 코사인법칙



준비 학습

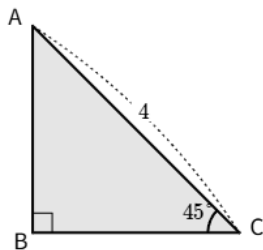
01. 다음 중 알맞은 삼각함수 값을 찾아 선으로 연결해보자.

- | | | |
|----------------------|--|----------------------|
| (1) $\sin 30^\circ$ | | $\frac{1}{2}$ |
| (2) $\sin 135^\circ$ | | $-\frac{1}{2}$ |
| (3) $\cos 30^\circ$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| (4) $\cos 120^\circ$ | | $-\frac{1}{2}$ |

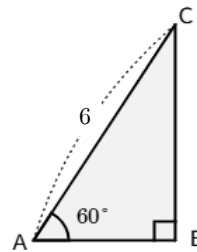
02. 그림의 삼각형 ABC에서 각 변의 길이를 구해보자.

(1) $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$

(2) $\overline{AB} = 3$



$$\overline{AB} = 4 \times \sin 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$



$$\overline{AB} = 6 \times \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$



학습 내용

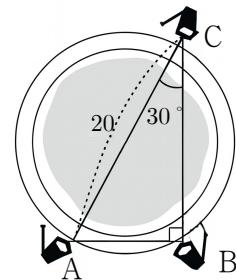
학습목표

성취수준	안내된 절차에 따라 사인법칙 또는 코사인법칙에 관한 간단한 문제를 해결할 수 있다.
학습목표	안내된 절차에 따라 사인법칙 또는 코사인법칙에 관한 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성할 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

📅 [생각열기 활동1]

오른쪽 그림과 같이 지름의 길이가 20인 원형 무대의 세 지점 A, B, C에 카메라를 하나씩 설치하였다. 두 지점 A, C는 원의 지름의 양 끝이고, C지점에서 A지점과 B지점을 바라볼 때 이루는 각의 크기는 30° 이다.
이때 삼각형 ABC에서 다음 물음에 답해 보자.



① $\angle CAB =$

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$\angle CAB = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ \text{ 이다}$$

② 삼각비를 이용하여 두 선분 AB, BC의 길이를 각각 구해 보자.

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{AB}}{20} \text{ 이므로 } \overline{AB} = 20 \times \cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ 이다}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{20} \text{ 이므로 } \overline{BC} = 20 \times \sin 60^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ 이다}$$

③ 다음 □ 안에 알맞은 수를 넣어 보자.

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \boxed{20}, \frac{\overline{AC}}{\sin B} = \boxed{20}, \frac{\overline{AB}}{\sin C} = \boxed{20}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{10\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 20, \frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{20}{\sin 90^\circ} = \frac{20}{1} = 20, \frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

지도의 주안점

원에 내접하는 직각삼각형에서 한 변의 길이와 그 대각에 대한 사인함수의 값의 비가 일정하고 그 값은 원의 지름과 같음을 탐구하는 과정을 통해 사인법칙을 자연스럽게 이해하도록 안내합니다. 사인법칙이 삼각형의 모양과 상관없이 성립함을 이해하도록 합니다.

위의 [생각열기 활동1]에서 $\sin B = 1$ 이고 $\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ 이므로 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}$ 와 $\frac{\overline{AC}}{\sin B}$ 의 값이 모두 원의 지름 AC의 길이와 같음을 알 수 있다.

일반적으로 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이에는 다음과 같은 관계가 성립하고, 이것을 **사인법칙**이라고 한다.

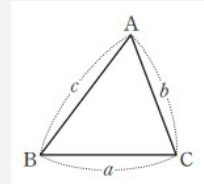


사인법칙 증명

사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

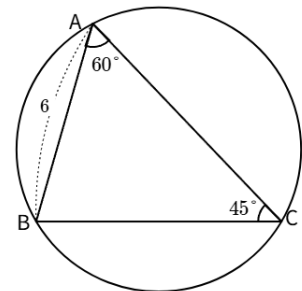


문항1

삼각형 ABC에서 $A = 60^\circ$, $C = 45^\circ$, $\overline{AB} = 6$ 일 때, 삼각형 ABC의 외접원에 대하여 다음 물음에 알맞은 값을 구해보자.

(1) 반지름의 길이 R

$$\frac{\boxed{6}}{\sin C} = \boxed{2R} \quad \text{따라서, 반지름 길이 } R = \boxed{3\sqrt{2}}$$



사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 45^\circ} = 2R$ 이므로 $R = \frac{1}{2} \times \frac{6}{\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}$ 이다.

(2) $\overline{BC}$ 의 길이를 구해보자.

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} \quad \text{따라서, } \overline{BC} = 3\sqrt{6}$$

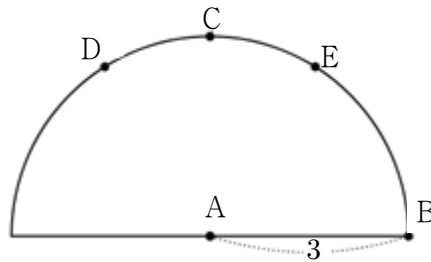
$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}$ 에서 $\overline{BC} = 6\sqrt{2} \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{6}$ 이다.

지도의 주안점

삼각형의 한 변의 길이와 그 대각에 대한 사인함수의 값의 비를 이용하여 외접원의 지름의 길이를 구할 수 있음을 알도록 지도합니다. (1) 문제해결 결과에서 반지름의 길이를 알고, 그 길이를 활용하여 (2)에서 대변의 길이를 구할 수 있음을 이해하도록 지도합니다.

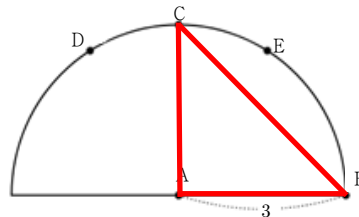
📊 [생각 열기 활동2]

아래 그림과 같이 중심이 A이고, 반지름의 길이가 3인 반원에 대하여 $\angle EAB = 60^\circ$, $\angle CAB = 90^\circ$, $\angle DAB = 120^\circ$ 일 때, 다음 단계에 따라 삼각형의 변의 길이와 각 사이의 관계를 탐구해보자.



| 탐구1 |

세 점 A, B, C를 연결하여 직각삼각형을 만들고, 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{BC}$ 의 길이를 구해보자.

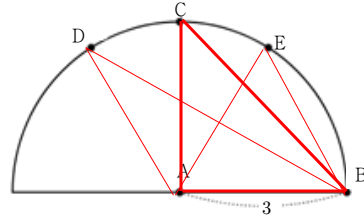


오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$ 이고,

피타고라스 정리에 의해 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ 이므로 $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$ 이다.

탐구2

세 점 A, B, E를 연결한 삼각형 ABE의 한 변 $\overline{BE}$, 세 점 A, B, D를 연결한 삼각형 ABD의 한 변 $\overline{BD}$ 와 탐구1의 $\overline{BC}$ 의 길이를 각각 비교하고, 부등호로 나타내보자.



오른쪽 그림과 같이 두 변 사이의 끼인각의 크기가

커짐에 따라서 대변의 길이가 커진다. 따라서, $\overline{BE} < \overline{BC}$ 이고 $\overline{BD} > \overline{BC}$ 이다.

(1) $\overline{BE} < \overline{BC}$

(2) $\overline{BD} > \overline{BC}$

지도의 주안점

탐구과정에서 삼각형을 그리고, 끼인각을 표시하도록 지도하고 각 변의 길이도 표시하도록 안내합니다. 코사인법칙은 두 변 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있음을 자연스럽게 이해하게 합니다. 특히, 피타고라스 정리는 코사인법칙의 특별한 경우임을 이해하고, 코사인법칙이 삼각형 모양에 관계없이, 즉 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각 삼각형의 경우에 모두 성립함을 자연스럽게 이해하도록 합니다.

탐구1과 탐구2를 통해 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이에는 일정한 법칙이 존재함을 발견할 수 있다. 코사인함수를 이용하면 이를 코사인법칙으로 정리할 수 있다. 피타고라스 정리는 코사인법칙을 적용할 때, 삼각형의 한 내각이 직각인 특별한 경우로 볼 수 있다.



코사인법칙 증명

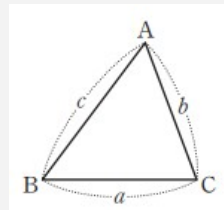
코사인법칙

삼각형 ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



탐구3

코사인법칙을 적용하여 $\overline{BE}$ 와 $\overline{BD}$ 의 길이를 구하는 과정이다.
빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

삼각형 ABE에서 코사인법칙을 적용하여 $\overline{BE}$ 를 구하면

$$\overline{BE}^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \cos 60^\circ = \boxed{9} \quad \text{이므로 } \overline{BE} = \boxed{3} \text{ 이다.}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하여 $\overline{BD}$ 를 구하면

$$\overline{BD}^2 = \boxed{3}^2 + \boxed{3}^2 - 2 \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times \cos \boxed{120^\circ} = \boxed{27} \quad \text{이므로}$$

$$\overline{BD} = \boxed{3\sqrt{3}} \text{ 이다.}$$

지도의 주안점

안내된 절차에 따라 코사인법칙을 적용하여 삼각형의 두 변의 길이와 두 변 사이의 끼인각을 빈칸에 작성하고 계산과정을 거쳐 나머지 한 변의 길이를 구하도록 지도합니다.

문항2

- (1) 삼각형 ABC에서 $b=6$, $c=3$, $A=60^\circ$ 일 때, a 의 값을 구해보자.

$$a^2 = \boxed{6}^2 + \boxed{3}^2 - 2 \times \boxed{6} \times \boxed{3} \times \cos \boxed{60^\circ} = \boxed{27} \quad \text{이므로 } a = \boxed{3\sqrt{3}} \text{ 이다}$$

코사인법칙에 의하여 $a^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos 60^\circ = 27$ 이다.

이때 $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ 이다.

- (2) 삼각형 ABC에서 $a=5$, $c=2\sqrt{3}$, $B=30^\circ$ 일 때, b 의 값을 구해보자.

$$b^2 = \boxed{5}^2 + \boxed{2\sqrt{3}}^2 - 2 \times \boxed{5} \times \boxed{2\sqrt{3}} \times \cos \boxed{30^\circ} = \boxed{7} \quad \text{이므로 } b = \boxed{\sqrt{7}} \text{ 이다}$$

코사인법칙에 의하여 $b^2 = 5^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 5 \times 2\sqrt{3} \times \cos 30^\circ = 7$

이때 $b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{7}$ 이다.

지도의 주안점

탐구3 해결 과정을 참고하여 안내된 절차에 따라 코사인법칙을 적용하도록 지도합니다. 삼각형의 두 변의 길이와 두 변 사이의 끼인각을 빈칸에 작성해보고 계산과정을 거쳐 나머지 한 변의 길이를 구하도록 지도합니다.

● 오늘의 개념

1. 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = (2R)$$

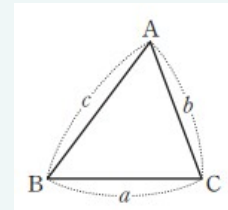
2. 코사인법칙

삼각형 ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - (2bc \cos A)$$

$$b^2 = c^2 + (a^2 - 2ca \cos B)$$

$$c^2 = (a^2 + b^2 - 2ab \cos C)$$



자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	😞
학습 내용	사인법칙을 이해하고 간단한 문제를 해결할 수 있다.			
	코사인법칙을 이해하고 간단한 문제를 해결할 수 있다.			
학습 태도	사인법칙과 코사인법칙을 탐구할 때 실수나 어려움이 있어도 도전하며 끈기 있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

01. 사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC에서 $a = \sqrt{2}$, $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$ 일 때, b 의 값을 구해보자.

사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$ 이므로 $b = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ 이다.

02. 사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC에서 $A = 120^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$ 일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R 를 구해보자.

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R$ 이므로 $R = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ 이다.

03. 코사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC에서 $a = 3$, $b = \sqrt{2}$, $C = 45^\circ$ 일 때, c 의 값을 구해보자.

코사인법칙에 의하여 $c^2 = 3^2 + \sqrt{2}^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ = 5$ 이고, 이때 $c > 0$ 이므로 $c = \sqrt{5}$ 이다.

기초학력 진단을 위한 도움자료

1. 다음은 육십분법과 호도법에 관한 우진, 각도요정, 라디안기사사의 대화의 일부이다. 각도 요정의 마지막 물음에 답해보자.

각도요정님! 180° 와 π 라디안이 왜 같아요?



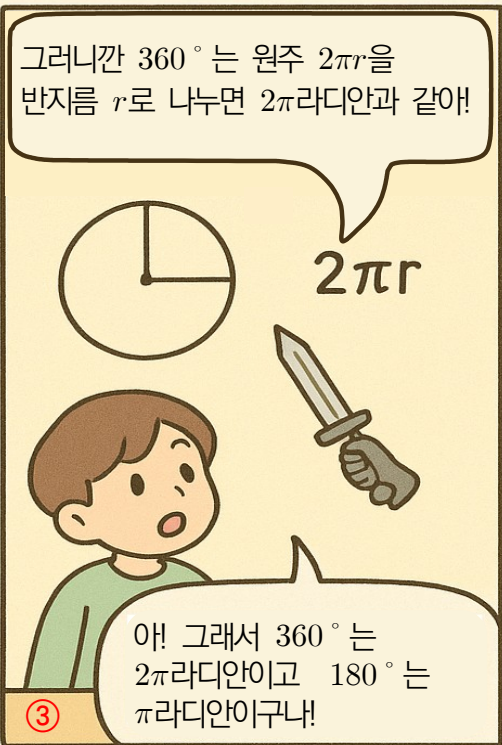
①

나는 라디안기사! 호의 길이를 반지름의 길이로 나눠 부채꼴의 중심각 (각도)을 라디안으로 바꿀 수 있지!



②

그러니깐 360° 는 원주 $2\pi r$ 을 반지름 r 로 나누면 2π 라디안과 같아!



③

$\theta(^{\circ}) \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi\theta}{180}$ (라디안) 이거든



④

아! 그래서 360° 는 2π 라디안이고 180° 는 π 라디안이구나!

그럼 90° 는 몇 라디안일까?

정답: $\frac{\pi}{2}$ 라디안

삼각함수 단원은 개념 이해부터 학습에 어려움을 겪는 학생이 많아 학습 동기를 갖도록 지도하는 것이 중요합니다. 따라서 학생들이 육십분법(°)과 호도법(rad)의 개념에 대한 직관적 이해를 돕기 위해 만화 형식의 문항 출제로 공식 단순 암기를 넘어 변환 과정의 원리와 활용을 익히도록 합니다.

만화를 매개로 흥미를 높이고, 학생들이 스스로 설명할 수 있는 능력을 기르도록 합니다. 만화 속 대사를 활용하여 개념을 재확인하는 방법으로 문항을 출제할 수도 있습니다. 예시 문항으로, “만화에서 라디안 기사가 말한 변환 공식을 식으로 정리하면?” 처럼 출제하여 학생 스스로 식을 정리해보도록 할 수도 있습니다. 추가로 30° , 45° , 60° 를 라디안으로 표현하도록 하는 문항으로 출제할 수도 있습니다.

다른 출제 유형으로는 아래 표처럼 문항을 제시하고 빈칸에 알맞은 값을 구하는 문항으로 제작하여 육십분법과 호도법 사이의 관계 이해 정도를 확인할 수도 있습니다.

육십분법	호도법
180°	π 라디안
90°	$\frac{\pi}{2}$ 라디안
60°	()라디안
30°	()라디안
45°	()라디안

정답: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

1

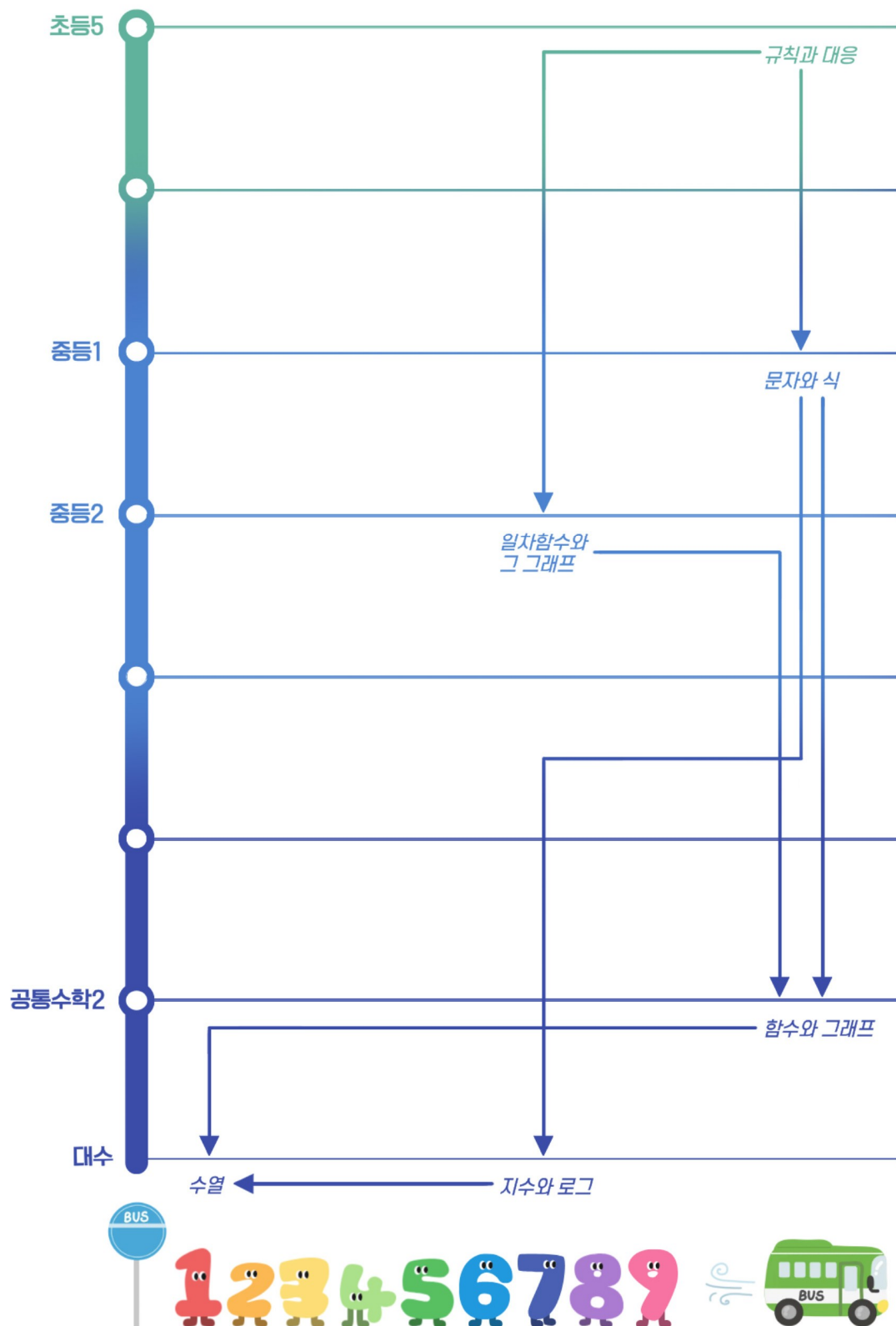
[12대수03] '수열' 영역의 최소 성취수준 진술문

영역	영역별 성취수준(E)		성취기준별 성취수준(E)	최소 능력의 수행 특성
[12대수03] 수열	지식 · 이해	수열과 Σ 의 뜻, 수열의 귀납적 정의를 안다.	01. 수열의 뜻을 안다. 02. 안내된 절차에 따라 등차수열의 일반항을 구할 수 있다. 03. 안내된 절차에 따라 등비수열의 일반항을 구할 수 있다. 04. Σ 의 뜻을 안다. 05. 안내된 절차에 따라 여러 가지 수열의 첫째항부터 특정한 항까지의 합을 구할 수 있다. 06. 수열의 귀납적 정의를 안다. 07. 안내된 절차에 따라 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.	㉓ 주어진 간단한 수열의 특정한 항을 구할 수 있다.
	과정 · 기능	안내된 절차에 따라 등차수열과 등비수열의 일반항, 여러 가지 수열의 첫째항부터 특정한 항까지의 합을 구하고 수학적 귀납법으로 명제를 증명할 수 있다.		㉔ 안내된 절차에 따라 첫째항과 공차가 주어진 등차수열의 일반항을 구할 수 있다.
				㉕ 안내된 절차에 따라 첫째항과 공비가 주어진 등비수열의 일반항을 구할 수 있다.
				㉖ Σ 를 사용하여 나타낸 합을 Σ 를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타낼 수 있다.
				㉗ 안내된 절차에 따라 간단한 수열의 첫째항부터 특정한 항까지의 합을 구할 수 있다.
	가치 · 태도	수학적 귀납법에 관심을 가진다.		㉘ 안내된 절차에 따라 귀납적으로 정의된 간단한 수열의 특정한 항을 구할 수 있다.
㉙ 간단한 예를 통해 수열에 관심을 가진다.				

1) 해설 및 차시 개요

- 성취기준별 성취수준(E)에 제시된 07은 학습 부담을 고려하여 제외하였다.
- 성취기준별 성취수준(E)에 제시된 02, 03, 05, 06의 내용 중 학습 부담을 고려하여 등차수열은 첫째항과 공차가 주어진 경우로, 등비수열은 첫째항과 공비가 주어진 경우로, 거듭제곱의 합은 $\sum_{k=1}^n k$ 와 $\sum_{k=1}^n k^2$ 의 경우로, 간단한 수열의 특정한 항을 구하는 문제로 제한하였다.
- 성취기준별 성취수준(E)에 제시된 01의 내용 중 학습 부담을 고려하여 추가적인 안내된 절차를 포함하였으며 구체적인 적용 예는 최소 성취수준 보장지도 자료에 제시하였다.
- 간단한 예를 통해 수열에 관심을 가진다는 내용을 추가하여 학생의 정의적 특성을 고려하고자 하였다.

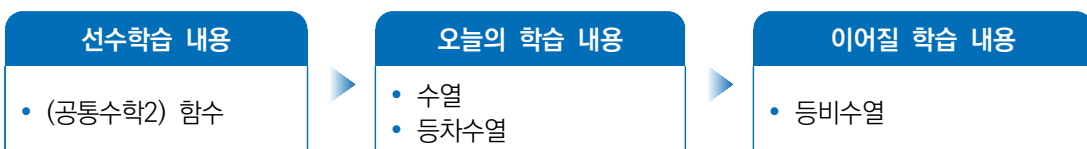
차시	차시 개요
07. 수열과 등차수열	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉗와 ㉘의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 탐구활동을 통해 수열을 뜻 알고 등차수열의 공차의 뜻을 이해하고 일반항을 구성하는 원리를 이해하도록 구성하였다. 첫째항, 항, 일반항, 공차의 개념을 이해하고 간단한 수열과 등차수열의 일반항을 구하는 문제를 제시하여 해결할 수 있도록 한다.
08. 등비수열	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉙의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 등비수열의 공비와 일반항을 구할 수 있도록 구성하였다. 안내된 절차에 따라 등비수열의 공비와 일반항을 구하는 문제를 제시하여 해결할 수 있도록 하고 등비수열의 유용성과 가치를 알도록 한다.
09. 수열의 합	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉚와 ㉛의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 기호 $\sum$ 의 의미를 이해하고 $\sum$ 를 사용하여 나타낸 합을 $\sum$ 를 사용하지 않는 합의 꼴로 바꾸는 활동을 통해 기호 $\sum$ 의 유용성을 알도록 구성하였다. 또한, 자연수의 합과 자연수 거듭제곱의 합을 구하는 공식을 통해 규칙성을 가진 수열의 합을 간단히 구하는 원리를 이해하도록 하였다.
10. 수열의 귀납적 정의	최소 능력의 수행 특성에 제시된 ㉜와 ㉝의 내용을 기준으로 학습 내용에 따른 학습 목표를 설정하고, 두 항 사이의 관계식을 안내된 절차를 통해 수열의 귀납적 정의로 표현할 수 있도록 구성하였다. 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열을 정의하는 경우는 이전 단원에서 학습한 등차수열, 등비수열로 제한하여 문제를 제시하여 학생들이 배운 내용을 바탕으로 두 항 사이의 관계식을 표현하고 수열의 귀납적 정의의 의미를 이해하도록 하였다.



프로그램 개요

과목	대수	영역	수열
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수03-01] 수열의 뜻을 설명할 수 있다. [12대수03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.		수열의 뜻을 안다. 안내된 절차에 따라 등차수열의 일반항을 구할 수 있다.	
최소성취수준 진술문	- 주어진 간단한 수열의 특정한 항을 구할 수 있다. - 안내된 절차에 따라 첫째항과 공차가 주어진 등차수열의 일반항을 구할 수 있다.		
차시 주제	등차수열		
교과역량	문제해결 (O) 추론 (O) 의사소통 (O) 연결 (O) 정보처리 ()		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	• 공학프로그램을 활용하여 수열의 규칙을 발견하면서 수열의 의미를 이해하고 수열의 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성하며 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다. • 일상생활에서 발견되는 등차수열을 찾아 등차수열의 일반항을 구하는 과정을 안내하고 등차수열의 뜻을 이해하도록 지도한다. 등차수열에 관한 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성하며 최소성취수준을 달성하기 위한 활동이다.		
수업 전개			
도입	• 준비학습 : 수의 규칙을 발견하고, 이전에 학습한 함수 문제를 통해 수열 학습에 필요한 선수 학습 요소를 확인한다. • 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표		
전개	• 생각열기 활동1 - 수열의 규칙 발견하기 - 알지오매스 3D에서 계단 형태의 블록을 쌓으며 블록의 총 개수를 통해 수열의 의미를 이해함. • 생각열기 활동2- 등차수열 발견하기 - 4년마다 열리는 아시안 게임이 개최되는 연도를 찾아보면서 등차수열의 뜻과 공차의 의미를 스스로 이해하도록 함.		
마무리	• 오늘의 개념 • 자기 평가 기록지 • 스스로 학습하기		

학습 연결 개념도



07

수열과 등차수열



개념 흐름도

함수



수열, 등차수열



준비 학습

01. 규칙에 따라 다음 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) 1, 4, 7, 10, 13, ...

(2) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

02. 20이하의 자연수 중에서 다음 수를 작은 것부터 차례로 나열해보자.

(1) 3의 배수

3, 6, 9, 12, 15, 18

(2) 5의 배수

5, 10, 15, 20

03. 다음 함수에 대하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 을 구해보자.

(1) $f(x) = 2x + 1$

$f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 7$

(2) $f(x) = x^2 + 1$

$f(1) = 2, f(2) = 5, f(3) = 10$



학습 내용

학습목표

성취수준	수열의 뜻을 안다. 안내된 절차에 따라 등차수열의 일반항을 구할 수 있다.
학습목표	주어진 간단한 수열의 특정한 항을 구할 수 있다. 안내된 절차에 따라 첫째항과 공차가 주어진 등차수열의 일반항을 구할 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

📅 [생각열기 활동1]

다음은 알지오매스 3D(입체도형)를 활용하여 계단을 만드는 과정에서 필요한 쌓기 나무의 개수를 구하는 과정이다. 실제로 쌓기나무를 쌓아보고 단계별 쌓기나무의 개수를 나타내보자.



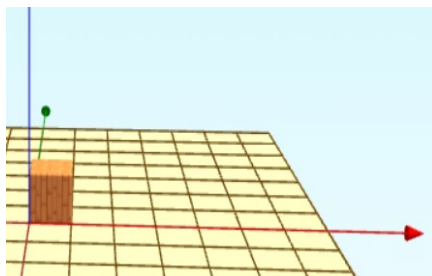
탐구1 | QR코드를 스캔하여 알지오매스 3D에서 각 단계를 거쳐 규칙을 발견해보자.

[1단계]  쌓기나무 아이콘을 클릭하고 3차원 공간 한 평면에 쌓기나무 한 개를 쌓는다.

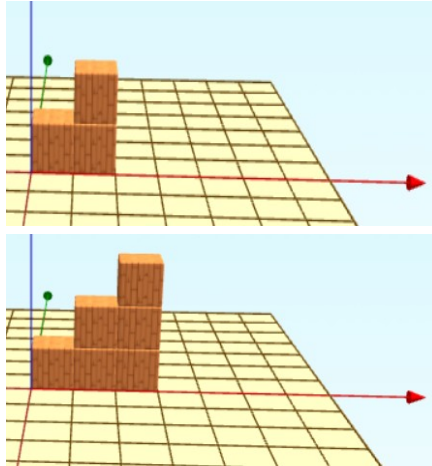
[2단계] 1단계에서 쌓은 블록 바로 옆에 쌓기나무 두 개를 쌓는다.

[3단계] 2단계에서 쌓은 블록 바로 옆에 쌓기나무 세 개를 쌓는다.

각 단계에 쌓기나무의 총 개수를 세어 ()안에 써보자.



[1단계] 쌓기나무 총 개수: (1)



[2단계] 쌓기나무 총 개수: (3)

[3단계] 쌓기나무 총 개수: (6)

탐구2 | 같은 방법으로 계단을 만든다면 [4단계] 쌓기나무의 총 개수를 구해보자.

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$ 이므로 쌓기나무의 총 개수는 10이다.

탐구3 | 각 단계의 쌓기나무 총 개수를 차례로 나열해보고, 다음 단계의 쌓기나무의 총 개수를 예측해보자.

1단계 1, 2단계 3, 3단계 6, 4단계 10 이므로 5단계면 4단계 쌓기나무 개수에 5를 더한 15가 된다. 따라서, 수를 나열하면 1, 3, 6, 10, 15, ...이다.

위의 **[생각열기 활동1]**에서 각 단계에 놓인 쌓기나무의 개수를 차례로 나열하면

1, 3, 6, 10, 15, ... 이다.

이와 같이 차례로 나열한 수의 열을 **수열**이라 하고, 나열된 각 수를 그 수열의 항이라고 한다.

이때 각 항을 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, ..., n 째항, ... 또는 제1항, 제2항, 제3항, ..., 제 n 항, ...이라고 한다.

따라서, 1, 3, 6, 10, 15, ...에서 첫째항은 1이고, 제5항은 15이다.

일반적으로 수열을 나타낼 때는 각 항에 번호를 붙여

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 과 같이 나타낸다.

이때 제 n 항 a_n 을 이 수열의 **일반항**이라 하고, 일반항이 a_n 인 수열을 기호로

$\{a_n\}$ 과 같이 나타낸다.

지도의 주안점

QR코드를 스캔하여 알지오매스 3D를 활용하여 실제로 쌓기나무를 쌓아보고 단계별로 늘어나는 개수를 발견하도록 지도합니다. 수열을 나타낼 때는 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 과 같이 첨자를 사용하므로 첨자를 사용하는 방법을 충분히 익히도록 지도합니다. 제 n 항인 a_n 과 같은 의미로 쓰이며, a_n 이 n 에 대한 식으로 주어지면 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하여 각 항을 차례대로 얻을 수 있음을 알게 지도합니다.

보 기

수열 5, 7, 9, 11, ... 은 첫째항은 5이고, 2씩 더해지는 수열이다. 따라서, 제5항은 제4항인 11에 2를 더한 13이다.

문항1

다음 수열의 첫째항과 제5항을 나타내보자.

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{5}{6}$$

$$(2) 1, 5, 25, 125, \dots$$

$$a_1 = 1, a_5 = 625$$

지도의 주안점

수열의 각 항을 구할 때는 항의 번호와 그 항의 관계를 발견하도록 지도합니다.

📅 [생각열기 활동2]

아시안 게임은 4년마다 한 번씩 개최하는 올림픽의 아시아 지역 대회로 2026년에는 일본 아이치·나고야 아시안 게임이 열린다.

(1) 다음 12년간 연도를 나타내는 숫자 중 아시안 게임이 열리는 해를 색칠해보자.

2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

(2) (1)에서 색칠한 숫자를 수열로 나타내보자.

2026, 2030, 2034

(3) (2)의 각 항은 차례로 4씩 더하여 숫자가 나열된다는 사실을 알 수 있다.

이와 같이 첫째항에 차례로 일정한 수를 더하여 얻어진 수열을 **등차수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공차**라고 한다.

등차수열 1, 5, 9, 13, 17, ...는 첫째항이 (1), 공차가 (4)이다.

$$1, 5, 9, 13, 17$$

+4 +4 +4 +4

(4) 등차수열 게임으로 첫째항과 공차를 찾아보자. QR코드를 스캔하여 등차수열 개념을 이해해보자.

등차수열게임



Let's Start!

지도의 주안점

등차수열의 뜻을 생각하기 활동으로 자연스럽게 이해하고 여러 가지 현상에서 규칙적으로 찾을 수 있는 등차수열의 예를 찾아보도록 지도합니다. 공차는 이웃하는 두 항의 차임을 이해하도록 하고 $5 - 1 = 9 - 5 = 13 - 9 = 17 - 13 = 4$ (공차)임을 알게 합니다.

(4) 등차수열 게임을 실행하고, 여러 명의 학생이 게임을 실행하는 경우는 게임 속에서 찾은 등차수열을 종이에 적어 등차수열의 공차를 알아보고, 친구와 서로 공차에 관해 이야기를 나누도록 지도합니다.

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + d = a + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d$$

$\vdots$

이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a + 0 \times d \\ a_2 &= a + 1 \times d \\ a_3 &= a + 2 \times d \\ a_4 &= a + 3 \times d \\ &\vdots \\ a_n &= a + (n-1) \times d \end{aligned}$$



출처: 비상 <대수> p. 118

보 기

첫째항이 1, 공차가 3이면 $a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$

1, 3, 5, 7, ... 이면 $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$ 이다.

등차수열의 일반항

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 일반항 a_n 은 $a_n = a + (n-1)d$ 이다.

문항2

01. 다음 수열이 등차수열일 때, 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) $-2, 3, \boxed{8}, 13, 18, \dots$

(2) $1, 0, \boxed{-1}, -2, \boxed{-3}, \dots$

02. 다음 등차수열의 일반항 a_n 을 구해보자.

(1) 첫째항이 3, 공차가 4

등차수열의 일반항을 구하는 식에 첫째항 3과 공차 4를 대입하면

$$a_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1 \text{ 이므로 } a_n = 4n - 1 \text{ 이다.}$$

(2) $10, 8, 6, 4, \dots$

위 수열의 제2항과 첫째항의 차를 구하면 $8 - 10 = -2$ 로 공차는 -2 이다.

등차수열의 일반항을 구하는 식에 첫째항 10과 공차 -2 를 대입하면

$$a_n = 10 + (-2) \times (n-1) = -2n + 12 \text{ 이므로 } a_n = -2n + 12 \text{ 이다.}$$

지도의 주안점

교사는 제시된 보기 이외에 등차수열의 일반항을 구하는 다른 예를 제시하여 일반항 구하는 과정을 설명하거나 아래 공식을 적용하여 해결하도록 안내합니다.

정리 학습

● 오늘의 개념

1. 수열

차례대로 나열된 수의 열을 **수열** 이라 하고, 수열을 이루고 있는 각 수를 그 수열의 **항** 이라고 한다.

2. 등차수열

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 일반항 a_n 은 $a + (n-1)d$ 이다.

자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	☹️
학습 내용	수열의 뜻을 안다.			
	안내된 절차에 따라 등차수열의 일반항을 구할 수 있다.			
학습 태도	수열과 등차수열을 탐구할 때 실수나 어려움이 있어도 도전하며 끈기 있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

01. 다음 수열의 규칙에 따라 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) 5, 55, 555, 5555, 55555, ...

(2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, ...

02. 다음 수열이 등차수열일 때, 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) 1, 4, 7, 10, 13, ...

(2) -3, -1, 1, 3, 5, 7, ...

03. 다음 등차수열의 일반항 a_n 을 구해보자.

(1) 첫째항 2, 공차 3

$$a_n = 3n - 1$$

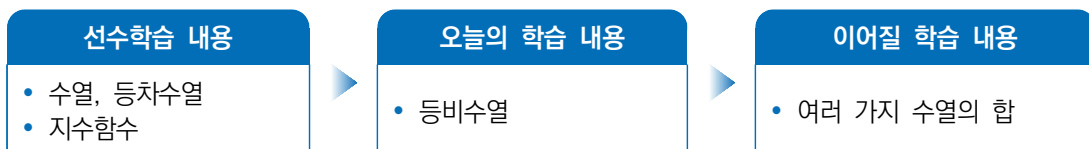
(2) 10, 6, 2, -2, ...

$$a_n = -4n + 14$$

프로그램 개요

과목	대수	영역	수열
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.		안내된 절차에 따라 등비수열의 일반항을 구할 수 있다.	
최소성취수준 진술문	- 안내된 절차에 따라 첫째항과 공비가 주어진 등비수열의 일반항을 구할 수 있다.		
차시 주제	등비수열		
교과역량	문제해결 (O) 추론 (O) 의사소통 (O) 연결 () 정보처리 (O)		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	- 일상의 현상에서 일정한 비율로 증가하는 사례를 통해 등비수열의 뜻을 이해하고 등비수열의 공비를 찾고 일반항을 의미를 알고 최소성취수준을 달성하도록 구성하였다. - 등비수열의 공비와 일반항을 구하는 간단한 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.		
수업 전개			
도입	- 준비학습 : 등차수열의 일반항을 구하고 지수함수의 의미를 이해하면서 등비수열의 선수 학습 요소를 확인한다. - 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표		
전개	생각열기 활동1 - 일상생활에서 등비수열 발견하기 - 단계별로 2배씩 늘어나는 음량 조절 버튼을 통해 등비수열의 뜻을 이해하고 이전 항에서 다음 항을 구하는 과정을 이해하도록 지도함. 생각열기 활동2- 등비수열의 일반항 구하기 - 등비수열의 두 항 사이의 관계를 스스로 찾아보고 일반항을 구하는 과정을 이해하도록 지도함.		
마무리	- 오늘의 개념 - 자기 평가 기록지 - 스스로 학습하기		

학습 연결 개념도



08

등비수열



개념 흐름도

수열, 등차수열



등비수열



준비 학습

01. 다음 등차수열의 공차를 구하고, 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) $-1, 3, 7, \boxed{11}, 15, \dots$

공차 4

(2) $6, \boxed{0}, -6, -12, -18, \dots$

공차 -6

02. 다음 함수에 대하여 $f(1), f(2), f(3)$ 을 구해보자.

(1) $f(x) = 2^x$

$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8$

(2) $f(x) = 3^x$

$f(1) = 3, f(2) = 9, f(3) = 27$



학습 내용

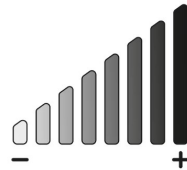
학습목표

성취수준	안내된 절차에 따라 등비수열의 일반항을 구할 수 있다.
학습목표	안내된 절차에 따라 첫째항과 공비가 주어진 등비수열의 일반항을 구할 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

📊 [생각열기 활동1]

어떤 스마트폰의 음량 조절 버튼은 $\oplus$ 버튼을 한 번 누를 때마다 음량이 이전단계 음량의 2배씩 커진다. 1단계 음량이 1dB이고, $\oplus$ 버튼을 한 번 누른 후 2단계 음량은 2dB이라고 할 때, 다음 물음에 알맞은 답을 찾아보자.



(1) 다음 표는 각 단계에 음량을 나타낸다. 표의 빈칸에 알맞은 값을 써보자.

(단위: dB)

볼륨	1단계	2단계	3단계	4단계	5단계	...
음량	1	2	4	8	16	...

(2) 음량 조절 $\oplus$ 버튼이 8단계에 도달하면, 음량은 몇 dB인가?

음량은 2배씩 늘어나므로 첫째항 1에 2씩 곱하여 수를 나열하면 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128
이므로 8단계는 128(dB)이다.

(1)에서 각 단계의 음량을 차례로 수열로 나타내면

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad \dots \quad \text{으로}$$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

수열 1, 2, 4, 8, 16, ...은 첫째항 1부터 차례대로 2를 곱하여 만든 수열이다.

첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 **등비수열**이라 하고, 곱하는 일정한 수를 **공비**라고 한다.

공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 제 n 항에 공비 r 를 곱하면 제 $(n+1)$ 항이 되므로

$$a_{n+1} = ra_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \text{이 성립한다.}$$

(3) 등비수열이 포함된 수열 게임을 통해 등비수열의 첫째항과 공비를 찾아보자.

QR코드를 스캔하여 수열과 등비수열 개념을 이해해보자.



랜덤 문제제시 게임으로 등차수열과 등비수열이 섞여 있으며 정답을 제시할 수 없으나 직관적으로 게임 규칙을 이해하고 해결할 수 있는 문제로 구성되어 있습니다.

지도의 주안점

음량의 단계별 크기를 통해 등비수열로 나타내어 규칙성을 발견하도록 합니다. 등비수열은 이웃하는 두 항의 비가 일정한 수열임을 이해하도록 합니다.

특히, 공비는 두 항의 비로 $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$ (공비)임을 알도록 지도합니다. (3) 등비수열이 포함된 게임에는 등비수열과 등차수열이 섞여 있으므로 등비수열의 등차수열과의 차이를 발견하도록 안내합니다.

보 기

등비수열 2, 6, 18, 54, 162, ...의 공비는 3이다.

문항1

다음 등비수열의 공비를 구하고, 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) 2, , 8, 16, 32, ...

(2) -27, 9, -3, , $-\frac{1}{3}$, ...

지도의 주안점

수열의 두 항 사이의 관계에서 일정한 수가 곱해지는 경우 일정하게 곱해지는 수를 공비로 구할 수 있고, 두 항의 비로 공비를 정확히 구할 수 있음을 지도합니다.

다음은 각 항의 규칙을 찾아 등비수열의 일반항을 구하는 과정이다.

□ 안에 알맞은 숫자 또는 식을 써보자.

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 r = ar$$

$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^{\boxed{2}}$$

$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^{\boxed{3}}$$

⋮

이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = ar^{\boxed{n-1}} \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= ar^0 \\ a_2 &= ar^1 \\ a_3 &= ar^2 \\ a_4 &= ar^3 \\ &\vdots \\ a_n &= ar^{n-1} \end{aligned}$$



출처: 비상 <대수> p. 126

등비수열의 일반항

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은 $a_n = ar^{n-1}$ 이다.

지도의 주안점

등비수열의 일반항은 첫째항과 공비를 찾고, 일반항 a_n 을 식으로 표현할 수 있도록 지도합니다.

보 기

첫째항이 7, 공비가 -2 인 등비수열의 일반항 a_n 은 $a_n = 7 \times (-2)^{n-1}$ 이다.

문항2

01. 다음 등비수열의 일반항 a_n 을 구해보자.

(1) 첫째항이 6, 공비가 3

$$a_n = 6 \times 3^{n-1}$$

(2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

지도의 주안점

- (1)의 경우에는 첫째항, 공비를 각각 일반항을 구하는 식에 대입하여 구하는 방법을 예시를 통해 지도합니다.
(2)의 경우에는 첫째항, 공비를 먼저 구하도록 안내하고 (1)과 같이 문제를 해결할 수 있도록 안내합니다.

보 기

첫째항이 7, 공비가 -2인 등비수열의 제6항을 구한다면 $a_n = 7 \times (-2)^{n-1}$ 에서 $n=6$ 일 때 $a_6 = 7 \times (-2)^{6-1} = 7 \times (-32) = -224$ 이다.

첫째항이 7, 공비가 -2인 등비수열에서 448이 제 몇 항인지 알아보려면 $a_n = 7 \times (-2)^{n-1} = 448$ 이므로 $(-2)^{n-1} = 64 = (-2)^6$ 가 된다. 등식을 만족시키는 n 은 7이고, 448은 제7항이다.

02. 첫째항이 3, 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 물음에 답해보자.

(1) 제6항을 구해보자.

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1} \text{이므로 } n=6 \text{일 때 } a_6 = 3 \times (-2)^{6-1} = 3 \times (-32) = -96 \text{ 이다.}$$

(2) -384은 제 몇 항인지 구해보자.

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1} = -384 \text{이므로 } (-2)^{n-1} = -128 = (-2)^7 \text{가 된다. } n=8 \text{이므로 제8항이다.}$$

지도의 주안점

등비수열의 항의 값을 구하는 문제에서는 등비수열의 일반항에 대한 개념을 알아야 하므로, 문제해결에 어려움을 겪는 학생의 경우에는 간단한 예시를 제공하면 도움이 됩니다. 특정 숫자가 몇 번째 항인지 찾아가는 문제해결에서는 지수에 미지수가 있는 방정식의 해를 구하는 법을 알아야 합니다. 문제해결에 앞서 밑이 2인 경우 거듭제곱의 수를 정리하여 안내하면 문제해결에 도움이 됩니다. 유사 문항 예시를 통해서 문제를 해결하는 과정을 참고하도록 지도합니다.

● 오늘의 개념

등비수열

첫째항이 a , 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은 $a_n = ar^{n-1}$ 이다.

자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	😞
학습 내용	안내된 절차에 따라 등비수열의 일반항을 구할 수 있다.			
학습 태도	등비수열의 일반항을 탐구할 때 실수나 어려움이 있어도 도전하며 끈기 있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

01. 다음 수열이 등비수열일 때, 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) 1, 3, 9, 27, 81, 243, ...

(2) -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...

02. 다음 등비수열의 일반항 a_n 을 구해보자.

(1) 첫째항 3, 공비 2

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

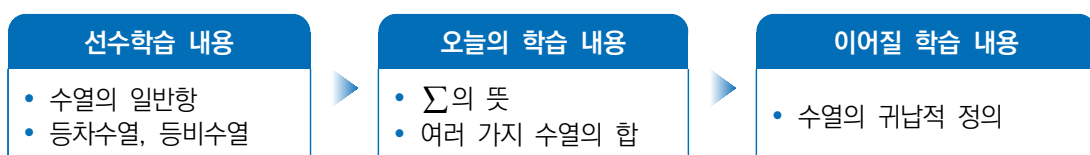
(2) 10, 5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, ...

$$a_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

프로그램 개요

과목	대수	영역	수열
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수03-04] Σ 의 뜻과 성질을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [12대수03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구하는 방법을 설명할 수 있다.		Σ 의 뜻을 안다. 안내된 절차에 따라 여러 가지 수열의 첫째항부터 특정한 항까지의 합을 구할 수 있다.	
최소성취수준 진술문	- Σ 를 사용하여 나타낸 합을 Σ 를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타낼 수 있다. - 안내된 절차에 따라 간단한 수열의 첫째항부터 특정한 항까지의 합을 구할 수 있다.		
차시 주제	여러 가지 수열의 합		
교과역량	문제해결 (O) 추론 (O) 의사소통 (O) 연결 (O) 정보처리 ()		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	- 등차수열의 일반항을 구하고 수열의 합을 기호 Σ를 이용하여 Σ를 사용하면 수열의 합을 정확히 표현할 수 있음을 발견하도록 하였다. 안내된 절차에 따라 자연수의 합을 구하는 방법을 발견하도록 하고 자연수의 합을 구하는 간단한 문제해결 과정을 완성하여 최소성취수준을 달성하도록 구성하였다. - 자연수의 합과 자연수 거듭제곱의 합을 간단히 구할 수 있도록 구성하였으나 자연수 거듭제곱의 합의 경우에는 공식에 대입하는 형태로 접근할 수 있으니 학생의 수준을 고려하여 지도하도록 한다.		
수업 전개			
도입	- 준비학습 : 수열의 일반항을 식으로 나타내고 간단한 수열의 합을 구해보면서 선수 학습 요소를 확인한다. - 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표		
전개	생각열기 활동1 - 등차수열의 합을 기호Σ로 표현하기 - 등차수열의 일반항을 구해보고, 각 항들의 합을 기호Σ로 간단히 표현하도록 지도함. 생각열기 활동2- 자연수의 합을 간단히 구하는 공식 발견하기 - 사각형의 개수를 세어 규칙을 발견하고 자연수의 합을 간단히 구하는 방법을 스스로 발견하도록 지도함.		
마무리	- 오늘의 개념 - 자기 평가 기록지 - 스스로 학습하기		

학습 연결 개념도



09

여러 가지 수열의 합



개념 흐름도



준비 학습

01. 다음 수열의 일반항 a_n 을 추측해 보시오.

(1) $\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}, \dots$

$$a_n = \frac{1}{n \times (n+1)}$$

(2) $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$

$$a_n = 2^n$$

02. 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1+3+5+7+9+11+13+15$

$$64$$

(2) $2+2^2+2^3+2^4+2^5$

$$62$$



학습 내용

학습목표

성취수준	$\sum$ 의 뜻을 안다. 안내된 절차에 따라 여러 가지 수열의 첫째항부터 특정한 항까지의 합을 구할 수 있다.
학습목표	$\sum$ 를 사용하여 나타낸 합을 $\sum$ 를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타낼 수 있다. 안내된 절차에 따라 간단한 수열의 첫째항부터 특정한 항까지의 합을 구할 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

📊 [생각열기 활동1]

다음과 같은 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

1, 3, 5, 7, ...

탐구1 | 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구해보자.

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ 이다.

탐구2 | 수열 $\{a_n\}$ 에서 39는 몇 번째 항인지 구해보자.

$a_n = 2n-1 = 39$ 를 만족시키는 n 은 20이므로 20번째 항이다.

탐구1, 탐구2에서 찾은 내용으로 위 수열의 합 $1+3+5+\dots+39$ 를 간단한 기호로 나타내기 위해 합의 기호 Σ 를 알아보자.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

은 합의 기호 Σ 를 사용하여 $\sum_{k=1}^n a_k$ 로 나타낼 수 있다. 즉,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

이다.

탐구3

$1+3+5+\cdots+39$ 는 이 수열의 첫째항부터 탐구2에서 구한 항까지의 합을 나타낸다.
 $1+3+5+\cdots+39$ 와 같은 수열의 합을 기호 Σ 를 사용하여 간단히 나타내보자.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$ 은 합의 기호 Σ 를 사용하여 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 로 나타낼 수 있다.

지도의 주안점

수열의 합을 덧셈 기호를 사용하여 나열하는 경우 더하는 부분의 중간이 생략되어 일반항이 명확하지 않아 정확한 의도를 파악하기 어려운 경우가 있음을 알게 합니다. 또한 기호 Σ 를 사용하면 일반항과 항의 개수를 표시하므로 수열의 합을 정확하게 나타낼 수 있음을 자연스럽게 이해하도록 지도합니다. 기호 Σ 에 아래 첨자와 일반항의 첨자 사이의 관계를 이해하도록 지도합니다.

참고사항

$\sum_{k=1}^n a_k$ 는 k 대신에 다른 문자를 사용하여 $\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{j=1}^n a_j, \sum_{m=1}^n a_m$ 등으로 나타내기도 한다.

보 기

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^6 (3k-2) = 1+4+7+\cdots+16$$

$$\textcircled{2} \sum_{i=3}^{10} 2^i = 2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{10}$$

문항1

다음은 기호 Σ 를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내보자.

$$(1) \sum_{k=1}^5 (3k+1)$$

$$4+7+10+13+16$$

$$(2) \sum_{j=1}^{10} j^3$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$$

지도의 주안점

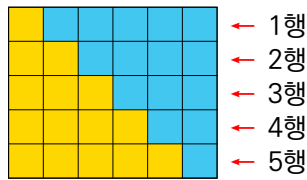
기호 Σ 의 아래 첨자가 항을 나타냄을 이해하고 각각의 항을 나열하여 합으로 표현됨을 알게 합니다. 역으로 각 항의 합을 표현하면서 기호 Σ 가 수열의 합을 간단히 나타낼 수 있어 유용한 기호임을 알도록 지도합니다.

 [생각열기 활동2]

1부터 n 까지의 자연수의 합인 $1+2+3+4+5+\cdots+n$ 을 간단히 구하는 방법을 알아보기 위해 탐구1부터 탐구3까지 해결해보자.

탐구1 | $1+2+3+4+5$ 의 값을 구해보자. 15

탐구2 | $5+4+3+2+1$ 의 값을 구해보자. 15



[그림 1]

탐구3 |

탐구1과 탐구2에서 구한 값을 비교해보자. 위 [그림1]을 참고하여 합을 간단히 구하는 방법을 찾아보고, ☐ 안에 알맞은 식을 써넣어 보자.

[그림 1]에서 1행부터 5행까지 작은 정사각형의 개수(노랑 정사각형의 개수, 파랑 정사각형 개수)로 구분하여 순서쌍으로 나타내면 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) 이다.

각 행의 정사각형의 개수는 모두 6개 다섯행이므로, 정사각형의 개수의 합은 $6 \times 5 = 30$ 이다.

이와 같은 방법으로, 1부터 n 까지의 자연수의 합을 구하면

$$\sum_{k=1}^n k = 1+2+3+4+5+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이고, ①의 우변에서 더하는 순서를 반대로 나타내면

$$\sum_{k=1}^n k = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+5+4+3+2+1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이다.

①, ②를 각 변끼리 더하면

$$2 \sum_{k=1}^n k = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ 개}} = n(n+1) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③의 양변을 2로 나누면 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

1부터 n 까지의 자연수의 합은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

자연수의 거듭제곱의 합인 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$ 을 구하는 식을 일정한 과정(참고)에 따라 간단하게 정리하면

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 이다.}$$

(참고)

1부터 n 까지 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^n k^2$ 을 구해보자.

항등식 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ 에 $k=1, 2, 3, \dots, n$ 을 차례로 대입하면

$$k=1 \text{ 일 때, } 2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$k=2 \text{ 일 때, } 3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$k=3 \text{ 일 때, } 4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$

$$\vdots$$

$$k=n \text{ 일 때, } (n+1)^3 - n^3 = 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$$

이다. 이때 위의 n 개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } 3 \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이다.

자연수의 합과 자연수 거듭제곱의 합

$$(1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

보 기

$$\textcircled{1} 1+2+3+4+5+6 = \sum_{k=1}^6 k = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

$$\textcircled{2} 1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

지도의 주안점

탐구1, 탐구2를 통해 자연수의 합을 구하는 과정을 이해하고 탐구3을 통해 자연수의 합을 구하는 공식 유도 과정을 자연스럽게 이해하도록 지도합니다. 자연수 거듭제곱의 합은 학생에게 다소 어려운 내용일 수 있어 학생의 수준을 고려하여 몇 가지 예시를 통하여 이해하도록 지도합니다.

문항2

다음 식의 값을 구해보자.

(1) $1+2+3+\cdots+20$

$$\frac{20 \times 21}{2} = 210$$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2$

$$\frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 650$$

지도의 주안점

자연수의 합과 거듭제곱의 합을 공식을 참고하여 간단히 문제를 해결할 수 있도록 안내합니다.

정리 학습

● 오늘의 개념

1. 수열의 합 Σ

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 기호 Σ 를 사용하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \boxed{\sum_{k=1}^n a_k} \text{와 같이 나타낸다.}$$

2. 여러 가지 수열의 합

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{\boxed{n(n+1)}}{\boxed{2}}$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	😞
학습 내용	$\sum$ 의 뜻을 안다.			
	안내된 절차에 따라 여러 가지 수열의 첫째항부터 특정한 항까지의 합을 구할 수 있다.			
학습 태도	$\sum$ 의 뜻을 알고 수열의 합을 구하는 과정을 탐구할 때 실수나 어려움이 있어도 도전하며 끈기 있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

01. 다음을 기호 $\sum$ 를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내보자.

$$(1) \sum_{k=1}^5 (2k+1)$$

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11$$

$$(2) \sum_{k=1}^5 (k+1)^2$$

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

02. 다음 식의 값을 구해보자.

$$(1) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$\frac{10 \times 11}{2} = 55$$

$$(2) 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55$$

수열의 귀납적 정의

프로그램 개요

과목	대수	영역	수열
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	

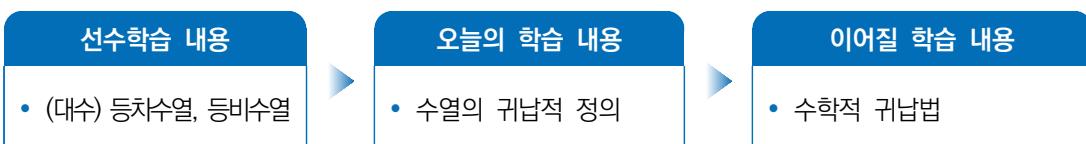
[12대수03-06] 수열의 귀납적 정의를 설명할 수 있다. 수열의 귀납적 정의를 안다.

최소성취수준 진술문	- 안내된 절차에 따라 귀납적으로 정의된 간단한 수열의 특정한 항을 구할 수 있다. - 간단한 예를 통해 수열에 관심을 가진다.
차시 주제	수열의 귀납적 정의
교과역량	문제해결 (O) 추론 (O) 의사소통 () 연결 () 정보처리 (O)
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	• 안내된 절차에 따라 이웃하는 항 사이의 관계식의 일부를 완성하고, 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의를 발견하도록 하고 간단한 문제해결 과정의 일부를 완성하여 최소 성취수준을 달성하도록 하였다. • 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의를 이해하고 관계식을 발견할 수 있도록 지도한다.

수업 전개

도입	• 준비학습 : 등차수열, 등비수열의 일반항을 구해보고, n항과 $(n+1)$항 사이의 관계를 찾는 문제해결을 통해 선수학습 요소를 확인한다. • 오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표
전개	• 생각열기 활동1 - 수열의 귀납적 정의 발견하기 - 삼각형을 일정한 규칙에 따라 잘랐을 때 남겨진 삼각형의 개수를 통하여 이웃하는 항 사이의 관계를 발견하도록 함. • 생각열기 활동2 - 등차수열, 등비수열에서 수열의 귀납적 정의 발견하기 - 등차수열 등비수열의 귀납적 정의를 찾아 비교해보고 수열의 귀납적 정의로 관계식을 발견해보도록 지도함.
마무리	• 오늘의 개념 • 자기 평가 기록지 • 스스로 학습하기

학습 연결 개념도



10

수열의 귀납적 정의



개념 흐름도



준비 학습

01. 다음 수열의 일반항 a_n 을 구해보자.

(1) 첫째항이 5, 공차가 2인 등차수열

$$a_n = 2n + 3$$

(2) 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열

$$a_n = 4 \times 3^{n-1}$$

02. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 다음과 같을 때, a_{n+1} 을 구해보자.

(1) $a_n = n^2$

$$a_{n+1} = (n+1)^2$$

(2) $a_n = \frac{n}{n+1}$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$



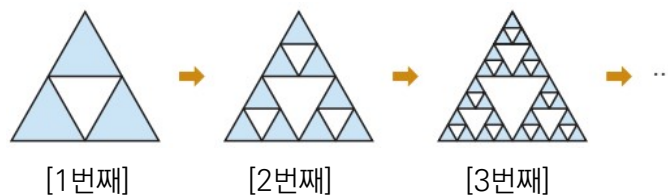
학습 내용

학습목표

성취수준	수열의 귀납적 정의를 안다.
학습목표	안내된 절차에 따라 귀납적으로 정의된 간단한 수열의 특정한 항을 구할 수 있다.

오늘의 배움, 내가 쓰는 배움 목표

📅 [생각열기 활동1]



 출처: 비상 <대수> p. 145

그림과 같이 정삼각형 모양의 종이의 각 변의 중점을 이어서 만든 삼각형 중에서 한가운데 정삼각형을 오려 낸다. 남아 있는 종이에서 같은 방법으로 각각의 한가운데 정삼각형을 오려 낸다. 이와 같은 과정을 n 번 반복할 때, n 번째에 남아 있는 정삼각형 모양 종이의 개수를 a_n 이라고 하면 $a_1 = 30$ 이다.

이때 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하는 과정이다. ()와 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) $a_2 = (\text{ 9 })$

(2) $a_3 = (\text{ 27 })$

(3) $a_2 = \text{ 3 } \times a_1$ 이고 $a_3 = \text{ 3 } \times a_2$ 이므로 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식은 $a_{n+1} = \text{ 3 } \times a_n$ 이다.

지도의 주안점

수열의 귀납적 정의는 첫째항과 이웃하는 항들 사이의 관계를 이용하여 수열의 모든 항을 정의함을 생각하기 활동을 통해 직관적으로 이해하도록 안내합니다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$ 을

① 첫째항 a_1 의 값

② 두 항 a_n, a_{n+1} 사이의 관계식 ($n=1, 2, 3, \dots$)

과 같이 정의할 수 있다.

이와 같이 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다.

문항1

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 제3항을 구하시오.

(1) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 4$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

$$a_3 = 11$$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

$$a_3 = 9$$

지도의 주안점

n 에 자연수를 차례로 대입하여 수열의 항을 구할 수 있음을 이해하도록 지도합니다.

[생각하기 활동2]

귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 규칙성을 찾아 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3$ ($n=1, 2, 3, \dots$)과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4,$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7,$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 7 + 3 = 10,$$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 4, 7, 10, ...이다.

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3$ 인 수열은 첫째항이 1 이고, 공차가 3 인 등차수열이다.

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 4a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_2 = 4a_1 = 4 \times 1 = 4,$$

$$a_3 = 4a_2 = 4 \times 4 = 16,$$

$$a_4 = 4a_3 = 4 \times 16 = 64,$$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 4, 16, 64, ...이다.

$a_1 = 1, a_{n+1} = 4a_n$ 인 수열은 첫째항이 1이고, 공비가 4인 등비수열이다.

지도의 주안점

첫째항과 이웃하는 항들 사이의 관계를 단계적으로 보여주면서 두 항 사이의 관계식에서 공통점을 찾도록 지도합니다.

등차수열의 귀납적 정의

① $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)와 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열이다.

등비수열의 귀납적 정의

② $a_1 = a, a_{n+1} = ra_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열이다.

문항2

다음 수열을 귀납적으로 정의할 때, 빈칸에 알맞은 숫자를 써보자.

(1) 등차수열 3, 5, 7, 9, ... 은

첫째항이 3이고, 공차가 2인 등차수열이므로 $a_1 = \text{3}$, $a_{n+1} = a_n + \text{2}$ 이다.

(2) 등비수열 1, 5, 25, 125, ... 은

첫째항이 1이고, 공비가 5인 등비수열이므로 $a_1 = \text{1}$, $a_{n+1} = \text{5} \times a_n$ 이다.

지도의 주안점

등차수열의 귀납적 정의에서는 $5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 2$ 로 공차를 정의하듯이 이웃하는 두 항 사이의 차가 공차로 일정하고, $a_2 = a_1 + 2, a_3 = a_2 + 2, a_4 = a_3 + 2$ 와 같이 관계식을 표현할 수 있음을 직관적으로 이해하도록 안내합니다. 이를 일반화하여 $a_{n+1} = a_n + d$ 로 나타냄을 이해하도록 지도합니다.

등비수열도 마찬가지로, $\frac{5}{1} = \frac{25}{5} = \frac{125}{25} = 5$ 로 공비를 정의하듯이 이웃하는 두 항 사이의 비가 공비로 일정하고, $a_2 = 5 \times a_1, a_3 = 5 \times a_2, a_4 = 5 \times a_3$ 와 같이 관계식을 표현하고 일반화하여 $a_{n+1} = r \times a_n$ 으로 나타냄을 이해하도록 지도합니다.

● 오늘의 개념

- 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의** 라고 한다.
- 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의
 - $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)와 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 **a** , 공차가 **d** 인 등차수열이다.
 - $a_1 = a, a_{n+1} = ra_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 **a** , 공비가 **r** 인 등비수열이다.

자기 평가 기록지

영역	평가 항목	😊	😐	😞
학습 내용	수열의 귀납적 정의를 안다.			
학습 태도	수열의 귀납적 정의를 알고 수열의 규칙성을 탐구할 때 실수나 어려움이 있어도 도전하며 끈기 있는 태도로 학습하였다.			

스스로 학습하기

01. 수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의가 다음과 같을 때, 첫째항부터 제5항까지를 나열해보자.

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 4a_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

1, 5, 21, 85, 341

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n - 5$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

1, -4, -9, -14, -19

02. 다음 수열을 귀납적으로 정의해보자.

(1) 등차수열 2, 7, 12, 17, ...

$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 5$

(2) 등비수열 4, 12, 36, 108, ...

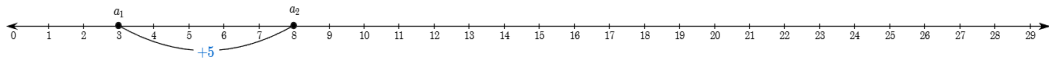
$a_1 = 4, a_{n+1} = 3a_n$

기초학력 진단을 위한 도움자료

1. 첫째항이 3, 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 물음에 답해보자.

(1) 등차수열 $\{a_n\}$ 의 a_1, a_2 값을 수직선 위의 점으로 표시하였다.

수열 a_3, a_4, a_5 를 위 수직선에 나타내고, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 제5항을 구해보자.



(2) a_1 과 a_2 를 관계식으로 나타내면 $a_2 = a_1 + (\quad)$

a_2 와 a_3 를 관계식으로 나타내면 $a_3 = a_2 + (\quad) = a_1 + 2 \times (\quad)$

a_3 와 a_4 를 관계식으로 나타내면 $a_4 = a_3 + (\quad) = a_1 + 3 \times (\quad)$

($\quad$) 안에 공통으로 들어갈 알맞은 값을 구해보자.

(3) 등차수열의 일반항 $\{a_n\}$ 을 구해보자.

정답: (1) $a_5 = 23$ (2) 5 (3) $a_n = 5n - 2$



수열 단원의 최소수행능력을 효과적으로 측정하기 위해 수직선 모델을 활용한 문항 출제는 매우 유용합니다. 학생들이 수열의 규칙성을 발견하고 각 항의 값을 찾도록 돕기 위해, 문항을 다음과 같이 구성할 수 있습니다.

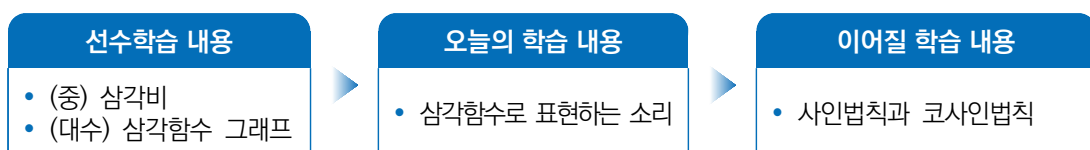
- 수직선 위에 수열의 각 항의 값을 시각적으로 나타내도록 안내하여, 학생 스스로 각 항의 위치와 값의 변화를 파악하도록 유도합니다. 이러한 시각적 표현은 항들 사이의 간격이나 변화의 패턴을 직관적으로 이해하게 하여 수열의 규칙성을 자연스럽게 발견하는 데 도움을 줍니다.
- 관계식을 도출하면서 수열의 귀납적 정의에 대한 이해도를 판단할 수 있으며 이전항과 다음항 사이의 관계식의 의미를 수직선 모델에서 찾도록 안내할 수 있습니다. 위 문제는 등차수열이지만, 등비수열을 발견하는 문제로 응용이 가능합니다. 단순히 답을 구하는 것보다 안내된 절차를 통해 수직선 상에서 발견한 규칙을 바탕으로 일반항을 유도하도록 함으로써 학생의 사고 과정을 측정하고 학생들이 어떤 부분에서 혼동하는 지 발견할 수도 있습니다.

함께하는 수학 활동지- 삼각함수로 표현하는 소리

프로그램 개요

과목	대수	영역	삼각함수
성취기준		성취기준별 성취수준(E)	
[12대수02-02] 삼각함수의 개념을 이해하여 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그리고, 그 성질을 설명할 수 있다.		안내된 절차에 따라 간단한 사인함수, 코사인함수 또는 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.	
최소성취수준 진술문	- 안내된 절차에 따라 간단한 사인함수, 코사인함수 또는 탄젠트함수의 그래프의 일부를 그릴 수 있다. - 간단한 예를 통해 삼각함수에 관심을 가진다.		
차시 주제	삼각함수로 표현하는 소리		
교과역량	문제해결 () 추론 (O) 의사소통 () 연결 (O) 정보처리 ()		
프로그램 개발 방향 및 활용시 고려사항	• 소리를 녹음하고 그래프로 나타내며, 그 그래프가 삼각함수 그래프와 닮아 있음을 관찰하여 음성인식 AI에서 삼각함수가 활용되는 이유를 이해하도록 한다. • 학생들이 소리 파형과 삼각함수 그래프를 비교하며 소리를 삼각함수로 표현할 수 있음을 직관적으로 이해하도록 한다. • 음성인식 AI 영상을 시청하여 소리의 세 가지 요소와 인공지능 기술을 연결하고, 실생활에서의 활용성을 느낄 수 있도록 지도한다.		
수업 전개			
도입	• 준비학습 : 삼각함수의 기본 그래프(사인, 코사인, 탄젠트) 형태를 확인한다. • 활동목표 확인		
전개	• 활동 1. 소리 녹음하고 그래프 보기 - 소리 편집 앱을 활용해 소리를 녹음하고 자동으로 나타나는 그래프를 확인한다. - 학생들이 다양한 높낮이와 크기의 소리를 녹음하여, 소리와 그래프의 관계를 직관적으로 이해하도록 지도한다. 2. 그래프 비교하기 - 다른 학생의 소리 그래프와 비교하여 공통적으로 반복되는 모양이나 특징을 찾는다. - 반복되는 모양을 확인하며 주기의 개념을 자연스럽게 이해하도록 지도한다. 3. 삼각함수 그래프와 비교하기 - 녹음된 소리 그래프와 사인함수 그래프를 비교하며 모양이 비슷함을 관찰하고 제시된 질문에 답한다. - 소리 그래프와 사인함수 그래프의 형태가 어떻게 닮아 있는지 질문하여 소리를 삼각함수로 표현할 수 있음을 이해하도록 지도한다. • 영상 시청 - 음성인식 AI가 소리를 이해하는 과정을 다룬 영상을 시청하며 소리의 세 가지 요소와 음성인식 AI가 사용자의 말을 알아듣는 과정을 이해한다. - 소리의 세 가지 요소의 의미와 수학적 표현, 음성인식 과정에 대해 학생들이 스스로 정리하도록 질문하고, 인공지능 기술과 실생활 활용성을 연결해 생각해 보도록 지도한다.		
마무리	• 오늘의 마무리 - 생성형 AI를 활용하여 음성인식 AI 관련 직업을 탐색하고, 해당 직업의 역할을 조사한 뒤 본인의 진로와 연계될 수 있는 부분을 생각해 본다.		

학습 연결 개념도



삼각함수로 표현하는 소리

학번 :

이름 :

모둠명 :

- **교과서 성취기준** : 삼각함수의 개념을 이해하여 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그리고, 그 성질을 설명할 수 있다.
- **오늘의 활동목표**
 1. 함께하는 수학 : 소리를 그래프로 나타내고, 이 그래프가 삼각함수 그래프로 표현될 수 있음을 이해한다. 이를 통해 음성인식 AI가 소리를 해석할 때 삼각함수가 왜 필요한지 이해할 수 있다.
 2. 살펴보는 수학 : 소리의 세 가지 요소와 음성인식 AI가 사람의 말을 이해하는 과정을 이해할 수 있다.
- **활동 방법**

단계1. 소리 녹음하고 그래프 보기- 소리 편집 앱으로 소리를 녹음하면 앱에서 바로 소리 그래프가 나온다.

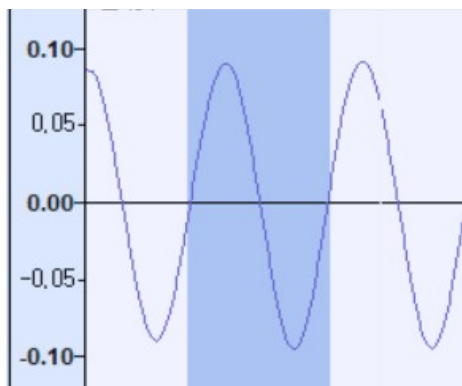
단계2. 그래프 비교하기- 다른 사람의 소리 그래프와 비교하며 모양이 비슷한지 확인한다.

단계3. 삼각함수 그래프와 비교하기

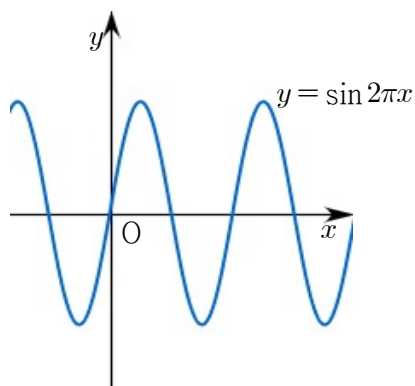
[그림 1]은 녹음한 소리를 나타낸 그래프의 일부이다.

[그림 2]는 삼각함수($y = \sin 2\pi x$) 그래프의 일부이다.

두 그래프를 비교하고 다음 질문에 답해 보자.



[그림 1]



[그림 2]

지도의 주안점

- 소리 녹음 앱을 활용할 때 아이패드나 갤럭시 탭 등의 기본 녹음 앱은 소리 그래프의 확대 기능이 제한적이므로, PC 기반 소리 편집 프로그램(Audacity 등)을 사전에 설치하고 환경을 세팅해 둡니다.
- 학생 개별 녹음이 어려운 경우를 대비하여 교사가 미리 녹음한 예시 소리 데이터를 준비하고, 이를 활동에 활용하도록 합니다.

- 일부 학생은 자신이 녹음한 소리의 그래프가 너무 복잡해 삼각함수와 연결되지 않는다고 생각할 수도 있습니다. 이때 그래프 확대 기능을 활용해 비교적 규칙적인 구간을 직접 선택하게 한 뒤, 사인함수 그래프와 비교하도록 유도합니다.
- “어떤 부분이 반복되는가?”, “높낮이가 의미하는 것은 무엇인가?”와 같은 질문을 통해 학생이 주기와 진폭의 의미를 이해하도록 지도합니다.

질문 1. 두 그래프에서 공통적으로 보이는 특징을 이야기해 보자.

(풀이 및 답) 두 그래프 모두 같은 모양이 주기적으로 반복된다.

질문 2. 두 그래프에서 같은 모양이 반복된다. 이를 무엇이라고 하는지 적어 보자.

(풀이 및 답) 주기

질문 3. 다음 문장의 ()안에 알맞은 말을 적어 보자.

소리는 () 함수의 그래프로 나타낼 수 있다.

(풀이 및 답) 삼각

소리를 녹음해 그래프로 나타낸 것처럼, 음성인식 AI도 사람의 목소리를 소리의 파형으로 바꾼 뒤 그 특징을 분석해 말의 의미를 이해한다.

다음 영상을 보고 소리의 요소와 AI가 소리를 이해하는 원리를 알아보자.



[인공지능 스피커는 어떻게 내 말을 알아들을까? 음성인식 AI 기술에 대해 아는척 해보자!, 국가과학기술연구회]

<https://youtu.be/ggA9mV3YEDI?si=HbZxMEoM8vEhAmwe>

지도의 주안점

- 수업 시간에 영상을 함께 시청한 뒤, 학생들에게 영상 링크를 제공하여 이해가 부족한 부분이나 다시 보고 싶은 장면을 개별적으로 반복 시청할 수 있도록 지도합니다.
- 학생들이 영상을 다시 보며 핵심 내용을 스스로 정리하고, 표 완성이나 답안 작성 과정에서 필요한 부분을 보충할 수 있도록 안내합니다.

질문 4. 소리의 세 가지 요소를 정리해 보자.

소리의 요소	수학적 표현	의미
소리의 세기		
소리의 높낮이		
소리의 맵시		

(풀이 및 답)

소리의 요소	수학적 표현	의미
소리의 세기	파동의 진폭	소리의 크기가 크다는 것은 진폭이 크다는 것
소리의 높낮이	파동의 진동수	음이 높다는 것은 파동의 주파수가 높다는 것
소리의 맵시	파동의 형태	소리의 느낌, 말투 차이 등

질문 5. 서로 다른 두 사람이 같은 단어를 같은 크기와 같은 음으로 말해도 다르게 들리는 이유를 설명해 보자.

(풀이 및 답) 소리의 맵시 즉 파형이 다르기 때문이다. 같은 단어라도 발음하는 사람의 발성 습관, 입 모양, 성대 진동 방식이 달라 파형이 다르게 나타난다.

질문 6. 영상을 보고 음성인식 AI가 사용자의 말을 알아듣는 과정을 설명해 보자.

(풀이 및 답)

사람의 목소리가 마이크의 진동판을 움직인다.

진동판과 연결된 코일이 자석 주변을 움직이면서 미세한 전류를 발생시킨다.

이 전류의 흐름을 디지털 신호(소리의 파형)로 변환해 기록한다.

음성인식 AI가 데이터를 학습하고, 음성의 파형을 패턴 분석한다.

음절 단위로 분석한 결과를 문법, 문맥 분석을 거쳐 완전한 문장으로 만든다.

이렇게 음성인식 AI가 사용자의 말을 이해하고 반응할 수 있게 된다.

오늘의 마무리

1. 오늘 활동과 영상을 보고 느낀 점, 새롭게 알게 된 점, 더 알고 싶은 부분을 자유롭게 적어 보자.
2. 오늘 살펴본 음성인식 AI의 원리는 다양한 직업 분야에서 활용된다. 생성형 AI를 활용하여 음성인식 AI와 관련된 직업을 찾아보고, 그 직업에서 하는 일을 조사한 뒤, 본인이 관심 있는 진로와 연결되는 부분이 있는지 생각해 보자.

(풀이 및 답) 자동차 음성 인식 시스템 개발자

항목	조사 내용
관련학과	컴퓨터공학과, 전자공학과, 소프트웨어 공학과, 인공지능학과
하는 일	자동차 안에서 운전자의 음성을 인식하고 명령을 수행하는 시스템을 개발함. 내비게이션, 차량 제어(에어컨·창문), 스마트폰 연동 등 다양한 기능을 음성으로 제어할 수 있도록 인공지능 알고리즘을 설계하고 최적화함
핵심 능력	음성 인식·신호 처리 기술, 인공지능·머신러닝 알고리즘 개발 능력, 프로그래밍 언어 숙련도, 데이터 분석 능력
적성 및 흥미	인공지능 기술, 자동차 전자장치, 자율주행 분야에 관심이 있고, 문제해결과 창의적인 아이디어 구현을 좋아하는 학생
직업 전망	자율주행차, 커넥티드카 시장 확대와 함께 차량 내 음성 비서 시스템 수요가 빠르게 증가하여 미래 성장 가능성이 매우 높음

지도의 주안점

- 학생들이 생성형 AI 도구를 활용해 음성인식 AI 관련 직업(예: 자동차 음성 인식 시스템 개발자)을 직접 검색하고 조사하도록 합니다.
- 조사 항목(관련 학과, 하는 일, 핵심 능력, 적성·흥미, 직업 전망)을 제시하고 학생들이 스스로 탐색할 수 있도록 지도합니다.
- 조사 결과를 발표하도록 하여 삼각함수 학습이 음성인식 기술 개발과 진로 탐색에 어떻게 활용되는지를 구체적으로 이해할 수 있도록 지도합니다.

프로그램 활동에 대한 피드백

학생 활동 예상 답안/반응

?? 질문 1

- 학생들이 녹음 후 파형이 나타나는 것을 흥미로워하지만, 두 그래프에서 반복되는 모양(주기적 특징)을 스스로 찾아내지 못할 수 있음.
- 이때 그래프의 전체 모양보다 일정하게 반복되는 구간을 확대해 관찰하게 하여, 사인함수와 유사한 ‘주기적 반복’의 특징을 인식하도록 지도할 수 있음.

?? 질문 2

- 학생들이 그래프에서 반복되는 모양을 관찰하더라도, 그것을 ‘주기’라는 용어와 연결하지 못할 수 있음.
- “같은 모양이 얼마마다 반복되니?”, “그 간격을 뭐라고 부르면 좋을까?”와 같은 발문을 통해 ‘주기’라는 수학 용어로 연결하도록 지도할 수 있음.

?? 질문 3

- 학생들이 소리 그래프와 사인함수의 모양이 닮았다는 점은 인식하지만, 이 그래프를 ‘삼각함수’로 표현할 수 있다는 수학적 일반화까지는 연결하지 못할 수 있음.
- “소리처럼 반복되는 현상을 나타낼 때 어떤 함수가 쓰일까?”와 같은 발문을 통해 소리를 삼각함수로 표현할 수 있음을 스스로 깨닫도록 지도할 수 있음.

?? 질문 4

- 학생들이 영상을 시청하면서 소리의 세 가지 요소를 구분하지 못하거나, ‘진폭-진동수-파동의 형태’의 수학적 표현을 혼동할 수 있음.
- 영상을 함께 본 뒤, 해당 장면을 다시 시청하게 하여 각 요소의 수학적 표현과 의미를 확인하도록 지도하고, 표를 완성하면서 세 가지 요소의 차이를 스스로 정리하도록 유도함.

?? 질문 5

- 학생들이 두 사람의 목소리가 다르게 들리는 이유를 단순히 ‘목소리 크기’나 ‘음 높이’의 차이로 생각할 수 있음.
- 영상의 해당 장면을 다시 시청하게 하여, 같은 단어라도 발성 습관, 입 모양, 성대 진동 방식에 따라 파형(소리의 맵시)이 달라진다는 점을 함께 확인하며, ‘소리의 맵시’가 사람마다 다르게 나타나는 이유를 구체적으로 이해하도록 지도함.

?? 질문6

- 학생들이 음성인식 AI의 작동 과정을 이해하거나 서술하는 데 어려움을 겪을 수 있음.
- 해당 부분의 영상을 함께 시청하며 주요 단계(소리가 전류로 변환되는 과정 → AI가 파형을 분석하는 과정 → 문장으로 인식하는 과정)를 그림이나 순서 정리 형식으로 시각화하도록 지도함.
- 영상 시청 후 “사람의 목소리가 기계가 이해할 수 있는 신호로 바뀌는 과정이 뭐였지?”와 같은 발문을 활용하여 핵심 단계를 다시 떠올리게 하고, 학생이 문장 대신 핵심 키워드(소리 → 디지털 신호 → 데이터 학습 → AI 이해) 중심으로 정리하도록 유도함.

👍 지도 TIP

Q. 학생들이 소리를 삼각함수로 표현하는 개념을 어려워할 때는 어떻게 지도하면 좋을까요?

A. 시각화 전략 활용: 소리 그래프 전체가 아닌 짧고 규칙적인 구간을 확대해 비교하게 함으로써, 학생들이 직접 관찰하며 사인함수와의 유사성을 발견할 수 있도록 지도합니다.

개념 연결 강조: 학생들은 녹음 후 파형이 바로 나타나는 것에 흥미를 보이지만, 그래프의 반복되는 모양(주기)에 담긴 수학적 의미를 스스로 연결하는 데 어려움을 느낄 수 있습니다.

이때 실제 소리는 매우 복잡한 파동이며, 이러한 복잡한 파동은 서로 다른 주기를 가진 삼각함수의 합으로 나타낼 수 있음을 간단히 소개하여 수학 개념이 실생활과 연결됨을 인식하도록 지도합니다.

추가 참고 자료 제시: 과학기술정보통신부 블로그, 「내 목소리만 인식하는 AI 스피커의 원리」
https://blog.naver.com/with_msip/221827565096

세부능력 및 특기사항 작성 예시

1. 소리 녹음 활동에 적극적으로 참여하며 여러 사람의 소리 그래프를 비교해 모양은 달라도 비슷한 패턴이 반복된다는 점을 발견하고, 이를 주기라는 용어로 표현함. 소리의 세기, 높낮이, 맵시를 표로 정리하며 진폭, 진동수, 파형의 형태와 대응시켜 정보를 분류함. 영상 학습 후에는 음성인식 AI의 작동 과정을 단계별로 간단한 문장으로 정리하며, 소리의 파형 분석과 수업에서 다룬 삼각함수 개념을 연결하려는 시도가 점차 자연스러워짐.
2. 소리 녹음 활동에 꾸준히 참여하며 다른 사람의 소리 그래프와 자신의 그래프를 비교함. 처음에는 그래프 해석에 다소 어려움을 보였으나, 반복되는 모양이 나타난다는 점을 발견하고 이를 주기라는 개념과 연결해 표현함. 소리의 세기, 높낮이, 맵시를 표로 정리하며 각각이 그래프의 특징과 관련 있음을 설명함. 영상 학습 후에는 음성인식 AI가 소리를 파형으로 바꾼 뒤 분석한다는 과정을 간단히 정리하고, 수업에서 다룬 삼각함수 그래프가 이러한 분석에 활용된다는 점을 이해하려는 모습을 보임.
3. 수업에 성실하게 참여하며 주어진 활동을 끝까지 수행하려는 태도가 안정적으로 보임. 소리 녹음 활동에서 그래프가 복잡하다고 어려움을 보였으나, 그래프를 확대해 반복되는 부분을 직접 표시하며 차분히 관찰함. 이후 소리 그래프와 사인함수 그래프를 비교하며 비슷한 모양이 반복된다는 점을 말로 설명하고 이를 주기의 개념과 연결함. 영상 시청 후에는 음성인식 AI가 소리를 파형으로 바꾼 뒤 분석한다는 과정을 순서대로 정리하며, 수업에서 배운 삼각함수가 실제 기술에 활용됨을 인식하는 모습이 인상 깊었음.

정서 회복과 학습 성장 프로그램: 「수학과 나, 다시 연결하기」

1 1~3차시 프로그램 개발 방향 및 활용 시 고려사항

1) 프로그램 개발 방향

- **정서적 회복 지원:** 학생 개인의 수학 경험과 감정을 존중하며, 부정적인 경험도 안전하게 표현할 수 있도록 하여 정서적 회복을 돕는 활동이다.
- **학습 동기 진단 및 성장 촉진:** 일반 학습과 수학 학습의 학습 동기를 점검하고 비교하여 학습 태도 변화와 자기 성찰을 촉진하기 위한 활동이다.
- **공유와 공감:** 또래 간 경험을 공유하며 공감대를 형성하고, 긍정적인 사회적 지지를 형성하기 위한 활동이다.
- **개별 피드백 강화:** 교사와 친구의 피드백을 바탕으로 학습 계획을 현실적으로 수정·보완하며, 학생이 자기 주도적으로 성장할 수 있도록 지원하는 활동이다.

2) 활용 시 고려 사항

- **운영의 유연성:** 1~3차시 전체를 모두 운영할 수도 있고, 학교 상황과 필요에 따라 1~2차시만 선택하여 운영할 수도 있다. 활동 순서와 방법은 상황에 맞게 재구성하여 유연하게 적용한다.
- **중점 차시 선택:** 정서적 회복이 필요한 경우 1차시, 학습 태도 개선이 필요한 경우 2·3차시에 중점을 두고 운영한다.
- **진로 연계 활동:** 진로 교육이 필요한 경우 3차시에서 수학 활용 직업 탐색 활동을 추가하여 운영할 수 있다.
- **피드백:** 교사는 개별 피드백을 통해 학생이 자신의 학습 경험을 긍정적으로 재구성할 수 있도록 돕는다.

3) 해설 및 차시 개요

- 본 프로그램은 1~3차시에 걸쳐 수학에 대한 정서 탐색 → 동기 진단 → 학습 습관 개선의 구조로 구성하였다.
- 각 차시는 활동지 기반의 말하기-쓰기-나눔 중심 구조로 설계되었으며, 교사는 과정 중심 피드백을 통해 학생의 정서적 안전을 보장한다.
- 학교 상황에 따라 차시를 부분 운영할 수 있도록 운영의 유연성을 반영하였고, 진로 연계가 필요한 경우 3차시에서 직업 탐색 활동을 추가할 수 있도록 설계하였다.

차시	차시 개요
01. 나의 수학 이야기(정서적 회복 및 공감 형성)	학생 개인의 수학 경험과 감정을 안전하게 표현하며 정서적 회복을 돕는 차시이다. '수학 경험 빙고'를 통해 감정과 경험 어휘를 탐색하고, 선택한 단어 2개의 이유를 작성한다. 짝과 공유하며 공감 질문을 주고받고, '수학에게 보내는 엽서' 활동을 통해 미래지향적 다짐으로 마무리한다. 부정적인 감정은 평가하지 않고 그대로 수용하도록 지도한다.
02. 나의 수학 학습 동기 점검(학습 동기 진단 및 자기 성찰)	일반 학습과 수학 학습의 동기를 구분하여 살펴보고, 학습 동기를 높이는 요인과 방해 요인을 탐색하는 차시이다. 학습 동기를 높이는 방법과 방해 요인을 줄이는 방법을 고민하고 교사의 개별 피드백을 통해 현실적이고 구체적인 실천 전략을 세운다. '과정 중심 피드백'과 '개방형 질문'을 통해 내적 동기와 외적 동기를 연결하도록 지도한다.
03. 나의 수학 학습 습관 되돌아보기(실천 계획 수립 및 자기주도성 강화)	자신의 공부 습관을 점검하고, 공부를 방해하는 습관의 원인을 분석하며 구체적인 개선 계획을 세우는 차시이다. 바꾸고 싶은 습관을 중심으로 실천 가능한 방법을 구상하고, 친구 및 교사의 피드백을 통해 계획을 구체화하고 보완한다. '과정 중심 칭찬 → 구체화 질문 → 작은 목표 제안'의 순서로 지도하여 자기주도적 변화 의지를 강화한다.

1차시 프로그램 개요

차시 주제	나의 수학 이야기
프로그램 개발 방향 및 활용 시 고려사항	• 학생 개인의 수학 경험과 감정을 존중하며 정서적 회복을 돕기 위한 활동이다. • ‘수학 경험 빙고’를 통해 학생들이 수학에 대한 감정을 탐색하고, 편안한 분위기에서 경험을 나누도록 지도한다. • 빙고에서 선택한 단어 중 두 개를 골라 그 이유를 글로 작성하고 친구와 공유하며 공감대를 형성할 수 있도록 지도한다. • 1차시 전체를 다 못 하는 경우 수학 경험 빙고와 수학에게 보내는 엽서 쓰기까지만 해도 된다.
수업 전개	
도입	• 활동목표 확인 • 정답 없는 활동임을 강조해 학생들이 자유롭게 작성할 수 있는 분위기 조성
전개	• 수학 경험 빙고 - 학생들이 빙고판에 자신과 관련 있는 단어를 적고 게임을 진행한다. - 예시 단어 외에 추가 단어 1개까지 가능하게 하여 개방적 분위기를 조성한다. - 포기, 좌절과 같이 부정적인 단어가 많이 나와도 평가하지 말고 감정 그대로 수용한다. - 선택을 어려워하는 학생에게는 교사가 단어에 맞는 경험 상황을 예시로 들어주어 선택할 수 있도록 도와준다. • 내가 고른 단어 이야기 - 학생이 선택한 단어 중 2개를 고르고, 그 이유를 간단히 적는다. - 이유 쓰기를 어려워하는 학생은 먼저 말로 선택한 이유를 표현하게 한 뒤 교사가 키워드로 정리해 주어 이유 작성하는 것을 도와준다. • 짝과 이야기 나누기 & 발표 - 짝끼리 선택한 단어와 이유를 이야기 나누고 희망자 중심으로 발표한다. - “그때 어떤 기분이었어?”, “혹시 비슷한 경험 있는 친구 있어?”와 같은 공감형 질문을 활용하며 지도한다. • 수학에게 보내는 엽서 - 학생이 수학에게 엽서를 쓰며 솔직한 감정을 표현하게 한다. - 부정적인 메시지가 나와도 그대로 받아들이고, 마지막에 미래지향적 다짐 문장으로 마무리하도록 한다.
마무리	• 오늘의 활동 정리 - 오늘 활동에서 느낀 점이나 앞으로 바라는 점을 한 줄로 작성하게 한다. - 글쓰기를 어려워하는 학생은 먼저 말로 표현하게 한 뒤, 키워드로 정리해 준다. - 시간 부족 시 한 줄 정리 대신 말로 간단히 공유하게 해도 무방하다.

1차시 나의 수학 이야기

이번 시간에는 내가 수학과 어떤 시간을 보내왔는지, 그때 어떤 기분이었는지를 돌아봅니다.

즐거웠던 순간, 어려웠던 순간, 그리고 지금 내가 수학에게 하고 싶은 이야기를 해 봅시다.

오늘의 활동목표

1. 내가 수학과 어떤 관계를 맺어왔는지 돌아본다.
2. 수학에 대한 나의 감정과 경험을 표현해 본다.
3. 친구들의 이야기를 듣고 공감하며 서로의 경험을 이해한다.

■ 활동 1. 수학 경험 빙고

다음은 수학과 관련된 여러 가지 단어를 모아 놓은 것입니다.

자신과 관련된 단어를 적절히 골라 4×4 빙고 게임을 해 보세요.

특별 찬스로 예시에 없더라도 나의 수학 경험과 관련된 단어를 한 가지 넣어도 좋습니다.

1) 수학과 관련된 감정 단어

자신감	포기	성취감	두려움	좌절
기대	집중	답답함	지루함	재밌음

2) 수학과 관련된 용어

정답	실수	질문	문제집	칠판
공식	시험	방정식	약수	그래프

●● 수학 빙고판 ●●

지도의 주안점

학생이 경험을 언어화하고 공유하는 과정에 초점을 둡니다. 처음에는 어떤 단어를 고를지 망설일 수 있으므로, 교사는 경험 예시를 들어 선택을 돕고 친구들의 사례를 공유하여 학생들이 보다 쉽게 선택할 수 있도록 지도합니다.

■ 활동 2. 내가 고른 단어 이야기

빙고에서 체크한 단어 중 두 개를 골라, 그 단어를 고른 이유를 간단히 적어보세요.

- ① 단어: 이유:
② 단어: 이유:

(예시)

- ① 단어: 좌절, 이유: 열심히 공부했는데도 문제를 풀 때 막히는 부분이 많아서 스스로 부족하다고 느꼈다.
② 단어: 시험, 이유: 시험 때 긴장해서 아는 문제도 틀리고, 결과가 안 좋아서 자신감이 더 떨어졌다.
③ 단어: 자신감, 이유: 어려운 문제를 혼자 풀었을 때 자신감이 생겼다.
④ 단어: 포기, 이유: 너무 어려운 문제는 시작도 못 하고 포기한 적이 많다.

지도의 주안점

학생들이 단어를 고른 이유를 작성하는 데 부담을 느낄 수 있으므로, 말로 먼저 표현하게 하고 교사가 키워드를 정리해 학생이 글로 연결할 수 있도록 지도합니다.

■ 활동 3. 짝과 이야기 나누기 & 발표

짝과 내가 고른 단어와 이유를 이야기 나눠보세요. 비슷한 점이나 새롭게 알게 된 점이 있다면 아래에 적어보세요.

공통점이나 새롭게 알게 된 점:

발표한 친구의 이야기를 들으며 기억에 남은 점이 있다면 메모해 보세요.

지도의 주안점

- 일부 학생들은 자신의 경험을 다른 사람 앞에서 말하는 것에 심리적 부담을 느낄 수 있습니다. 따라서 짝 토의 중심으로 운영하고, 발표는 희망자 중심으로 진행합니다. 발표 희망자가 없을 경우 포스트잇이나 칠판 등을 활용해 시각적으로 공유하는 대안을 제공합니다.
- 학생이 발표할 때 “이 단어를 고른 이유가 궁금해. 혹시 이야기해 줄 수 있을까?” 또는 “그럴 수도 있지. 혹시 비슷한 경험 있는 친구도 있을까?”와 같은 발문을 통해 발표를 구체화하고 친구들의 공감 반응을 자연스럽게 이끌어낼 수 있습니다.

■ 활동 4. 수학에게 보내는 엽서

지금의 나, 미래의 나, 또는 수학에게 하고 싶은 말을 적어보세요.

“수학아, 너랑 친해지고 싶어.”

“수학은 어렵지만 해내면 기분이 좋아.”

“나는 왜 수학 시간이 부담스러웠을까?”

이런 문장으로 시작해도 좋아요.

(예시)

수학아,

너를 보면 솔직히 좀 무서워. 문제만 보면 머리가 하얘지고 자신감이 떨어졌어.

하지만 조금씩 풀리기 시작하면 기분이 좋아지더라. 앞으로는 너랑 조금씩 더 친해지고 싶어.

지도의 주안점

‘수학에게 보내는 엽서’에 학생들이 “수학이 어렵다”, “싫다” 등 부정적인 메시지를 쓰는 경우, 이를 평가하거나 억제하지 않고 그대로 수용합니다. 다만 “앞으로 수학과 어떤 관계를 만들고 싶은지”와 같은 미래지향적 질문을 던져 학생들이 희망적이고 긍정적인 시각에서 활동을 마칠 수 있도록 유도합니다.

■ 활동 5. 오늘 활동 정리

오늘 활동을 통해 느낀 점이나, 앞으로 수학 시간에 바라는 점을 한 줄로 적어보세요.

한 줄 정리:

프로그램 활동에 대한 피드백

학생 활동 예상 답안/반응

● 수학 경험 빙고

- ▶ “포기”, “좌절”과 같은 부정적 단어를 선택하는 학생이 많을 수 있음.
- ▶ 부정적인 단어를 선택하더라도 평가하지 않고 감정을 그대로 수용하며, “이 단어를 고른 이유가 궁금해.”와 같은 개방형 질문을 활용해 학생이 자신의 마음을 자연스럽게 돌아보도록 지도할 수 있음.
- ▶ 이때 교사는 “이 단어를 선택한 것도 네 경험의 일부니까 괜찮아.”, “말해줘서 고마워. 그런 감정이 들 수 있지.”와 같은 말로 감정을 수용하는 피드백을 제공하면 효과적임.

● 내가 고른 단어 이야기

- ▶ 학생들이 자신의 감정을 명확한 언어로 표현하지 못할 수 있음.
- ▶ “그때 어떤 기분이었어?”와 같은 공감형 질문을 활용해 대화를 이어가며, 학생이 구체적으로 감정을 표현하도록 지도할 수 있음.

● 짝과 이야기 나누기 & 발표

- ▶ 학생들이 자신의 경험을 다른 사람 앞에서 말하는 것을 부담스러워할 수 있음.
- ▶ 짝 토의 중심으로 운영하고, 발표는 희망자 중심으로 진행하되, 발표 희망자가 없을 경우에는 선택한 단어와 이유를 포스트잇에 적게 한 뒤 모아 시각화하여 공감대를 형성하도록 지도할 수 있음.

● 수학에게 보내는 엽서

- ▶ 학생들이 수학에 대한 두려움이나 부담감, “싫다”, “어렵다” 등 부정적인 표현을 많이 쓸 수 있음.
- ▶ 교사는 감정을 평가하거나 수정하려 하지 않고 그대로 수용하며, “수학이 어렵다고 느낀다고 솔직히 적은 것 자체가 용기야.”와 같이 학생의 표현을 인정하는 말을 먼저 건넬 수 있음.
- ▶ 이후 “그럼 앞으로 수학과 어떤 관계를 만들고 싶어?”와 같은 미래지향적 발문을 활용해 활동을 긍정적으로 마무리하도록 지도할 수 있음.

지도 TIP

Q. 활동에 대한 피드백은 어떻게 제공하면 좋으며, 추가로 어떤 활동을 하면 효과적일까요?

A. 개별 피드백 중심 운영: 피드백은 글이나 포스트잇을 활용해 개별적으로 제공하는 방식이 효과적입니다. 학생이 작성한 내용에 간단한 코멘트를 직접 적어 주거나, 짧은 대화를 통해 학생이 스스로 경험을 정리하도록 유도하여 심리적 부담 없이 피드백을 받을 수 있도록 지도합니다.

정서 변화 추적 및 강화: 프로그램 전·후에 간단한 정서 설문(예: “지금 수학에 대한 기분은?”)을 실시하여 학생들의 정서 변화를 추적하도록 합니다. 설문 결과를 시각화하여 학생에게 제공하면 스스로 변화를 인식하고 성취감을 느낄 수 있어 정서적 회복에 도움이 됩니다.

2차시 프로그램 개요

차시 주제	나의 수학 학습 동기 점검
프로그램 개발 방향 및 활용 시 고려사항	• 학생이 일반 학습과 수학 학습의 동기를 비교하여, 자신의 학습 태도와 동기 수준을 명확히 인식하도록 돕는 활동이다. • 학습 동기를 높이는 요인과 방해 요인을 스스로 탐색하고, 현실적 실천 전략을 세울 수 있도록 지도한다. • 교사는 개별 피드백 중심으로 학생이 자신의 학습 상황을 긍정적으로 재구성하도록 지원한다.
수업 전개	
도입	• 활동목표 확인 • 정답 없는 활동임을 강조해 학생들이 편안하게 자신의 생각을 적을 수 있는 분위기 조성
전개	• 나의 학습 동기 점검하기 - 일반 학습과 수학 학습 동기를 점검하는 문항을 보고, 자신에게 해당하면 ○, 잘 모르겠으면 △, 해당하지 않으면 × 표시한다. - 결과를 비교해 수학 학습에 국한된 문제인지, 전반적인 학습 동기 문제인지를 스스로 인식하도록 지도한다. • 나를 공부하게 만드는 힘과 방해하는 요인 찾기 - 공부하게 만드는 힘과 방해하는 요인을 구분해 표에 정리하고 하나를 선택해 이유를 적게 한다. - “이 요인을 선택한 이유를 말해줄 수 있을까?”와 같은 개방형 질문을 통해 학생의 사고를 확장 시킬 수 있도록 지도한다. • 나만의 방법 정하기 - 학습 동기를 높이는 방법과 방해 요인을 줄이는 방법을 구체적으로 작성하고, 실천 다짐을 작성해 보게 한다. - 학생이 너무 추상적으로 작성하는 경우 교사가 예시 전략을 제시해 현실적인 계획을 세울 수 있도록 돕는다.
마무리	• 오늘의 활동 정리 - 오늘 활동에서 느낀 점이나 앞으로 바라는 점을 한 줄로 작성하게 한다. - 글쓰기를 어려워하는 학생은 먼저 말로 표현하게 한 뒤, 키워드로 정리해 준다.

지난 시간에는 수학과 나의 경험을 돌아봤습니다.

이번 시간에는 그 경험 속에서 내가 공부하게 만드는 힘과 방해 요인을 살펴보고, 앞으로 수학 공부를 더 잘할 방법을 생각해 봅시다.

오늘의 활동목표

1. 수학 공부를 하고 싶은 마음(동기)을 스스로 점검한다.
2. 내가 공부할 때 힘이 되는 것과 방해하는 것을 구분해 본다.
3. 공부를 하고 싶은 마음을 높이고 방해 요인을 줄이는 나만의 방법을 찾아본다.

■ 활동 1. 나의 학습 동기 점검하기

1) 다음 문장을 읽고, 나에게 해당하면 ○, 잘 모르겠으면 △, 해당하지 않으면 × 표시해 보세요.

구분	문장	○/△/× 표시
일반 학습	새로운 걸 배우면 신기하고 재미있다.	
	조금 어려워도 해내면 기분이 좋다.	
	수업에서 배운 걸 생활에서 써 본 적이 있다.	
	모르는 내용을 알게 되면 부듯하다.	
	공부하는 과정이 즐겁다.	
	모르는 것이 있어도 그냥 넘어갈 때가 많다.	
	공부를 하는 이유를 나 스스로 말할 수 있다.	
	누군가 기대하거나 칭찬하면 더 해보고 싶어진다.	
	재미있거나 관심 있는 주제는 더 오래 집중할 수 있다.	
	친구보다 잘하면 기분이 좋다.	
	시험에서 점수가 오르면 더 하고 싶다.	
	실수하거나 틀리는 모습을 보이는 게 싫다.	
	모르는 걸 물어보는 게 부끄럽다.	
수학 학습	잘못할 것 같으면 시작도 안 한다.	
	수학 문제를 맞히면 기분이 좋아진다.	
	어려운 수학 문제를 풀면 부듯하다.	
	어려운 수학 문제는 시작하기 전에 포기할 때가 많다.	
	수학에서 배운 내용을 어디에 쓰는지 안다.	
	풀이 과정을 이해하면 기분이 좋다.	
	새로운 풀이 방법을 배우면 신기하다.	
	수학에서 친구보다 잘하면 부듯하다.	
	수학 시험 점수가 오르면 더 하고 싶다.	
	수학 문제 틀리는 게 싫다.	
	모르는 수학 문제를 물어보는 게 부끄럽다.	

2) ○ 또는 × 표시한 문장 중 하나를 골라 이유를 간단히 적어보세요.

내가 이 문장을 고른 이유는_____

지도의 주안점

- 결과를 비교해 수학 학습에 국한된 문제인지, 전반적인 학습 동기 문제인지를 스스로 인식하도록 지도합니다.
- 학습 동기 점검 결과와 ○ 또는 × 표시한 문장 중 하나를 골라 이유를 작성한 것을 토대로 개별 피드백을 통해 학생의 생각을 더 깊게 탐색하고 지도합니다.

개별 피드백 예: “수학에서만 ×가 많구나. 어떤 경험 때문에 그런 걸까?”
“일반 학습에서는 ○가 많은데, 수학에서도 비슷하게 적용할 방법이 있을까?”

■ 활동 2. 나를 공부하게 만드는 힘과 방해하는 요인 찾기

1) 활동 1의 문장을 다시 살펴보고 나를 공부하게 만드는 힘과 나를 방해하는 요인을 각각 골라 아래 표에 적어 보세요.

나를 공부하게 만드는 힘(최대 3개)	나를 방해하는 요인(최대 3개)

2) 나를 공부하게 만드는 힘에 선택한 것 중 하나를 골라 이유를 간단히 적어보세요.

내가 이 문장을 고른 이유는_____

3) 나를 방해하는 요인에 선택한 것 중 하나를 골라 이유를 간단히 적어보세요.

내가 이 문장을 고른 이유는_____

지도의 주안점

- 공부하게 만드는 힘 응답: 내적·외적 동기 연결 질문(예: “점수 상승 말고도 성취감을 느낄 수 있는 방법이 있을까?”)을 활용해 사고 확장을 유도합니다.
- 방해 요인 응답: 개방형 질문(예: “틀리는 게 싫다고 했는데, 혹시 어떤 상황에서 특히 더 그 기분이 강해지니?”)을 활용해 학생이 스스로 상황을 설명하고, 해결책을 탐색할 수 있도록 유도합니다.

■ 활동 3. 나만의 방법 정하기

1) 활동 2를 바탕으로 학습 동기를 높이는 방법과 방해 요인을 줄이는 방법을 구체적으로 적어보세요.

구분	구체적인 방법
학습 동기를 높이는 방법	
방해 요인을 줄이는 방법	

2) 실천 다짐 한 줄 쓰기

꼭 실천하고 싶은 한 가지를 정해서 다짐해 보세요.

나는 이번 주에 _____
_____를 꼭 실천해 볼 거예요.

지도의 주안점

- 학생이 작성한 방법이 너무 추상적일 경우, 교사가 구체적인 예시 전략을 제시하여 학생이 현실적이고 실행 가능한 계획을 세울 수 있도록 도와줍니다.
- 친구와의 피드백 과정에서는 긍정 피드백을 먼저 제공하고, 그다음에 보완 피드백을 제시하도록 안내하여 학생이 심리적 부담 없이 자신의 방법을 발전시킬 수 있도록 합니다.

■ 활동 4. 오늘 활동 정리

오늘 활동을 통해 느낀 점이나, 앞으로 수학 시간에 바라는 점을 한 줄로 적어보세요.

한 줄 정리:

프로그램 활동에 대한 피드백

학생 활동 예상 답안/반응

● 나의 학습 동기 점검하기

- ▶ 학생에 따라 일반 학습과 수학 학습의 동기가 모두 낮을 수 있고, 수학 학습에서만 동기가 낮은 경우도 나타날 수 있음.
- ▶ 일반 학습과 수학 모두에서 동기가 낮은 경우에는 난이도를 조절한 과제를 제공하여 점진적으로 성공 경험을 쌓도록 돕고, 결과보다 시도 자체를 칭찬하는 과정 중심 피드백을 제공함.
- ▶ 수학 학습에서만 동기가 낮은 경우에는 다른 과목에서의 성공 경험을 수학 학습과 연결하여 성취감을 느끼도록 지도함. 이때 “수학이랑 다른 과목에서 느낌이 다르구나. 왜 그럴까 생각해 본 적 있어?”와 같은 질문을 통해 원인을 탐색하도록 도울 수 있음.
- ▶ 또한 “점수 말고도 성취감을 느낀 순간이 있었니?”와 같은 질문을 활용하여 점수 중심 사고에서 벗어나 개념 이해나 노력 자체에서 성취감을 느끼도록 유도함.
- ▶ 틀림을 두려워하지 않도록 “문제를 틀려도 괜찮고, 개념을 이해하고 변화해 가는 과정이 더 중요하다”는 분위기를 형성하여 점진적인 성공 경험을 쌓도록 지도할 수 있음.

● 나를 공부하게 만드는 힘과 방해하는 요인 찾기

- ▶ 방해 요인으로 “문제를 틀리는 게 싫다”, “모르는 걸 물어보는 게 부끄럽다”, “잘못할 것 같으면 시작도 안 한다”와 같은 응답이 많이 나타날 수 있음.
- ▶ “틀리는 게 싫다고 했는데, 어떤 상황에서 특히 그 기분이 강해지니?”, “그 상황에서 네가 시도해 본 방법이 있을까?”, “만약 다시 그 상황이 온다면 어떻게 달라지고 싶니?”와 같은 개방형 질문을 활용하여 학생이 스스로 상황을 설명하고 해결책을 탐색하도록 지도할 수 있음.
- ▶ “틀릴 수도 있지만, 그것이 배우는 과정이고 시도 자체가 중요해.”와 같은 과정 중심의 칭찬을 통해 학생이 자신감을 회복하도록 지도할 수 있음.
- ▶ 동기를 높이는 요인으로 “누군가 기대하거나 칭찬하면 더 해보고 싶어진다”, “시험에서 점수가 오르면 더 하고 싶다”, “수학 문제를 맞히면 기분이 좋아진다” 등이 주로 선택될 수 있음.
- ▶ “점수가 오르면 더 하고 싶은 마음이 드는구나. 점수 말고도 성취감을 느낄 방법이 있을까?”와 같은 질문을 활용하여 내적 동기(성취감, 이해도 향상)와 외적 동기(점수, 결과)를 연결해 사고를 확장하도록 지도할 수 있음.
- ▶ 쉬운 문제부터 차근차근 해결하도록 하여 점진적인 성공 경험을 쌓고, 이를 통해 자기효능감이 높아지도록 지도할 수 있음.

● 나만의 방법 정하기

- ▶ 학습 동기를 높이는 방법으로는 쉬운 문제부터 풀거나 틀린 문제를 다시 해결해 보는 등, 풀이 과정에 집중하겠다는 응답이 예상됨.
- ▶ 방해 요인을 줄이는 방법으로는 공부해야 하는 이유를 스스로 인식하고, 틀리더라도 괜찮다고 생각하며 계속 시도하겠다는 응답이 나타날 수 있음.
- ▶ 피드백은 학생이 자신의 계획을 구체화하고 실천 가능하게 다듬을 수 있도록 지원하는 방향으로 제공함.
 - 친구와의 피드백 주고받기: 서로의 방법 중 긍정적인 부분을 먼저 이야기하고, 그다음에 개선할 점이나 추가 아이디어를 제안하도록 지도함.
 - 교사의 피드백: 과정 중심 칭찬을 먼저 제공한 뒤, 구체적인 개선 질문과 실천 제안을 순서대로 제시함.
(예: “방법을 고민한 것만으로도 잘했어. 이걸 이번 주에 실제로 실천한다면 언제부터 시작해 볼 수 있을까?”)

지도 TIP

Q. 과정 중심 피드백은 어떤 방식이 효과적일까요?

A. **자기 인식 강화 피드백:** 학생이 자신의 학습 동기와 방해 요인을 스스로 인식하도록 돕는 질문형 피드백이 효과적입니다.

예: “이 요인을 선택한 이유는 뭐라고 생각해?”, “그 상황에서 어떤 감정을 느꼈을까?”, “그 경험을 통해 배운 점이 있을까?” 등의 질문을 통해 학생이 자기 이해를 깊이 있게 확장하도록 지도합니다.

실천 유도 피드백: 학생이 세운 ‘나만의 방법’을 구체적으로 실천할 수 있도록 돕는 대화형 피드백을 제공합니다.

예: “이 방법을 언제, 어디서 시도해 볼 수 있을까?”, “이걸 실천하면 어떤 기분이 들 것 같아?”, “누가 함께 도와주면 더 잘할 수 있을까?”와 같은 질문을 통해 계획을 실행 가능한 행동으로 구체화하도록 지도합니다.

작은 성취를 강조하는 피드백: 실천 후에는 “한 번이라도 시도했다는 게 대단해.”, “지난번보다 구체적으로 계획했네.”처럼 시도와 변화를 인정하는 코멘트를 제공합니다. 이는 학생의 자기효능감을 높이고, 지속적인 학습 동기를 유지하도록 돕는 데 효과적입니다.

3차시 프로그램 개요

차시 주제	나의 수학 학습 습관 되돌아보기
프로그램 개발 방향 및 활용 시 고려사항	• 학생이 스스로 학습 습관을 점검하고, 공부를 방해하는 요인을 발견하며, 개선할 수 있는 구체적 실천 계획을 세우도록 돕는 활동이다. • 공부를 방해하는 습관의 원인을 파악하고, 학생 스스로 현실적인 해결 방법을 탐색하도록 지도한다. • 친구와 교사의 피드백 과정을 통해 계획을 수정·보완하며, 구체적이고 실행 가능한 실천 계획을 세우도록 지도한다. • 습관을 비판하지 않고, 변화 가능성을 중심으로 지도한다.
수업 전개	
도입	• 활동목표 확인 • 정답 없는 활동임을 강조해 학생들이 솔직하게 작성할 수 있는 분위기 조성
전개	• 나의 공부 습관 점검하기 - 일반 학습과 수학 학습 습관을 점검하는 문항을 보고, 자신에게 해당하면 ○, 잘 모르겠으면 △, 해당하지 않으면 × 표시한다. - ○로 표시한 문항 중 하나를 골라 왜 그런 습관이 생겼는지 또는 왜 고치기 어려운지 간단히 적게 한다. • 나를 방해하는 습관, 나만의 방법으로 바꿔보기 - 바꾸고 싶은 습관 한 가지를 선택하고, 그 상황에서 할 수 있는 구체적인 방법을 적는다. • 수학 공부 계획 세우기 - 나에게 맞는 공부 시간대, 장소, 방법을 체크한다. - 1차 수학 공부 계획 작성 → 친구나 교사에게 설명하고 피드백 받기 → 최종 수학 공부 계획 작성 순으로 진행한다.
마무리	• 오늘의 활동 정리 - 오늘 활동에서 느낀 점이나 앞으로 바라는 점을 한 줄로 작성하게 한다. - 글쓰기를 어려워하는 학생은 먼저 말로 표현하게 한 뒤, 키워드로 정리해 준다.

3차시 나의 수학 학습 습관 되돌아보기

지난 시간에는 수학 학습 동기와 방해 요인을 살펴봤습니다.

이번 시간에는 나의 공부 습관을 점검하고 실천 가능한 개선 계획을 세워봅시다.

오늘의 활동목표

1. 나의 공부 습관을 스스로 점검한다.
2. 공부를 방해하는 습관의 원인을 생각해 본다.
3. 나에게 맞는 수학 공부 계획을 세운다.

■ 활동 1. 수학 경험 빙고

1) 다음 문장을 읽고, 나에게 해당하면 ○, 잘 모르겠으면 △, 해당하지 않으면 × 표시해 보세요.

구분	문장	○/△/× 표시
일반 학습	공부하려고 책상에 앉아도 금방 다른 일을 한다.	
	공부를 시작하기 전에 꼭 휴대폰부터 확인한다.	
	계획을 세워도 오래 못 간다.	
	공부하다 모르는 게 나오면 그냥 넘어간다.	
	시험이 다가와야만 공부를 시작한다.	
수학 학습	채점만 하고 왜 틀렸는지 확인하지 않는다.	
	같은 실수를 다시 해도 고쳐보지 않는다.	
	어려운 문제는 건너뛰고 쉬운 문제만 푼다.	
	수업 시간에 풀었던 문제를 집에서는 안 풀어본다.	
	계산 실수를 줄이려고 따로 연습하지 않는다.	

2) ○ 표시한 문장 중 하나를 골라 그 습관이 왜 생겼는지 또는 왜 고치기 어려운지 간단히 적어보세요.

내가 이 문장을 고른 이유는_____

지도의 주안점

- 습관 자체를 비판하지 말고, 왜 그런 습관이 생겼는지 원인을 탐색하는 것에 초점을 둡니다.
- 이유를 적기 어려워하는 학생들은 말로 먼저 표현하게 하고 키워드를 정리하여 작성하도록 도움을 줄 수 있습니다. (질문 예시) “이런 습관이 생긴 데 특별한 계기가 있었니?”, “혹시 고치려고 해본 적이 있는데 잘 안됐던 경험이 있니?”

■ 활동 2. 나를 방해하는 습관, 나만의 방법으로 바꿔보기

- 1) 활동 1에서 고른 습관 중 특히 바꾸고 싶은 습관을 적고, 그 상황에서 내가 해볼 수 있는 구체적인 방법을 적어보세요.

바꾸고 싶은 습관	나는 이렇게 해볼래요
공부 시작 전에 꼭 휴대폰을 확인한다.	책상에 앉기 전에 휴대폰을 다른 방에 두기
어려운 문제는 건너뛰다.	하루에 1문제만이라도 다시 풀기

- 2) 실천 다짐 한 줄 쓰기

꼭 실천하고 싶은 한 가지를 정해서 다짐해 보세요.

나는 이번 주에 _____
_____를 꼭 실천해 볼 거예요.

지도의 주안점

과정 중심 칭찬 → 구체화 질문 → 작은 목표 제안 순으로 지도합니다.

(예시) 칭찬: “습관을 바꾸려고 고민한 것 자체가 이미 잘한 거야.”

구체화 질문: “이걸 언제, 어디서, 얼마나, 무엇을 실천해 볼 수 있을까?”

목표 제안: “수학 수업이 있던 날 저녁에 어려운 문제 한 개만 다시 풀어보는 건 어때?”

■ 활동 3. 수학 공부 계획 세우기

- 1) 나에게 맞는 공부 방법 체크

1. 수학 공부를 어느 시간대에 하면 가장 잘 되나요?

☐ 아침 ☐ 점심 이후 ☐ 저녁 ☐ 자기 직전 ☐ 아직 모르겠어요

2. 어느 공간에서 수학 공부가 잘 되나요?

☐ 집 ☐ 학교 ☐ 도서관 ☐ 기타 ()

3. 어떤 방법으로 수학 공부할 때 잘 되나요?

☐ 스스로 요약 정리하기 ☐ 문제를 반복해서 풀기 ☐ 오답 노트를 만들어 복습하기
☐ 시간 정해 놓고 풀기 ☐ 기타 ()

2) 1차 수학 공부 계획 작성

항목	나의 계획
공부 시간대	
공부 장소	
공부 방법	

3) 피드백 받기

- ① 계획 설명하기 - 친구나 선생님께 내가 세운 공부 계획을 보여주고 간단히 설명하기
- ② 피드백 듣기 - 좋은 점과 보완할 점 듣기
- ③ 계획 수정·보완하기 - 반영할 내용 선택 후 수정

4) 최종 수학 공부 계획 작성

항목	나의 계획
공부 시간대	
공부 장소	
공부 방법	

지도의 주안점

- 피드백 과정에서는 긍정 피드백을 먼저 제공하고, 그다음에 보완 피드백을 제시하도록 하여 학생이 심리적 부담 없이 자신의 공부 계획을 완성시킬 수 있도록 합니다.
- 계획이 추상적이면 “언제, 어디서, 얼마나, 무엇을” 기준으로 구체화하도록 지도합니다.

■ 활동 4. 오늘 활동 정리

오늘 활동을 하면서 느낀 점이나, 앞으로 수학 시간에 바라는 점을 한 줄로 적어보세요.
한 줄 정리:

프로그램 활동에 대한 피드백

학생 활동 예상 답안/반응

● 나의 공부 습관 점검하기

- ▶ 학생들이 자신의 습관을 부정적으로 인식하거나 ‘고쳐야 한다’는 압박감을 느낄 수 있음.
- ▶ 교사는 습관을 비판하기보다, 학생이 스스로 이유를 탐색하도록 돕는 방식으로 접근하며 “이런 습관이 생긴 데 특별한 이유가 있을까?” 또는 “이 습관이 생긴 계기가 있었을까?”와 같은 개방형 질문을 활용해 대화를 이어감.
- ▶ 이때 “이 습관 때문에 힘들었겠구나. 왜 이런 습관이 생겼을까?”, “고치기 어렵다고 느끼는 이유가 있을까?”와 같은 질문을 덧붙이면 학생이 자신의 행동을 부정적으로 받아들이기보다, 원인을 객관적으로 바라보고 이해할 수 있도록 도와줄 수 있음.
- ▶ 습관의 원인을 외적 요인(환경, 시간, 피로감 등)과 내적 요인(태도, 감정 등)으로 나누어 생각하게 함으로써 자기 이해를 깊이 있게 확장하도록 지도함.

● 나를 방해하는 습관, 나만의 방법으로 바꿔보기

- ▶ 학생들이 실천 계획을 세우는 과정에서 지나치게 추상적인 표현(예: “열심히 하겠다”, “집중하겠다”)을 사용할 가능성이 있음.
- ▶ “언제, 어디서, 얼마나, 무엇을”의 네 가지 기준으로 구체화하도록 지도할 수 있음.
- ▶ “습관을 바꾸려고 고민한 것 자체가 이미 잘한 거야.”, “이걸 언제, 어디서, 어떻게 실천해 볼 수 있을까?”와 같은 과정 중심 칭찬과 구체화 질문을 병행하여 학생의 실행 의지를 강화할 수 있음.

● 수학 공부 계획 세우기

- ▶ 학생들이 처음 작성한 계획이 지나치게 이상적이거나 비현실적일 수 있음.
- ▶ 피드백 과정에서 “이 계획을 실제로 언제부터 시작해 볼 수 있을까?”, “이 방법을 지속하기 위해 어떤 점이 필요할까?”와 같은 질문을 활용하여 학생이 스스로 현실적인 계획으로 조정하도록 지도할 수 있음.
- ▶ 친구와의 피드백에서는 긍정적인 부분을 먼저 언급하고, 그다음에 보완점을 제시하도록 안내하여 심리적 부담 없이 상호 피드백이 이루어지도록 지도할 수 있음.

지도 TIP

Q. 계획이 너무 추상적일 때는 어떻게 구체화하나요?

A. 구체화 기준 제시: 학생이 ‘열심히 하겠다’, ‘집중하겠다’와 같은 추상적인 표현만 쓰는 경우, ‘언제, 어디서, 얼마나, 무엇을’의 네 가지 기준을 제시하여 계획을 구체화하도록 지도합니다.

예: “수학 수업이 있던 날 저녁(언제), 집에서(어디서), 20분 동안(얼마나), 어려웠던 문제 한 개를 다시 풀기(무엇을)”

질문형 피드백 활용: 학생이 스스로 구체적인 계획을 세울 수 있도록 “이걸 언제, 어디서, 얼마나 실천할 수 있을까?”, “이 계획을 유지하려면 어떤 점이 필요할까?”와 같은 질문형 피드백을 제공합니다.

실행 가능성 점검: 작성한 계획이 너무 과하거나 비현실적일 경우, “이건 이번 주에 해볼 수 있을까?”, “조금 더 쉬운 목표로 바꿔볼까?”와 같은 대화를 통해 실행 가능한 수준으로 조정하도록 지도합니다.

지도 TIP

Q. 3차시에서 진로 연계 활동을 함께 운영하려면 어떻게 하면 좋을까요?

A. 직업 탐색 요소 연계: 수학 학습 습관 점검 후, 학생이 관심 있는 진로 분야와 연결하여 ‘수학이 사용되는 순간’을 탐색하도록 지도합니다.

예: “이 직업에서는 수학이 어떤 역할을 할까?”, “이 일을 잘하기 위해 필요한 수학 개념은 무엇일까?”

활동 구성 예시:

(1단계) **직업 연관성 찾기:** 학생들이 관심 있는 직업을 한 가지 정하고, 그 직업에서 수학이 활용되는 예를 조사하거나 떠올려 봅니다.

(2단계) **수학적 습관 연결:** 직업에서 실제로 요구되는 수학적 사고나 습관(예: 계산 검산, 논리적 사고, 그래프 해석 등)을 구체적으로 살펴보고, 자신이 앞서 점검한 학습 습관 중 어떤 부분이 그 직업 수행에 도움이 되거나 방해가 될 수 있는지 연결해 보도록 합니다.

예:

- “이 직업에서는 정확한 계산이 중요한데, 나는 계산 실수를 자주 하니까 검산 습관을 길러야겠어.”
 - “이 직업에서는 그래프를 해석해야 하는데, 나는 그래프를 자세히 안 보는 편이라 분석 연습이 필요하겠어.”
- 이처럼 **직업 상황** → **요구되는 수학적 습관** → **나의 현재 습관** → **바꿀 행동 한 가지** 순으로 **구체화**하도록 지도합니다.

(3단계) **미래 계획 세우기:** “앞으로 어떤 공부 습관을 기르면 진로에 도움이 될까?”를 주제로 간단한 다짐 문장을 작성하도록 합니다.

예: “그래프 문제를 볼 때 축부터 읽는 습관을 들이겠다.”, “수학 문제를 풀 때 단위를 꼭 확인하겠다.”

교사 피드백 방향: 학생의 탐색 내용을 정답처럼 평가하기보다는, “좋은 시각이야. 이 직업에서 수학이 그렇게 쓰인다는 게 흥미롭네.”처럼 수용적 코멘트를 먼저 제공하고, “그럼 그 부분을 위해 어떤 습관을 유지하면 좋을까?”, “이번 주에 그 습관을 한 번 실천해 볼 수 있을까?” 등 구체화와 실천을 유도하는 발문으로 확장합니다.

부 록

※ 문제 생성 및 배포 방법

- 문제를 새롭게 생성하려면 시험지 페이지 상단에서 **복제** → **문제 재생성**을 클릭하세요.
- 온라인 학습지를 보내려면 **제작** → **사용자/그룹 선택** → **제작**을 차례대로 클릭하세요.

※ 답안 입력 시 유의사항

- 객관식과 단답형 문항은 자동 채점됩니다.
- 단답형 문항은 답안란에 **숫자 또는 수식만 정확히 입력**해야 합니다.
“~개”, “~이다.” 등의 한글이 포함될 경우 오답 처리될 수 있습니다.

지수함수와 로그함수

01. 거듭제곱근과 지수법칙



준비 학습



기초 문제

02. 로그와 상용로그



준비 학습



기초 문제

03. 지수함수와 로그함수



기초 문제

삼각함수

04. 일반각과 호도법



준비 학습



기초 문제

05. 삼각함수의 그래프



기초 문제

06. 사인법칙과 코사인법칙



준비 학습



기초 문제

07. 수열과 등차수열

준비 학습 기초 문제 

08. 등비수열

기초 문제 

09. 여러 가지 수열의 합

기초 문제 

10. 수열의 귀납적 정의

기초 문제 

빈칸 채우기와 참거짓

지수함수와 로그함수

01. 거듭제곱근과 지수법칙



빈칸 채우기 ✎



참/거짓 ✎

02. 로그와 상용로그



빈칸 채우기 ✎



참/거짓 ✎

03. 지수함수와 로그함수



빈칸 채우기 ✎



참/거짓 ✎

삼각함수

04. 일반각과 호도법



빈칸 채우기 ✎



참/거짓 ✎

05. 삼각함수의 그래프



빈칸 채우기 ✎



참/거짓 ✎

06. 사인법칙과 코사인법칙



빈칸 채우기 ✎



참/거짓 ✎

07. 수열과 등차수열



빈칸 채우기 ✨



참/거짓 ✨

08. 등비수열



빈칸 채우기 ✨



참/거짓 ✨

09. 여러 가지 수열의 합



빈칸 채우기 ✨



참/거짓 ✨

10. 수열의 귀납적 정의



빈칸 채우기 ✨



참/거짓 ✨