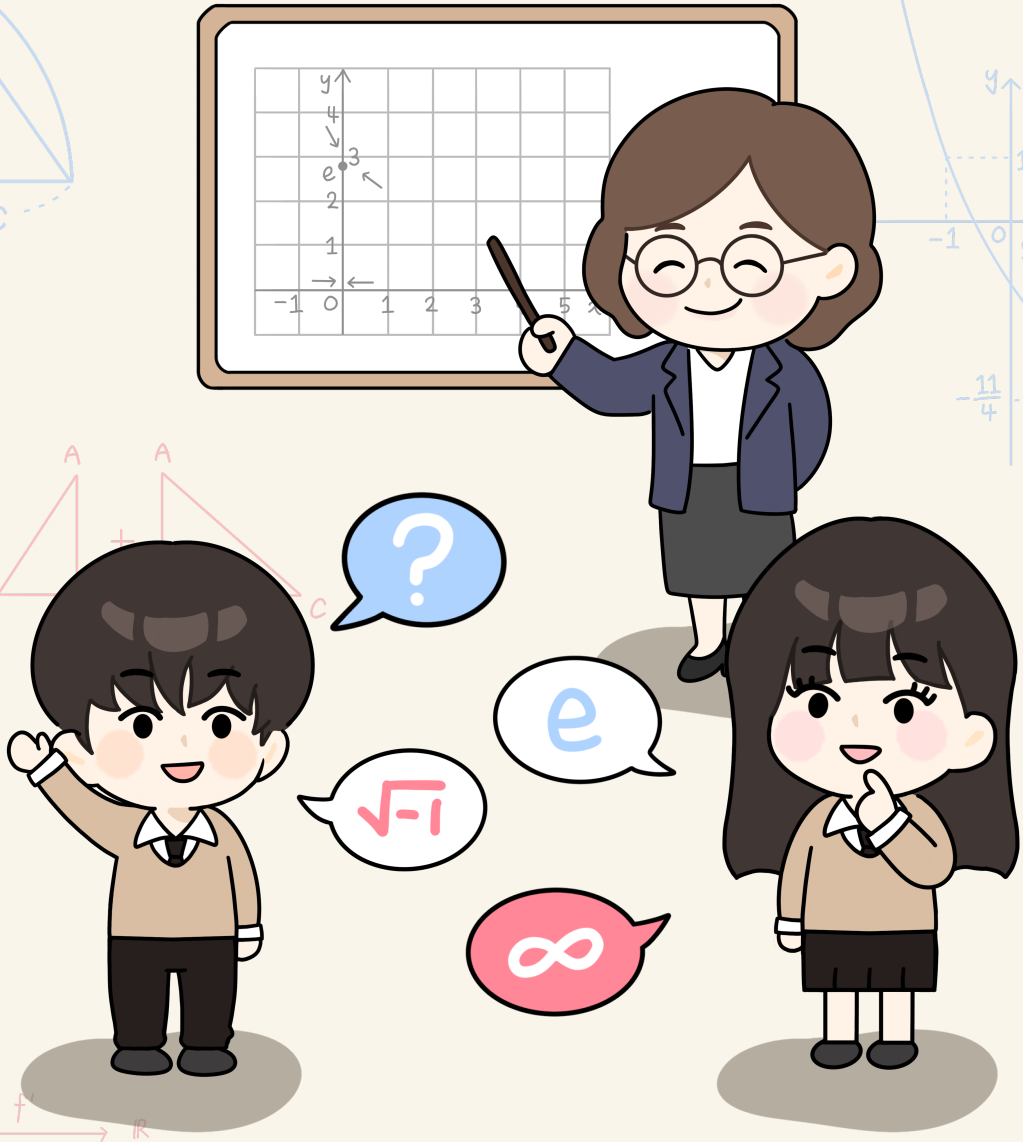
발 간 등 록 번 호
26-B552111-000001-01

고등학교

수학 용어 안내자료



한국과학창의재단
Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity

머 리 말

이 자료는 〈공통수학1〉, 〈공통수학2〉, 〈대수〉, 〈확률과 통계〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉, 〈기하〉에서 다루는 다음의 수학 용어들을 설명하고 안내하기 위해 마련되었습니다.

〈공통수학1〉 미정계수법, 나머지정리, 인수정리, 조립제법, 허수단위, 복소수, 실수부분, 허수부분, 허수, 켤레복소수, 실근, 허근, 판별식, 연립부등식, 합의 법칙, 곱의 법칙, 순열, 계승, 조합, 행렬, 행, 열, 성분

〈공통수학2〉 내분, 대칭이동, 집합, 원소, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 서로소, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 드모르간의 법칙, 명제, 가정, 결론, 정의, 정리, 조건, 진리집합, 부정, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법, 절대부등식, 정의역, 치역, 공역, 대응, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 일대일함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수

〈대수〉 거듭제곱근, 지수, 로그, (로그의) 밑, 진수, 상용로그, 지수함수, 로그함수, 시초선, 동경, 일반각, 호도법, 라디안, 주기, 주기함수, 삼각함수, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 사인법칙, 코사인법칙, 수열, 항, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법

〈확률과 통계〉 중복순열, 중복조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, 시행, 통계적 확률, 수학적 확률, 여사건, 배반사건, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행, 확률변수, 이산확률변수, 확률분포, 연속확률변수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 표준정규분포, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 모비율, 표본비율, 추정, 신뢰도, 신뢰구간

〈미적분I〉 구간, 닫힌구간, 열린구간, 반닫힌구간, 반열린구간, 수렴, 극한(값), 좌극한, 우극한, 발산, 무한대, 연속, 불연속, 연속함수, 최대 · 최소 정리, 사잇값 정리, 증분, 평균변화율, 순간변화율, 미분계수, 미분가능, 도함수, 롤의 정리, 평균값 정리, 증가, 감소, 극대, 극소, 극값, 극댓값, 극솟값, 부정적분, 적분상수, 정적분

〈미적분II〉 급수, 부분합, 급수의 합, 등비급수, 무리수e, 자연로그, (삼각함수의) 덧셈정리, 매개변수, 음함수, 이계도함수, 변곡점, 치환적분법, 부분적분법

〈기하〉 이차곡선, 포물선, 타원, 쌍곡선, 교선, 삼수선 정리, 이면각, 정사영, 좌표공간, 공간좌표, 벡터, 시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 영벡터, 실수배, 평면벡터, 공간벡터, 위치벡터, 벡터의 성분, 내적, 방향벡터, 법선벡터

각 수학 용어에 대한 설명/안내 자료를 찾아가는 방법은 다음과 같습니다.

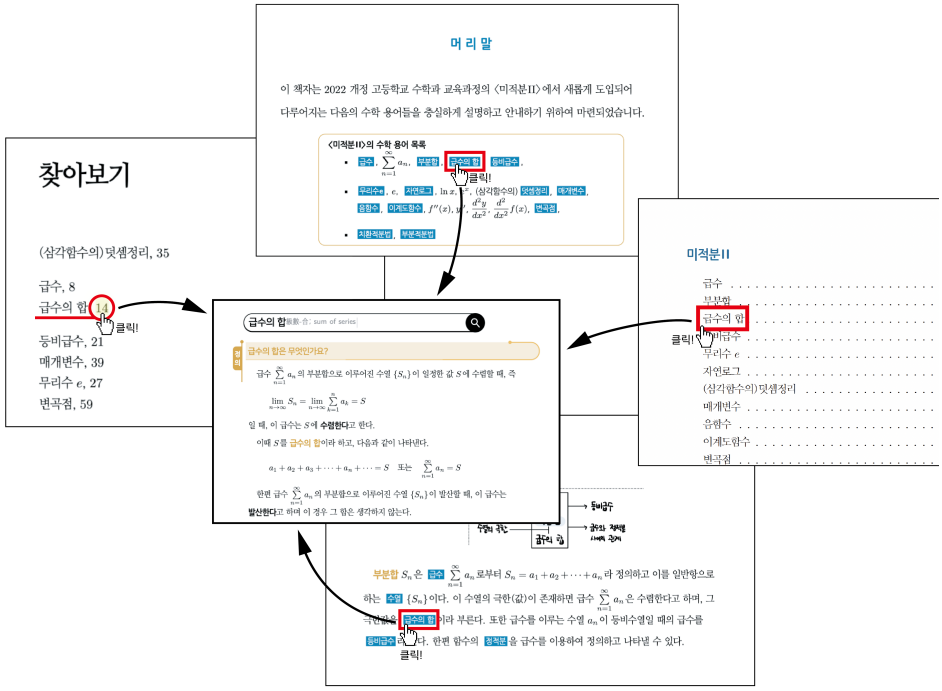
용어 설명 찾아가는 방법

(방법1) 위 목록의 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.

(방법2) [차례]에 있는 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.

(방법3) 맨 뒤 [찾아보기]에 있는 용어 옆 숫자(쪽수)를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.

(방법4) 자료 본문에서 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.



고등학생이 각 수학 용어를 이해하는 과정에서 자연스럽게 제기할 수 있는 질문 및 교사가 고등학생의 수학적 사고를 유도하기 위해 제기할 수 있는 질문을 중심으로 묻고 답하는 문답 방식으로 자료를 구성하였습니다. 이 자료가 고등학교 수학 용어 및 관련 학습 내용에 대하여 학생 스스로 질문을 던지고 질문에 대한 답을 탐색하는 습관을 형성하는데 기여하고, 수학 교사가 학생의 이런 습관 형성과 의미 있는 수학적 사고 활동을 안내하는 데 활용되기를 바랍니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점

이 자료는 고등학생이 각 수학 용어를 정확하고 명료하게 이해하기 위해 필요한 용어의 뜻(정의), 표현, 구체적인 예 등의 기본적인 내용 뿐 아니라 더 알아보기 질문을 통해 그 용어에 대한 고등학생의 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용, 더 나아가 용어 관련 다양한 참고 자료와 대학 수준의 보다 심화 확장된 내용까지 심화(참고)를 통해 폭넓게 다루고자 하였습니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점을 살펴보면 다음과 같습니다.

[자료의 짜임새]

	기본	더 알아보기	심화(참고)
내용	고등학생의 수학 용어에 대한 정확하고 명료한 이해에 필요한 정의, 의미, 예 등의 기본 내용으로 구성	고등학생의 수학 용어에 대한 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용으로 구성	대학 수준의 심화 학습을 원하는 고등학생, 수업을 준비하는 교사(혹은 예비교사)를 위한 [기본]과 [더 알아보기]의 내용을 더욱 심화한 내용 및 참고 자료로 활용 가능한 내용으로 구성
특징	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 모든 내용이 용어가 도입되는 과목 교육과정의 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 범위를 벗어날 수 있음. 단, 설명에 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙은 해당 과목 교육과정 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용 및 이때 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어날 수 있음

[자료의 활용]

고등학생	수학 용어에 대한 교과서 중심의 기본적이고 핵심적인 의미와 내용을 이해를 원하는 학생은 기본에 해당하는 내용을 읽고 공부하면 됩니다. 기본에 해당하는 내용을 토대로 좀 더 깊이 있는 이해를 원하는 학생은 더 알아보기의 내용을 읽으면 도움이 될 수 있습니다. 심화(참고)의 내용은 참고 자료로서 "아, 이런 내용도 있구나." 정도로 이해하거나, 읽지 않아도 됩니다.
(예비)교사	기본에 해당하는 내용은 모든 학생에게 가르쳐야 할 내용입니다. 더 알아보기와 심화(참고)의 내용은 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정 범위를 벗어난 학생의 질문에 답하거나 심화 탐구 활동 자료로 활용 가능합니다.

[활용 시 유의점]

더 알아보기와 심화(참고)의 내용 중에는 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어나는 내용이 포함되어 있습니다. 특히 심화(참고)의 내용은 대학 학부 수준의 내용을 포함하기도 합니다. 그러므로 고등학교 수학 교사가 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용할 때는 신중한 주의가 필요합니다. 특히 평가에 교육과정의 범위를 벗어나는 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용하지 않도록 유의할 필요가 있습니다.

차 례

제 1 장 공통수학1 | 기본수학1 1

제 2 장 공통수학2 | 기본수학2 53

제 3 장 대수 216

제 4 장 미적분I 322

제 5 장 확률과통계 438

제 6 장 미적분II 543

제 7 장 기하 615

공통수학1 | 기본수학1

미정계수법 6
나머지정리 10
인수정리 16
조립제법 19
복소수 22
켤레복소수 28
실근과 허근 31
판별식 35
연립부등식 38
합의 법칙 40
곱의 법칙 42
순열 44
계승 46
조합 47
행렬 51

공통수학2 | 기본수학2

내분 58
대칭이동 61
집합과 원소 63
공집합 67
부분집합과 진부분집합 70
벤 다이어그램 74
전체집합과 여집합 80
차집합 85
서로소 88
교환법칙과 결합법칙 92
분배법칙 96
드모르간의 법칙 100
명제 102
정의와 정리 106
조건과 진리집합 110
부정 114
가정과 결론 117
충분조건과 필요조건 125
귀류법 130
절대부등식 133
대응, 정의역, 공역, 치역 136
항등함수 154
상수함수 158
합성함수 162
역함수 173
유리식 182
다항함수와 유리함수 188
점근선 198
무리식 204
무리함수 209

대수

거듭제곱근 222
지수 228
로그, 밑, 진수 233
상용로그 239
지수함수 242
로그함수 248
일반각, 시초선, 동경 254
호도법, 라디안 258
삼각함수, 주기, 주기함수 262
사인법칙 270
코사인법칙 276
수열, 항, 일반항 282
등차수열, 공차 289
등비수열, 공비 296
등차중항, 등비중항 303
귀납적 정의 309
수학적 귀납법 315

미적분I

구간 327
수렴 330
극한(값) 330
발산 339
무한대 339
좌극한 345
우극한 345
연속 350
불연속 350
연속함수 355
최대 · 최소 정리 360
사잇값 정리 365
증분 372
평균변화율 375
미분가능 378
순간변화율 378
미분계수 378
도함수 385
롤의 정리 392
평균값 정리 398
증가 406
감소 406
극대 410
극댓값 410
극소 410
극솟값 410
극값 410
부정적분 419
적분상수 419
정적분 427

확률과통계

중복순열 443
중복조합 446
이항정리, 이항계수 451
파스칼의 삼각형 456
시행 460
배반사건, 여사건 463
수학적 확률 467
통계적 확률, 큰 수의 법칙 472
조건부확률 477
독립, 종속 481
독립시행 487
확률변수, 이산확률변수, 확률분포 491
연속확률변수 497
기댓값 502
이항분포 507
정규분포 510
표준정규분포 514
모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출 520
모평균, 모분산, 모표준편차, 모비율 524
표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 표본비율 528
추정, 신뢰도, 신뢰구간 535

미적분II

급수 548
부분합 551
급수의 합 554
등비급수 561
무리수 e 567
자연로그 571
(삼각함수의)덧셈정리 574
매개변수 578
음함수 586
이계도함수 592
변곡점 598
치환적분법 602
부분적분법 608

기하

포물선(축, 꼭짓점, 초점, 준선) 620
타원(초점, 꼭짓점, 중심, 장축, 단축) 628
쌍곡선(초점, 꼭짓점, 중심, 주축, 점근선) 637
이차곡선 649
교선 653
삼수선 정리 656
이면각(변, 면, 크기) 659
정사영 663
좌표공간 668
공간좌표 668
벡터 674
시점 674
종점 674
벡터의 크기 674
단위벡터 674
영벡터 674
평면벡터 674
공간벡터 674
실수배 680
위치벡터 684
벡터의 성분 688
내적 696
방향벡터 705
법선벡터 711

공통수학1 | 기본수학1

머 리 말

이 자료는 2022 개정 교육과정의 〈공통수학1 | 기본수학1〉에서 다루는 다음의 수학 용어들을 설명하고 안내하기 위해 마련되었습니다.

〈공통수학1 | 기본수학1〉의 수학 용어 목록

- 미정계수법, 나머지정리, 인수정리, 조립제법,
- 허수단위, i, 복소수, $a+bi$, 실수부분, 허수부분, 허수, 켤레복소수, 실근, 허근, 판별식, 연립부등식,
- 합의 법칙, 곱의 법칙, 순열, ${}_nP_r$, 계승, $n!$, 조합, ${}_nC_r$,
- 행렬, 행, 열, 성분, $m \times n$ 행렬

각 수학 용어에 대한 설명/안내 자료를 찾아가는 방법은 다음과 같습니다.

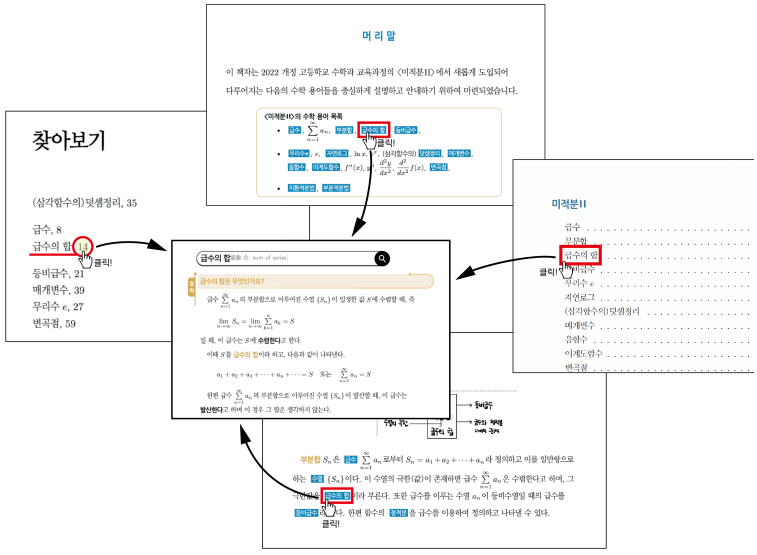
용어 설명 찾아가는 방법

방법1 위 목록의 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.

방법2 [차례]에 있는 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.

방법3 맨 뒤 [찾아보기]에 있는 용어 옆 숫자(쪽수)를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.

방법4 자료 본문에서 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.



고등학생이 각 수학 용어를 이해하는 과정에서 자연스럽게 제기할 수 있는 질문 및 교사가 고등학생의 수학적 사고를 유도하기 위해 제기할 수 있는 질문을 중심으로 묻고 답하는 문답 방식으로 자료를 구성하였습니다. 이 자료가 고등학교 수학 용어 및 관련 학습 내용에 대하여 학생 스스로 질문을 던지고 질문에 대한 답을 탐색하는 습관을 형성하는데 기여하고, 수학 교사가 학생의 이런 습관 형성과 의미 있는 수학적 사고 활동을 안내하는 데 활용되기를 바랍니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점

이 자료는 고등학생이 각 수학 용어를 정확하고 명료하게 이해하기 위해 필요한 용어의 뜻(정의), 표현, 구체적인 예 등의 기본적인 내용 뿐 아니라 더 알아보기 질문을 통해 그 용어에 대한 고등학생의 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용, 더 나아가 용어 관련 다양한 참고 자료와 대학 수준의 보다 심화 확장된 내용까지 심화(참고)를 통해 폭넓게 다루고자 하였습니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점을 살펴보면 다음과 같습니다.

[자료의 짜임새]

	기본	더 알아보기	심화(참고)
내용	고등학생의 수학 용어에 대한 정확하고 명료한 이해에 필요한 정의, 의미, 예 등의 기본 내용으로 구성	고등학생의 수학 용어에 대한 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용으로 구성	대학 수준의 심화 학습을 원하는 고등학생, 수업을 준비하는 교사(혹은 예비교사)를 위한 [기본]과 [더 알아보기]의 내용을 더욱 심화한 내용 및 참고 자료로 활용 가능한 내용으로 구성
특징	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 모든 내용이 용어가 도입되는 과목 교육과정의 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 범위를 벗어날 수 있음. 단, 설명에 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙은 해당 과목 교육과정 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용 및 이때 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어날 수 있음

[자료의 활용]

고등학생	수학 용어에 대한 교과서 중심의 기본적이고 핵심적인 의미와 내용을 이해를 원하는 학생은 기본에 해당하는 내용을 읽고 공부하면 됩니다. 기본에 해당하는 내용을 토대로 좀 더 깊이 있는 이해를 원하는 학생은 더 알아보기의 내용을 읽으면 도움이 될 수 있습니다. 심화(참고)의 내용은 참고 자료로서 "아, 이런 내용도 있구나." 정도로 이해하거나, 읽지 않아도 됩니다.
(예비)교사	기본에 해당하는 내용은 모든 학생에게 가르쳐야 할 내용입니다. 더 알아보기와 심화(참고)의 내용은 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정 범위를 벗어난 학생의 질문에 답하거나 심화 탐구 활동 자료로 활용 가능합니다.

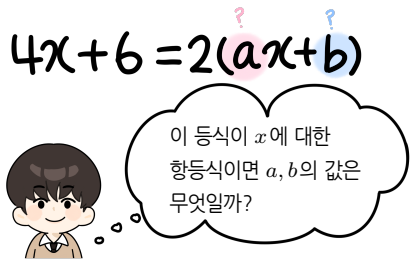
[활용 시 유의점]

더 알아보기와 심화(참고)의 내용 중에는 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어나는 내용이 포함되어 있습니다. 특히 심화(참고)의 내용은 대학 학부 수준의 내용을 포함하기도 합니다. 그러므로 고등학교 수학 교사가 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용할 때는 신중한 주의가 필요합니다. 특히 평가에 교육과정의 범위를 벗어나는 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용하지 않도록 유의할 필요가 있습니다.

미정계수법 未定係數法; method of undetermined coefficients

정의

미정계수법은 무엇인가요?



항등식의 뜻과 성질을 이용하여 주어진 항등식에서 미지의 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라고 한다.

미정계수법에는 항등식의 뜻을 이용하여 문자에 적당한 수를 대입함으로써 계수를 정하는 방법인 **수치대입법**과 항등식의 성질을 이용하여 양변의 동류항의 계수를 비교함으로써 계수를 정하는 방법인 **계수비교법**이 있다.

항등식의 뜻	등식 $2x+3x=5x$와 같이 x에 어떤 값을 대입하더라도 등식이 항상 성립하는 등식을 x에 대한 **항등식**이라 한다.
항등식의 성질	❶ $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다. ❷ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.



항등식에서 양변의 동류항의 계수는 왜 같아야 하나요?

❶ $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입하더라도 등식이 성립한다. 이 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$$c=0, \quad a+b+c=0, \quad a-b+c=0$$

이다. $c=0$을 나머지 두 식에 대입한 후 연립하여 풀면 $a=0$, $b=0$이다. 따라서 $a=b=c=0$이다.

❷ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이라고 하자. 이 등식에서 우변에

있는 항을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$$

이 되고, 이 등식은 x에 대한 항등식이므로 ❶에 의하여 $a-a'=b-b'=c-c'=0$ 이다. 따라서, $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

예

미정계수법이 실제로 어떻게 쓰이는지 예를 들어 설명해 주세요.

x^2+3x+2를 $x-2$로 나누었을 때, 몫을 $px+q$, 나머지를 r라 하자. 상수 p, q, r의 값을 정하시오.

풀이 x^2+3x+2를 $x-2$를 나누었을 때, 몫이 $px+q$, 나머지가 r이므로 x에 대한 항등식

$$x^2+3x+2=(x-2)(px+q)+r \quad \cdots\cdots ①$$

를 얻을 수 있다. 이제 이 등식에서 미지의 계수 p, q, r를 정해보자.

❶ 항등식의 뜻을 이용하는 수치대입법에 의한 풀이

등식 ①의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입해도 등식이 성립해야 하므로

$$-2q+r=2, \quad -p-q+r=6, \quad r=12$$

이고 $r=12$를 나머지 두 식에 대입한 후 연립하여 풀면 $p=1$, $q=5$이다. 따라서 $p=1$, $q=5$, $r=12$이다.

❷ 항등식의 성질을 이용하는 계수비교법에 의한 풀이

등식 ①의 우변을 전개하여 정리하면

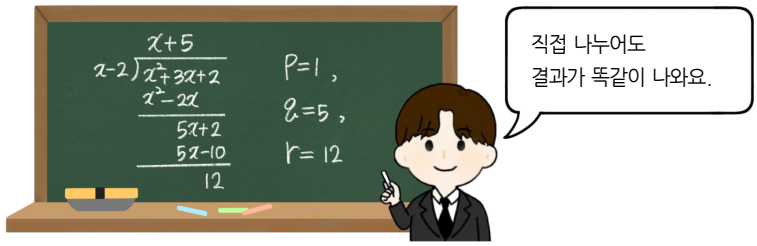
$$x^2+3x+2=px^2+(-2p+q)x-2q+r \quad \cdots\cdots ②$$

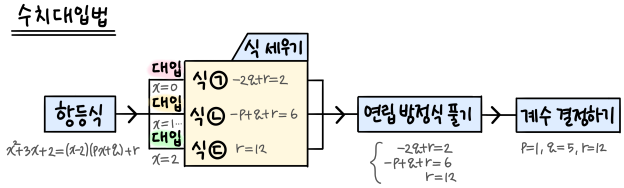
이다. 등식 ②의 양변에서 동류항의 계수를 비교하면

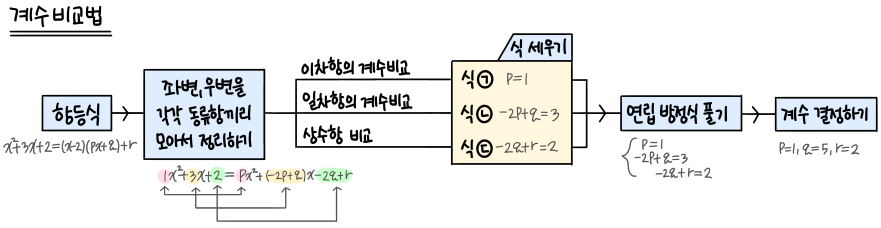
$$p=1, \quad -2p+q=3, \quad -2q+r=2$$

이다. 따라서 $p=1$, $q=5$, $r=12$이다.

답 $p=1$, $q=5$, $r=12$







개념

수치대입법을 쓸 때 어떤 수를 대입해야 하는지 어떻게 정해요?

x에 대한 항등식

$$2x^2+x-7=a(x+1)(x-1)+b(x-1)(x-2)+c(x+1)(x-2) \quad \cdots\cdots ①$$

에서 상수 a, b, c의 값을 정하시오.

풀이 ❶ $x=-2$, $x=0$, $x=2$를 각각 대입한 풀이

등식 ①의 양변에 $x=-2$, $x=0$, $x=2$를 각각 대입해도 등식이 성립해야 하므로

$$3a+12b+4c=-1, \quad -a+2b-2c=-7, \quad 3a=3$$

이다. 마지막 식에서 $a=1$임을 알 수 있다. 나머지 두 식의 양변에 $a=1$을 각각 대입하면

$$\begin{cases} 12b+4c=-4 \\ 2b-2c=-6 \end{cases}$$

이고 이 연립방정식을 풀면 $b=-1$, $c=2$이다. 따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=2$

이다.

❷ $x=-1$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입한 풀이

등식 ①의 양변에 $x=-1$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입해도 등식이 성립해야 하므로

$$6b=-6, \quad -2c=-4, \quad 3a=3$$

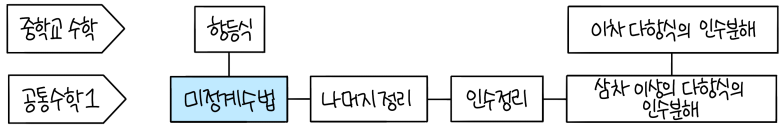
이다. 따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=2$이다.

답 $a=1$, $b=-1$, $c=2$

개념

미정계수법은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

미정계수법은 나머지정리, 인수정리, 다항식의 인수분해 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



미정계수법은 주어진 항등식에서 미지의 계수를 정하는 방법으로 다양하게 활용할 수 있다. 실제로 미정계수법을 이용하면 다항식의 나눗셈을 직접 하지 않고도 다항식의 몫과 나머지를 계산할 수 있다. 특히 미정계수법을 이용하면 다항식을 일차식으로 나눈 나머지를 나눗셈을 직접 하지 않고도 간단하게 구할 수 있는데, 이를 나머지정리라고 한다.

나머지정리의 특수한 경우로 인수정리가 있다. 인수정리는 삼차 이상의 다항식을 인수분해할 때 매우 유용하게 쓰인다.

나머지정리 나머지定理; remainder theorem

정의

나머지정리는 무엇인가요?

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 간단하게 계산할 수 있는 방법은 다음과 같다. 이것을 **나머지정리**라고 한다.

> 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때, 나머지를 R라 하면 $R=P(\alpha)$이다.



왜 이렇게 계산할 수 있는지 설명해 주세요.

다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$ (α는 실수)로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하자. 그러면 R는 일차식 $x-\alpha$보다 차수가 낮아야 하므로 상수이다. 또한, x에 관한 항등식

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R \quad (R\text{는 상수})$$

를 얻을 수 있고, 이 항등식의 양변에 $x=\alpha$를 대입하면 $P(\alpha)=R$임을 알 수 있다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

다항식 $P(x)=x^3-3x^2+2x+5$를 $x-2$로 나누었을 때, 나머지를 R라 하면 $R=P(2)=5$이다. 실제로 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누어 보면, 몫은 x^2-x이고 나머지는 5가 됨을 알 수 있다.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad -x \\ \hline x-2 & x^3 \quad -3x^2 \quad +2x \quad +5 \\ & x^3 \quad -2x^2 \\ \hline & \quad -x^2 \quad +2x \\ & \quad -x^2 \quad +2x \\ \hline & \quad\quad\quad\quad\quad \boxed{5} \end{array}$$

$$x^3-3x^2+2x+5=(x-2)(x^2-x)+5$$

더 알아보기

$x=\alpha$를 대입하면 $x-\alpha=0$인데, 그럼 0으로 나누게 되는 건가요?

다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하자. 이때 $x=\alpha$를 대입하여 "$P(\alpha)$를 0으로 나누면 몫이 $Q(0)$, 나머지가 R이다."와 같이 '0으로 나누는 상황'으로 해석하는 것은 부적절하다.

다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R라는 것은 $x-\alpha$와 $Q(x)$를 곱한 것을 다항식 $P(x)$에서 덜어내면 R가 남는다는 것을 의미한다. 이로부터 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$라는 항등식을 얻을 수 있고, 이 항등식의 양변에 $x=\alpha$를 대입하면 $P(\alpha)=R$임을 확인할 수 있다. 이 과정에는 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈과 항등식의 뜻만이 사용될 뿐, '0으로 나누는 과정'은 전혀 포함되지 않는다.

개념

직접 나누면 되는데, 왜 나머지정리를 배워야 하나요?

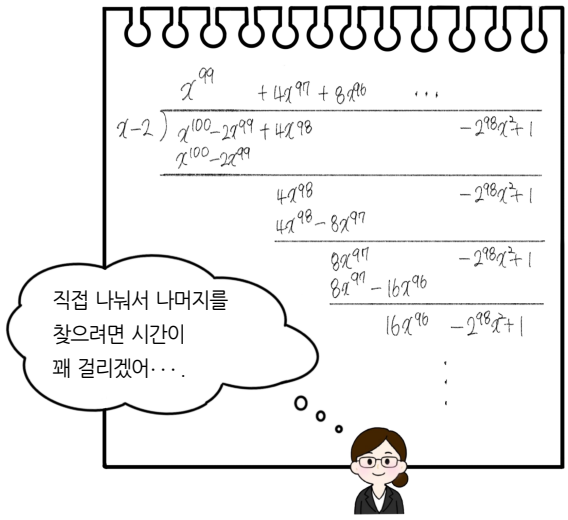
다항식

$$P(x)=x^{100}-2x^{99}+4x^{98}-2^{98}x^2+1$$

을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 찾아보자. 나머지를 찾기 위해서 $P(x)$를 $x-2$로 직접 나누려면 많은 시간이 걸린다. 반면에 나머지정리를 이용하면 나머지가

$$P(2)=2^{100}-2\times 2^{99}+4\times 2^{98}-2^{98}\times 2^2+1=1$$

임을 쉽게 알 수 있다.



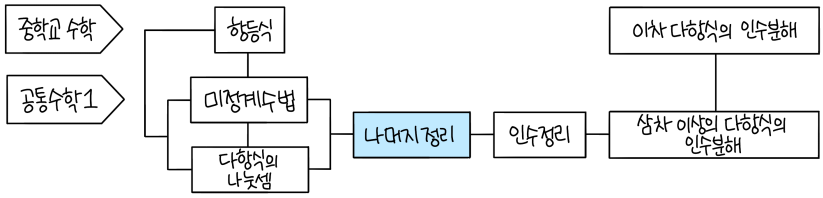
또한, 나머지정리로부터 다항식과 관련된 일반적인 성질을 이끌어낼 수 있다. 수학자 크리스탈(G. Chrystal, 1851-1911)의 저서 『Algebra: an elementary textbook for the higher classes of secondary schools and for colleges(1886)』에는 나머지정리(remainder theorem)라는 용어가 사용되었고, 그 응용으로 다음 내용을 소개하고 있다.

$\cdots$ 을	$\sim$로 나누었을 때	나머지는	즉,
$x^n - a^n$	$x - a$	$a^n - a^n$	항상 0이다.
$x^n - a^n$	$x + a$	$(-a)^n - a^n$	n이 짝수이면 0, n이 홀수이면 $-2a^n$이다.
$x^n + a^n$	$x - a$	$a^n + a^n$	항상 $2a^n$이다.
$x^n + a^n$	$x + a$	$(-a)^n + a^n$	n이 홀수이면 0, n이 짝수이면 $2a^n$이다.

개념

나머지정리는 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

나머지정리는 미정계수법, 인수정리와 밀접한 관련이 있다.



나머지정리는 항등식

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R \quad (P(x), Q(x)\text{는 다항식, } \alpha, R\text{는 상수})$$

의 양변에 $x=\alpha$를 대입하여 상수 R의 값을 정하는 미정계수법에서 나오는 사실이다.

이차방정식 $x^2-3x+2=0$을 풀 때 이차식을 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$와 같이 인수분해하여 해 $x=1$ 또는 $x=2$를 찾았던 것처럼, 삼차 이상의 방정식을 풀기 위해서도 다항식을 인수분해하는 과정이 필요하다. 다항식 $P(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 가지는지 판별하기 위해서는 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지가 0인지 확인하면 충분하다. 나머지만을 계산하면 충분하므로 나머지정리가 활용되고, 이로부터 인수정리가 만들어진다.

개념

나머지정리는 더 일반적인 형태로 확장할 수 있나요?



$x-\alpha$ 꼴이 아닌 $ax+b(a\neq 0)$ 꼴의 일차식으로 나누면 어떻게 되나요?

다항식 $P(x)$를 $ax+b(a, b$는 실수, $a\neq 0)$로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 x에 관한 항등식

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+R \quad (R\text{는 상수})$$

를 얻을 수 있고, 이 항등식의 양변에 $x=-\frac{b}{a}$를 대입하면 $P\left(-\frac{b}{a}\right)=R$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> 다항식 $P(x)$를 $ax+b(a\neq 0)$로 나누었을 때, 나머지를 R라 하면 $R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

예를 들어, 다항식 $P(x)=32x^4-2x+k(k$는 상수)를 일차식 $2x+1$로 나누었을 때, 나머지가 5가 되도록 하는 상수 k를 찾아보자.

$P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때 나머지는

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=32\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+k=3+k$$

이므로 $3+k=5$로부터 $k=2$임을 알 수 있다.



나머지정리는 일차식이 아니라 이차식으로 나눌 때도 사용할 수 있나요?

다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때 나머지가 -1이고, $x-4$로 나누었을 때 나머지가 5라 하자. 이때 $P(x)$를 이차식 $(x-1)(x-4)$으로 나누었을 때, 나머지를 찾아보자.

$P(x)$를 $(x-1)(x-4)$로 나누었을 때 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b(a,b$는 상수$)$라 할 수 있다. 그러면 항등식

$$P(x)=(x-1)(x-4)Q(x)+ax+b$$

를 얻을 수 있고, 나머지정리에 의해 $-1=P(1)=a+b$, $5=P(4)=4a+b$이다. 이 식을 풀면 $a=2$, $b=-3$이므로 찾으려는 나머지는 $2x-3$이다.

이와 같이, 일반적으로 서로 다른 상수 α, β에 대하여 다항식 $P(x)$를 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누었을 때 나머지는 일차 이하의 다항식이 되며, 나머지정리를 이용하여 $P(\alpha)$와 $P(\beta)$의 값을 통해 그 나머지를 찾을 수 있다.

심화(참고)

- **나머지정리의 더 일반적인 형태는 없나요?**

  다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때, 나머지를 R라 하면 $R=P(\alpha)$이다. 이와 마찬가지로 $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$의 값을 통해 $P(x)$를 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 나누었을 때 나머지를 찾을 수 있다.

  서로 다른 상수 α,β,γ에 대하여 다항식 $P(x)$를 삼차식 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 나누었을 때, 나머지를 $R(x)$라 하면 $R(x)$는 다음과 같다.

  $$R(x)=P(\alpha)\times\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+P(\beta)\times\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+P(\gamma)\times\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

  일반적으로 서로 다른 상수 $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$에 대하여 다항식 $\ell_i(x)(i=0,1,\ldots,n)$를

  $$\ell_i(x)=\frac{(x-\alpha_0)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_0)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)}$$

  이라 하자. 그러면 다항식 $P(x)$를 $(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$으로 나누었을 때, 나머지를 $R(x)$라 하면 $R(x)$는 다음과 같다.

  $$R(x)=\sum_{i=0}^{n}P(\alpha_i)\ell_i(x)$$

이를 라그랑주의 보간다항식(**補間多項式**, interpolating polynomial)이라 한다. 라그랑주의 보간다항식은 둘 이상의 변숫값에 대한 함숫값을 알고서, 그것들 사이의 임의의 변숫값에 대한 함숫값이나 그 근삿값을 찾을 때 사용된다.

● **다항식 $P(x)$를 $(x-\alpha)^2$으로 나누었을 때, 나머지를 찾는 방법도 있나요?**

예를 들어 다항식 $x^{100}-2x+3$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때, 나머지를 찾아보자.

$x^{100}-2x+3$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면 항등식

$$x^{100}-2x+3=(x+1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ①$$

를 얻을 수 있다. 또한, 양변을 미분하여 다음 항등식을 얻을 수 있다.

$$100x^{99}-2=(x+1)\{2Q(x)+(x+1)Q'(x)\}+a \quad \cdots\cdots ②$$

식 ①, ②의 양변에 $x=-1$을 각각 대입하면,

$$-a+b=6, \quad a=-102$$

이다. 이 식을 풀면 $a=-102$, $b=-96$이므로 찾으려는 나머지는 $-102x-96$이다.

이처럼, 일반적으로 다항식 $P(x)$를 $(x-\alpha)^2$으로 나누었을 때, $P(\alpha)$와 $P'(\alpha)$의 값을 이용하여 나머지를 계산할 수 있다.

인수정리因數定理; factor theorem

정의

인수정리는 무엇인가요?

일차식 $x-\alpha$가 다항식 $P(x)$의 인수인지 판별하는 방법은 다음과 같다. 이것을 **인수정리**라고 한다.

> 다항식 $P(x)$에 대하여
>
> ❶ $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
>
> ❷ $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다.

인수정리는 나머지정리로부터 이끌어낼 수 있다. 나머지정리에 의하여 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha)$이다. 따라서 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

한편 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $R=0$이므로 항등식 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$를 얻을 수 있다. 이 항등식의 양변에 $x=\alpha$를 대입하면 $P(\alpha)=0$임을 알 수 있다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

$x+3$, $x-2$가 각각 다항식 $P(x)=x^3+3x^2-x-3$의 인수인지 판별해 보자.

$$P(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2-(-3)-3=0$$

이므로 $P(x)$는 $x+3$으로 나누어떨어진다. 즉, $x+3$은 $P(x)$의 인수이다. 한편,

$$P(2)=2^3+3\times2^2-2-3=15\neq0$$

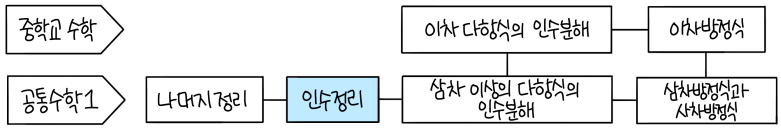
이므로 $x-2$는 $P(x)$의 인수가 아니다.

이처럼 인수정리를 이용하면 복잡한 나눗셈 과정을 거치지 않고도, 다항식 $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지는지 쉽게 판별할 수 있다.

개념

인수정리는 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

인수정리는 미정계수법, 나머지정리, 다항식의 인수분해 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



인수정리는 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지가 0인지 판별하는 데 사용하는 정리이며, 이는 **미정계수법**을 이용하여 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 계산하는 방법인 **나머지정리**의 특수한 경우이다.

인수정리를 이용하여 일차식 $x-\alpha$가 다항식 $P(x)$의 인수임을 확인하고 나면 식을 직접 나누어 몫 $Q(x)$을 찾아

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)$$

와 같이 $P(x)$를 인수분해할 수 있다.

위 예에서 $x+3$이 x^3+3x^2-x-3의 인수임을 확인하였으므로 나눗셈을 통해

$$x^3+3x^2-x-3=(x+3)(x^2-1)$$

로 인수분해할 수 있다.

이처럼 인수정리는 다항식을 인수분해할 때 자주 활용된다.

더 알아보기

다항식의 인수를 찾을 때 모든 수를 다 대입하여야 하나요?

다항식 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d$는 정수, $a\neq 0)$에 대하여

$$P\left(\frac{p}{q}\right)=0$$

인 유리수 $\frac{p}{q}$(p는 정수, q는 자연수, $|p|$와 q는 서로소)는 어떤 성질이 있는지 알아보

자.

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^3+b\left(\frac{p}{q}\right)^2+c\left(\frac{p}{q}\right)+d=0$$

의 양변에 p^3을 곱하면

$$ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3=0$$

이므로 $ap^3=-q(bp^2+cpq+dq^2)$이다. 따라서 q는 $|a||p|^3$의 약수이고, q는 $|p|$와 서로소이므로 q는 $|a|$의 약수이다. 또한 $dq^3=-p(ap^2+bpq+cq^2)$이므로 $|p|$는 $|d|q^3$의 약수이다. $|p|$는 q와 서로소이므로 p는 $\pm$($|d|$의 약수)이다.

이로부터 다항식 $P(x)$에 대하여 $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$이 되도록 하는 유리수 $\frac{p}{q}$(p는 정수, q는 자연수, $|p|$와 q는 서로소)는 다음과 같은 꼴임을 알 수 있다.

$$\pm\frac{(\text{상수항의 절댓값의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 절댓값의 약수})}$$

조립제법組立除法; synthetic division

정의

조립제법은 무엇인가요?

다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

예

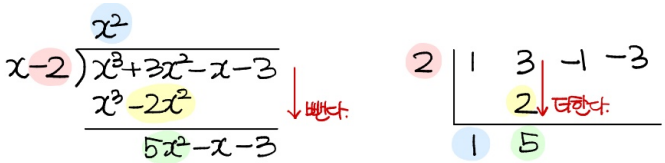
구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

예를 들어, 다항식 x^3+3x^2-x-3을 일차식 $x-2$로 나누었을 때, 몫과 나머지를 계산하는 과정을 단계별로 알아보자. 각 단계에서 왼쪽은 '**직접 나누는 방법**'이고 오른쪽은 '**계수만을 사용하는 방법**', 즉 조립제법을 나타낸다.

❶ x^3+3x^2-x-3에서 $x-2$의 x^2 배를 덜어낸다.

직접 나누는 방법에서는 x^3+3x^2-x-3에서 $x-2$의 x^2 배인 x^3-2x^2을 덜어낸 나머지 $5x^2-x-3$을 찾기 위해, x^3+3x^2-x-3에서 x^3-2x^2를 뺀다.

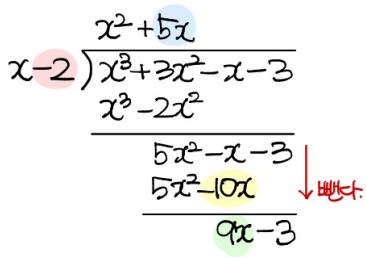
반면, 계수만을 사용하는 방법에서는 나누는 식의 상수항 -2의 부호를 바꿔서 2를 적고 위의 두 식을 더한 결과를 쓴다.

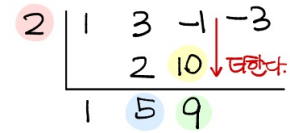


이 단계로부터 다음 등식을 얻는다.

$$x^3+3x^2-x-3=(x-2)\times x^2+(5x^2-x-3)$$

❷ $5x^2-x-3$에서 $x-2$의 $5x$ 배를 덜어낸다.

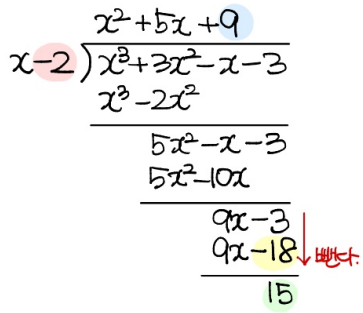


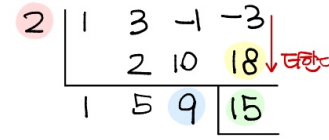


이 단계로부터 다음 등식을 얻는다.

$$5x^2 - x - 3 = (x-2) \times 5x + (9x-3)$$

❸ $9x-3$에서 $x-2$의 9배를 덜어낸다.





이 단계로부터 다음 등식을 얻는다.

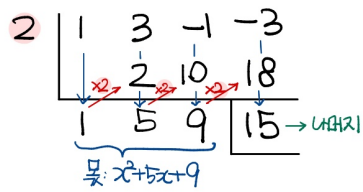
$$9x - 3 = (x-2) \times 9 + 15$$

지금까지의 단계를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - x - 3 &= (x-2) \times x^2 + (5x^2 - x - 3) \\ &= (x-2) \times x^2 + (x-2) \times 5x + (9x-3) \\ &= (x-2) \times x^2 + (x-2) \times 5x + (x-2) \times 9 + 15 \\ &= (x-2)(x^2 + 5x + 9) + 15 \end{aligned}$$

따라서 x^3+3x^2-x-3을 $x-2$로 나누었을 때, 몫은 x^2+5x+9이고 나머지는 15이다.

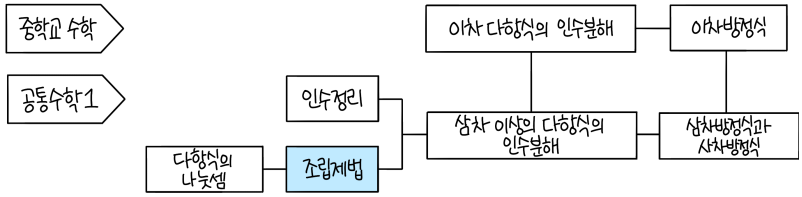
계수만을 사용하는 방법인 조립제법을 이용하면 위 모든 과정을 세 개의 줄로 표현할 수 있으므로, 다항식을 일차식 $x-\alpha$꼴로 나눌 때 조립제법은 유용하다.



개념

조립제법은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

조립제법은 다항식의 나눗셈, 인수정리, 다항식의 인수분해 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



조립제법은 다항식을 일차식으로 나눈 몫과 나머지를 계수만을 이용하여 계산하는 방법으로서 다항식을 일차식으로 나눌 때 유용하게 사용된다. 조립제법은 다항식을 인수분해할 때도 유용하게 사용될 수 있다. 주어진 다항식 $P(x)$을 인수분해하는 가장 기본적인 방법은 $P(x)$의 일차인수 $x-\alpha$를 찾는 것이다. $x-\alpha$가 $P(x)$의 일차인수인지 판별하기 위해서 인수정리를 이용할 수 있다. 즉, $P(\alpha)$가 0이 되는지 확인하면 된다. $P(x)$가 일차인수 $x-\alpha$를 가지는지 확인하였다면, $P(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫 $Q(x)$를 계산하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$와 같이 인수분해 할 수 있다. 이때, 일차식 $x-\alpha$로 나눈 몫을 계산할 때 조립제법을 이용하면 편리하다.

복소수複素數; complex number

정의

복소수가 무엇인가요?

제곱해서 -1이 되는 수를 i로 나타낼 때, $a+bi(a, b$는 실수$)$꼴로 나타내어지는 수를 **복소수**라고 한다.

실수

$$\underbrace{a + bi}_{\text{복소수}} \quad (i = \sqrt{-1})$$

허수단위 제곱해서 -1이 되는 새로운 수를 생각하고, 이 수를 기호로 i와 같이 나타낸다. 즉, $i^2 = -1$이며, 이때 i를 **허수단위**(虛數單位, imaginary unit)라 한다.

실수부분과 허수부분 복소수 $a+bi(a, b$는 실수$)$에 대하여 a를 이 복소수의 **실수부분**(實數部分, real part), b를 이 복소수의 **허수부분**(虛數部分, imaginary part)이라고 한다.

허수 실수가 아닌 복소수 $a+bi(b \neq 0)$를 **허수**(虛數, imaginary number)라 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ $-1+3i$, $\frac{1}{2}+\pi i$는 복소수이다.

❷ 실수 3, $\sqrt{2}$는 각각 $3+0i$, $\sqrt{2}+0i$와 같이 표현할 수 있으므로 복소수이다.

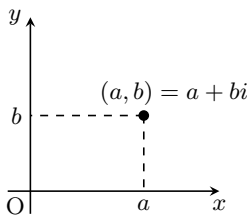
이처럼 모든 실수는 복소수이다.

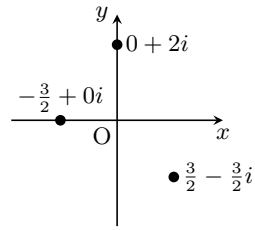
❸ $2i$도 $0+2i$로 표현할 수 있으므로 복소수이다.

더 알아보기

복소수를 시각적으로 나타낼 수는 없나요?

실수를 수직선 위의 점으로 나타내듯이, 복소수 $a+bi$(a, b는 실수)는 좌표평면에서 점 (a, b)로 생각할 수 있다.





의미

복소수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'복(複)'은 '겹치다', '여러 개가 섞이다'라는 뜻이며, '소(素)'는 '기본적인 요소'라는 뜻이다. 즉, 복소수는 두 개의 요**소**(실수)가 **복**합되어 있는 **수**를 의미한다.

複 겹옷 복　　素 본디 소/흴 소

또한, 'complex'는 '복잡한', '복합의'라는 뜻을 가진 영어 단어로, 'complex number'는 복소수의 한자 표현과 유사한 의미를 지니고 있다. 영어 단어 'complex'의 앞 글자를 따서, 복소수 전체의 집합을 보통 $\mathbf{C}$로 나타낸다.

$$\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b\text{는 실수}\}$$

더 알아보기

복소수는 왜 도입하였나요?

중학교에서 배운 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0,\ b^2 - 4ac \geq 0)$의 근의 공식은 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$이다. 이와 유사하게, 이차항이 없는 특수한 삼차방정

식 $x^3+px+q=0$의 근의 공식

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

도 있다. 여기서 실수 r에 대하여 $\sqrt[3]{r}$는 세제곱해서 r가 되는 수 중 실수를 나타낸다.

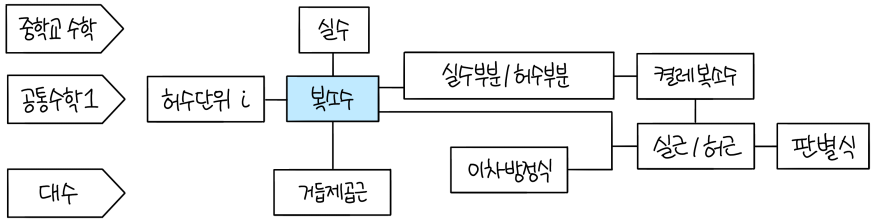
그런데 삼차방정식 $x^3=15x+4$는 세 개의 실수인 해를 가지지만, 근의 공식을 적용하는 과정에서 음수 -121의 제곱근, 즉 복소수 $11i$가 등장한다.

방정식의 실수인 해만을 고려할 때도, 일반적인 방정식의 해를 근의 공식으로 표현하는 과정에서 복소수의 도입이 필요하다. 제곱해서 음수가 되는 수를 생각하는 것이 이상해 보이지만, 이처럼 실수만을 다루는 문제에서도 복소수를 도입하면 문제를 더 간단하게 해결하거나 논리적으로 완결된 결론에 이를 수 있다.

개념

복소수는 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

복소수, 허수단위, 실수부분, 허수부분, 허수는 실근, 허근 켤레복소수 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



제곱하여 -1이 되는 새로운 수인 **허수단위**를 생각하고 문자 기호 i로 나타냄으로써, 실수에 실수가 아닌 **허수**를 첨가하여 **실수부분**과 **허수부분**으로 이루어진 **복소수**로 수의 범위를 확장할 수 있게 되었다. 이에 따라 방정식의 근도 실수인 근인 **실근** 뿐 아니라 허수인 근인 **허근**까지도 다룰 수 있게 되었다. 각각의 복소수는 짝을 이루는 **켤레복소수**를 가지며, 이는 계수가 실수인 방정식의 허근과 관련되는데, 어떤 복소수 z가 계수가 실수인 방정식의 한 허근이면, 그 켤레복소수 $\bar{z}$도 근이 된다는 것이다.

개념

복소수끼리도 더하거나 곱할 수 있나요?

두 실수를 더하고 곱한 것처럼 두 복소수도 서로 더하고 곱할 수 있다. 두 복소수를 더하거나 곱할 때는 i를 문자처럼 생각하고, 다항식의 덧셈·곱셈과 같은 방법으로 계산한다. 이 과정에서 i^2을 -1로 대체한다.

– 복소수의 덧셈

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

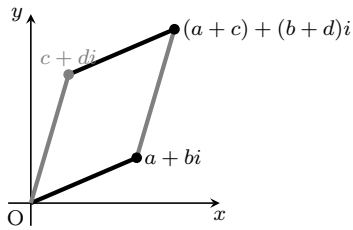
– 복소수의 곱셈

$$(a+bi)(c+di)\overset{①}{=}ac+\overset{②}{adi}+\overset{③}{bci}+\overset{④}{bdi^2}=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

더 알아보기

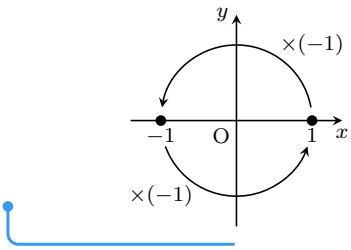
복소수의 덧셈과 곱셈도 시각적으로 나타낼 수 있나요?

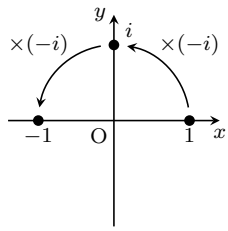
복소수 $a+bi$(a, b는 실수)를 좌표평면에서의 점 (a, b)로 생각하면 복소수의 덧셈은 다음 그림과 같이 표현할 수 있다.



복소수의 곱셈도 좌표평면에 나타낼 수 있다. 특히, $(-1)\times(-1)=1$이라는 성질에 주목하면, 음수 -1을 곱하는 것은 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 $180°$ 만큼 회전시키는 것으로 해석할 수 있다. 마찬가지로 $i\times i=-1$이라는 점에서, 복소수 i를 곱하는 것은 좌표평면에서 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 $90°$ 만큼

회전시키는 것으로 해석할 수 있다. 예를 들어, 복소수 1을 i와 곱하면 i가 되고, 이는 실수축 위의 점 $(1,0)$이 y축 위의 점 $(0,1)$으로 회전한 것과 같다. 다시 한 번 i를 곱하여 $i \times i = -1$이 되어, $(0,1)$이 $(-1,0)$으로 $90°$만큼 더 회전한 결과가 된다. 이처럼 복소수의 곱셈은 평면에서의 회전과 밀접하게 연결되어 있다.





개념

복소수 관련 오개념이나 오류에는 어떤 것들이 있나요?

다음 식에서 잘못된 부분은 어디일까?

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1 \ (\times)$$

음수 -1의 제곱근을 도입하면서 복소수를 정의하였다. 위 식에서 등식 $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)}$은 양수의 제곱근의 성질 중 '두 양수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.'가 음수 $a = b = -1$인 경우에도 성립한다고 가정하여 얻은 것이다. 그러나 이 성질은 음수에는 적용할 수 없음에 주의하여야 한다.

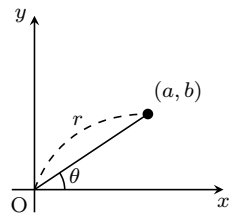
심화(참고)

- **복소수를 표현하는 다른 방법은 없나요?**

복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)를 좌표평면의 점 $\mathrm{P}(a, b)$로 볼 수 있고, 좌표평면의 점 P를 거리 $r(r > 0)$와 각의 크기 θ를 사용해서 표현할 수 있다.

r = (원점 O와 점 P 사이의 거리),
θ = (양의 x축(실수축)과 반직선 OP가 이루는 각의 크기)

라 하면, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$이므로 복소수 z는 $z = r \times \{\cos(\theta) + \sin(\theta)i\}$와 같이 나타낼 수 있으며, 이를 **복소수의 극형식**(polor form)이라 한다.



한편, 모든 실수 x에 대하여 다음이 성립함은 잘 알려진 사실이다.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \cos x &= 1 \qquad - \frac{x^2}{2!} \qquad + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \sin x &= \qquad \frac{x}{1!} \qquad - \frac{x^3}{3!} \qquad + \cdots \end{aligned}$$

또한, 실수 θ에 대하여

$$1 + \frac{\theta i}{1!} + \frac{(\theta i)^2}{2!} + \frac{(\theta i)^3}{3!} + \frac{(\theta i)^4}{4!} + \cdots = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta i^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta i^3}{3!} + \cdots\right)$$

이므로 위의 식으로부터 지수를 복소수까지 확장할 수 있다. 허수 θi에 대해

$$e^{\theta i} = \cos(\theta) + \sin(\theta) i$$

와 같이 정의할 수 있으며 이를 **오일러의 공식**이라고도 부른다.

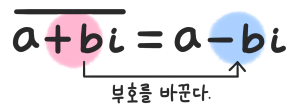
지금까지의 내용을 종합하면, 복소수 z는 $z = re^{\theta i}$와 같이 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

켤레복소수 켤레複素數; conjugate complex number

정의

켤레복소수는 무엇인가요?

복소수 $a+bi(a, b$는 실수$)$의 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 **켤레복소수**라 하고, 이것을 기호로 $\overline{a+bi}$와 같이 나타낸다.



예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

복소수 $1+2i$, $-3-2i$, 6, $-3i$의 켤레복소수를 각각 찾아보자.

❶ $\overline{1+2i}=1-2i$, $\overline{-3-2i}=-3+2i$

❷ $6=6+0i$이므로 $\overline{6}=6$이다.

이처럼 실수는 허수부분이 0이기 때문에, 실수의 켤레복소수는 원래 수와 같다.

❸ $\overline{-3i}=3i$

의미

켤레복소수라는 용어의 우리말, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

복소수 $a+bi(a, b$는 실수$)$의 켤레복소수는 $a-bi$이고, $a-bi$의 켤레복소수는 다시 $a+bi$가 되므로 이 둘은 서로 짝을 이루는 수라 할 수 있다. 이러한 특성은 '신, 양말, 버선, 방망이 따위의 짝이 되는 두 개를 한 벌로 세는 단위'를 뜻하는 '**켤레**'와 잘 어울린다고 할 수 있다.





짝이 되는 수라면, 왜 $a-bi$를 켤레복소수로 정했을까요?
$-a-bi$ 또는 $-a+bi$는 안 되는 이유가 있나요?

한편, 켤레복소수를 나타내는 영어 단어 conjugate는 '함께 하다(join together)'는 뜻을 가지며, 이 용어는 수학자 코시(Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857)가 그의 저서 『Cours d'Analyse algébrique』에서 사용하였다. '함께 하다'라는 의미는 켤레복소수의 다음 성질을 통해 잘 드러난다.

계수가 실수인 다항식 $P(x)$에 대하여, 복소수 α가 방정식 $P(x)=0$의 해이면 켤레복소수 $\overline{\alpha}$도 $P(x)=0$의 해이다.

개념

어떤 상황에서 켤레복소수가 필요할까요?

켤레복소수는 단순히 짝을 이루는 개념을 넘어서 복소수의 나눗셈이나, 계수가 실수인 이차방정식에서 복소수인 근을 다룰 때 자연스럽게 등장한다.

1 복소수의 나눗셈

복소수 $a+bi(a, b$는 실수$)$와 그 켤레복소수 $a-bi$를 곱하면

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-(-b^2)=a^2+b^2$$

이 되어 항상 실수가 된다.

이 성질을 이용하여, 복소수의 나눗셈을 할 때 분모의 켤레복소수를 분모와 분자에 각각 곱하여 분모를 실수로 바꾼 뒤 계산할 수 있다.

$\dfrac{4+7i}{3+2i}$를 $a+bi$의 꼴로 나타내시오. (단, a, b는 실수)

풀이 $\dfrac{4+7i}{3+2i}=\dfrac{(4+7i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{26+13i}{13}=2+i$

답 $2+i$

2 이차방정식의 근

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$이 허수인 근, 즉 허근 α을 가지면 α의 켤레복소수 $\overline{\alpha}$는 이 방정식의 다른 한 근이 된다. 따라서 이차식 ax^2+bx+c은

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$$

와 같이 인수분해 된다.

더 알아보기

켤레복소수의 성질은 어떤 것들이 있나요?

❶ 복소수 z에 대하여 $\overline{\overline{z}} = z$이다.

❷ 복소수 z_1, z_2에 대하여 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ 이고, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$이다.

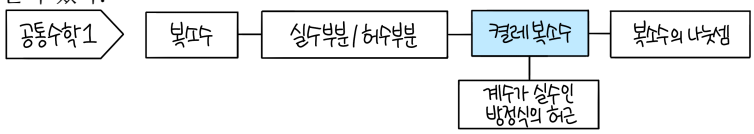
❸ z가 실수이면 $\overline{z} = z$이다.

❹ 거꾸로, $\overline{z} = z$이면 z는 실수이다.

개념

켤레복소수는 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

켤레복소수는 복소수, 실수부분, 허수부분, 허근, 복소수의 나눗셈 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



복소수 $a + bi(a, b$는 실수$)$의 **켤레복소수**는 $a + bi$의 실수부분은 그대로 둔 채 허수부분의 부호만 바꾼 복소수 $a - bi$를 말한다. 계수가 실수인 방정식 $f(x) = 0$의 허근 α에 대하여 α의 켤레복소수 $\overline{\alpha}$ 역시 항상 $f(x) = 0$의 근이 된다. 한편, 복소수의 켤레복소수는 복소수의 나눗셈을 할 때 즉, 분모가 복소수인 분수의 분모를 실수로 바꿀 때에도 유용하게 사용된다.

심화(참고)

● **복소수 α가 실수계수방정식 $P(x) = 0$의 해일 때, 왜 켤레복소수 $\overline{\alpha}$도 해가 되는 건가요?**

복소수 α가 n차방정식

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_0, a_1, \cdots, a_n \text{는 실수}, \ a_n \neq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

의 한 근이라고 하자. 그러면 $a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$이므로 켤레복소수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} a_n \overline{\alpha}^n + \cdots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 &= \overline{a_n}\ \overline{\alpha^n} + \cdots + \overline{a_1}\ \overline{\alpha} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\overline{\alpha}$도 방정식①의 근이다.

실근實根; real root과 허근虛根; imaginary root

정의

실근과 허근은 무엇인가요?

방정식의 근을 복소수의 범위까지 확장하여 생각하려고 한다.

방정식의 실수인 근을 **실근**, 허수인 근을 **허근**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

근의 공식을 이용하여 이차방정식의 근을 찾고, 실근과 허근으로 분류하여 보자.

❶ 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$을 풀면

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

이다. 근이 모두 실근이므로, 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 가진다.

❷ 이차방정식 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면

$$x = \frac{-(-2\sqrt{2}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \sqrt{2}$$

이다. 따라서 이 방정식은 중근을 가지며, 그 근은 실근이다.

❸ 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$을 풀면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

이다. 따라서 이 방정식은 실근을 가지지 않으며, 서로 다른 두 허근을 가진다. 이때 두 근은 서로 켤레복소수이다.

이차방정식의 근의 공식

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 근은 다음과 같다.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

더 알아보기

실근 한 개와 허근 한 개를 가지는 이차방정식도 있나요?

근의 공식을 살펴보면, 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$이 허근을 가지기 위해서는 b^2-4ac가 음수가 되어야 하고, 이때 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 가짐을 알 수 있다. 더욱이, 계수가 실수인 이차방정식은 다음 중 정확히 하나를 만족시킨다.

❶ 서로 다른 두 실근을 가진다.

❷ 중근인 실근을 가진다.

❸ 서로 다른 두 허근을 가진다.

따라서 계수가 실수인 이차방정식은 실근 한 개와 허근 한 개를 동시에 가질 수 없다.



그런데, 만약 계수가 실수가 아니라 복소수면 어떻게 되나요?

계수를 복소수의 범위까지 확장하면, 실근 하나와 허근 하나를 동시에 가지는 이차방정식도 있다.

예를 들어, 실근 2와 허근 $2+i$를 가지는 이차방정식으로 $(x-2)\{x-(2+i)\}=0$을 생각할 수 있다. 이 식의 좌변을 전개하여 정리하면

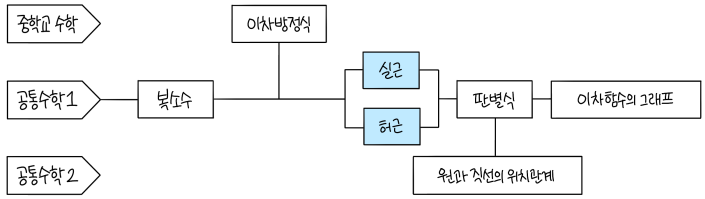
$$x^2-(4+i)x+4+2i=0$$

이므로, 이 방정식은 실근 하나와 허근 하나를 가지는 이차방정식이다.

개념

실근, 허근은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

실근, 허근은 방정식의 근, 복소수, 켤레복소수, 판별식 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



방정식의 근을 복소수의 범위까지 확장하여 생각하면 근을 **실근**과 **허근**으로 분류할 수

있다. 이때 주어진 방정식이 실근과 허근을 각각 몇 개씩 가지는지에 관한 문제가 자연스럽게 등장한다. 특히 계수가 실수인 이차방정식의 경우에는 근을 직접 계산하지 않고도, **판별식**을 이용하여 실근과 허근의 개수를 판단할 수 있다.

또한 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 허근 α를 가지면, 근의 공식으로부터 그 **켤레복소수** $\overline{\alpha}$도 역시 근이 됨을 알 수 있다.

계수가 실수인 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3-2i$일 때, a, b의 값을 정하시오.

풀이 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 허수 $3-2i$이므로 켤레복소수 $3+2i$도 역시 주어진 방정식의 근이 된다. 두 근의 합과 곱이 각각

$$(3-2i)+(3+2i)=6, \quad (3-2i)(3+2i)=13$$

이므로, 근과 계수의 관계에 의해 $a=-6, b=13$이다.

답 $a=-6, b=13$

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α와 β라 하면 두 근의 합과 곱은 각각 다음과 같다.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

두 수를 근으로 가지는 이차방정식

두 수 α와 β를 근으로 가지고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 다음과 같다.

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

심화(참고)

- **계수가 실수인 삼차방정식과 사차방정식을 실근의 개수와 허근의 개수로 분류하면 어떻게 되나요?**

  계수가 실수인 방정식이 허근 α를 가지면, 그 켤레복소수 $\overline{\alpha}$도 근이 된다. 이때 $\overline{\alpha}\neq\alpha$이고, 둘 다 허수이므로 허근은 반드시 쌍으로 나타난다. 따라서 계수가 실수인 방정식의 허근의 개수는 항상 짝수가 된다.

구분	실근의 개수	허근의 개수	예
계수가 실수인 삼차방정식	3	0	$(x-1)(x-2)(x-3)=0$
	2 (중근 + 단근)	0	$(x-1)^2(x-2)=0$
	1 (삼중근)	0	$(x-1)^3=0$
	1	2	$(x-1)(x^2+x+1)=0$
계수가 실수인 사차방정식	4	0	$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$
	3 (중근 + 두 단근)	0	$(x-1)^2(x-2)(x-3)=0$
	2 (삼중근 + 단근)	0	$(x-1)^3(x-2)=0$
	2 (두 쌍의 중근)	0	$(x-1)^2(x-2)^2=0$
	1 (사중근)	0	$(x-1)^4=0$
	2	2	$(x-1)^2(x^2+x+1)=0$
	0	4	$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$
	0	2 (중근)	$(x^2+x+1)^2=0$

판별식判別式; discriminant

정의

판별식은 무엇인가요?

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 판별할 수 있으므로 b^2-4ac를 이 이차방정식의 **판별식**이라 하고, 기호로 D와 같이 나타낸다. 즉,

$$D=b^2-4ac$$

이다.

개념

판별식은 무엇을 판별할 수 있나요?

이차방정식의 판별식을 이용하면, 근을 직접 구하지 않고 그 근이 실근인지 허근인지 판별할 수 있다.

계수가 모두 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로, 근이 실근인지 허근인지는 근호 $\sqrt{\ }$ 안에 식 b^2-4ac, 즉 판별식 D의 부호에 따라 결정할 수 있다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같이 분류할 수 있다.

1. $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 가진다.
2. $D=0$이면 중근인 실근을 가진다.
3. $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 가진다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

1. 이차방정식 $2x^2+5x-3=0$의 판별식은 $D=5^2-4\times2\times(-3)=49>0$ 이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가짐을 알 수 있다.

❷ 이차방정식 $4x^2 - 12x + 9 = 0$의 판별식은 $D = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0$

이므로 이 이차방정식은 중근인 실근을 가짐을 알 수 있다.

❸ 이차방정식 $x^2 + 2x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 가짐을 알 수 있다.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ $(a \neq 0)$의 판별식을 구하시오.

풀이 $D = (2b')^2 - 4 \times a \times c = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$

답 $4(b'^2 - ac)$



그러면 판별식 D 대신에 $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$의 부호를 고려해도 되겠네요?

이차방정식 $x^2 + 2x + 4 = 0$처럼 일차항의 계수가 짝수인 경우에는 판별식 D 대신에 $\frac{D}{4} = b'^2 - ac = 1^2 - 1 \times 4 = -3$을 이용하면 계산이 간단하다.

더 알아보기

판별식을 사용할 때 어떤 점에 주의해야 하나요?

판별식을 이용하여 이차방정식이 실근을 가지는지 허근을 가지는지 판단하려면, 이차방정식의 계수가 모두 실수임을 전제로 해야 한다.

이차방정식 $x^2 - (1 + 2i)x + (-1 + i) = 0$를 생각해 보자.

$(-1 - i) + (-i) = -(1 + 2i)$이고 $(-1 - i)(-i) = -1 + i$이므로

$$x^2 - (1 + 2i)x + (-1 + i) = 0,$$
$$(x - 1 - i)(x - i) = 0,$$

$x = 1 + i$ 또는 $x = i$이다. 즉, 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 가진다. 그런데 판별식을 계산하면

$$D = \{-(1 + 2i)\}^2 - 4 \times 1 \times (-1 + i) = 1 > 0$$

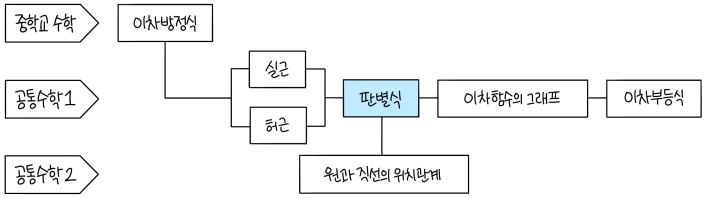
이 되어, 판별식의 부호만으로는 근이 허근임을 알 수 없다.

따라서 판별식을 이용하여 근의 성질을 판단할 때에는, 이차방정식의 계수가 실수인 경우에만 부호로 근의 성질을 판별할 수 있음을 주의해야 한다.

개념

판별식은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

판별식은 이차방정식의 근의 공식, 실근, 허근, 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계, 원과 직선의 위치 관계 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



판별식은 이차방정식의 근의 공식으로부터 나온 것으로, 계수가 실수인 이차방정식의 근이 **실근**인지, **허근**인지 판별할 때 이용할 수 있다. 이에 따라 판별식은 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구할 때 이용할 수 있고, 원과 직선의 위치관계를 결정할 때도 이용할 수 있다.

심화(참고)

- **판별식으로 알 수 있는 근의 다른 성질도 있나요?**

  계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 근은 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이므로, 판별식 $D=b^2-4ac$의 값에 따라 근의 성질을 다음과 같이 구분할 수 있다.

  ❶ D가 0이 아닌 유리수의 제곱꼴이면, 서로 다른 두 유리수 근을 가진다.

  ❷ $D>0$이지만 D가 유리수의 제곱꼴이 아니면, 서로 다른 두 무리수 근을 가진다.

  ❸ $D=0$이면 중근인 유리수 근을 가진다.

  ❹ $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 가진다.

  따라서 판별식은 근의 개수뿐만 아니라, 근이 유리수·무리수·허수 중 어느 형태인지를 판단하는 데에도 활용할 수 있다.

연립부등식聯立不等式; system of inequalities

정의

연립부등식은 무엇인가요?

두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 **연립부등식**이라고 한다.

또, 연립부등식에서 각 부등식의 공통인 해를 그 **연립부등식의 해**라 하고, 연립부등식의 해를 구하는 것을 '**연립부등식을 푼다.**'고 한다.

연립일차부등식	일차부등식으로 이루어진 연립부등식을 **연립일차부등식**이라고 한다.
이차부등식	부등식에서 우변에 있는 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때, $ax^2+bx+c>0,\quad ax^2+bx+c<0,$ $ax^2+bx+c\geq 0,\quad ax^2+bx+c\leq 0\quad (a\neq 0)$ 과 같이, 좌변이 미지수 x에 대한 이차식으로 나타내어지는 부등식을 x에 대한 **이차부등식**이라고 한다.
연립이차부등식	연립부등식에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식을 때, 이것을 **연립이차부등식**이라고 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

다음 연립부등식을 푸시오.

$$\begin{cases} x-2>-1 \\ 3x+1\leq 10 \end{cases}$$

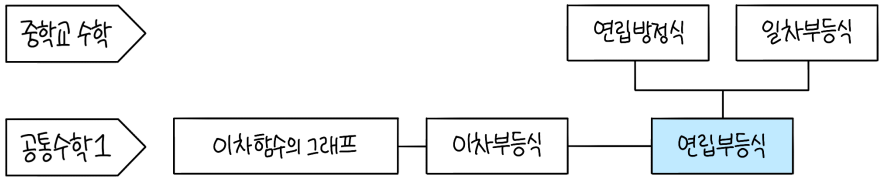
풀이 첫 번째 부등식을 풀면 $x>1$이고, 두 번째 부등식을 풀면 $x\leq 3$이다. 따라서 두 부등식을 동시에 만족시키는 모든 x의 범위는 $1<x\leq 3$이므로 주어진 연립부등식의 해는 $1<x\leq 3$이다.

답 $1<x\leq 3$

개념

연립부등식은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

연립부등식은 부등식, 일차부등식, 이차부등식, 연립방정식, 부분집합, 구간, 교집합 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



연립방정식과 마찬가지로 두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 **연립부등식**이라 하고 연립부등식의 해는 각 부등식의 공통인 해를 의미한다. 따라서 연립부등식의 해를 찾을 때는 일차부등식과 이차부등식의 풀이 방법에 따라 각 부등식을 풀고, 공통되는 해의 범위를 찾아 표현하면 되는데, 이것은 각 부등식의 해를 실수 전체의 집합의 부분집합인 구간을 이용하여 나타냈을 때 이들 집합의 교집합 즉, 겹치는 구간에 해당하는 것이다.

합의 법칙合의 法則; rule of sum

정의

경우의 수를 셀 때, 덧셈은 어떤 상황에서 사용하나요?

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다. 이것을 **합의 법칙**이라고 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

서로 다른 주사위 두 개를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우의 수를 구하시오.

풀이 눈의 수의 합은 2 이상 12 이하이므로, 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우는 5, 10이다.
각 경우를 순서쌍으로 나타내면

(i) 합이 5인 경우: $(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$의 4가지,

(ii) 합이 10인 경우: $(4,6), (5,5), (6,4)$의 3가지

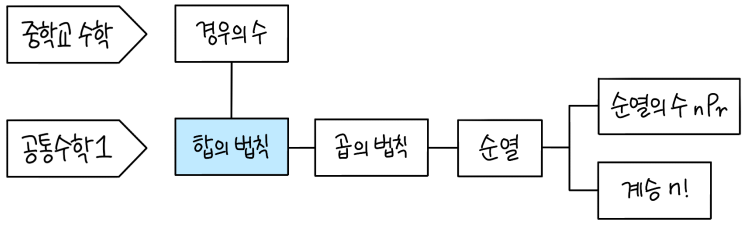
가 있다. 따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $4+3=7$이다.

답 7

개념

합의 법칙은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

합의 법칙은 〈중학교 수학〉에서 다룬 경우의 수를 구하는 방법의 일종으로 집합, 원소, (집합의)서로소, 합집합, 곱의 법칙, 순열, 계승, 조합 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



합의 법칙은 경우의 수를 세는 가장 기본적인 방법으로서 기준에 따라 동시에 일어나지 않도록 사건을 나누고, 각 사건이 일어나는 경우의 수를 더하여 전체 경우의 수를 계산하는 원리이다. 이것은 서로소인 두 집합의 합집합의 원소의 개수를 각 집합의 원소의 개수를 더하여 구하는 것과 같은 원리이다.

기준에 따라 동시에 일어나지 않도록 사건을 나누었을 때, 각 사건이 일어나는 경우의 수가 같을 때는 같은 수를 반복하여 더함으로써 경우의 수를 구하게 되므로 이러한 상황에서는 자연스럽게 곱셈을 이용하여 경우의 수를 계산하게 된다. 이로부터 곱의 법칙을 얻을 수 있다. 즉, 곱의 법칙은 합의 법칙의 특수한 경우에 해당한다. 곱의 법칙을 사용하는 특별한 경우로서 서로 다른 대상 중 일부 또는 전체를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수를 계산할 수 있으며, 이를 계승을 이용하여 나타낼 수 있다. 순열의 수는 서로 다른 대상 중 일부를 택하는 조합의 수와도 관련된다.

곱의 법칙곱의 法則; rule of product

정의

경우의 수를 셀 때, 곱셈은 어떤 상황에서 사용하나요?

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 또는 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다. 이것을 **곱의 법칙**이라고 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

첫 번째 자리는 $2, 4, 6, 8$ 중 하나를 택하고, 두 번째 자리는 $5, 6, 7, 8, 9$ 중 하나를 택할 때, 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수를 구하시오.

풀이 첫 번째 자리를 2로 정했을 때, 두 번째 자리로 선택할 수 있는 경우는 5가지이다. 마찬가지로 첫 번째 자리를 4로 정했을 때, 두 번째 자리로 선택할 수 있는 경우도 5가지이다.

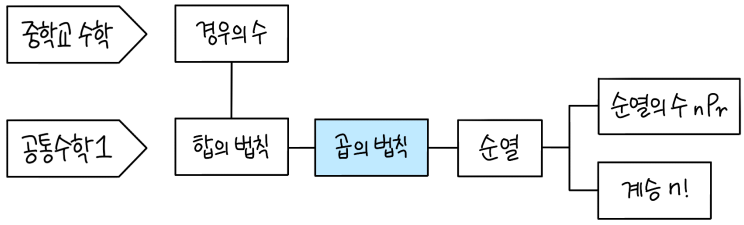
첫 번째 자리를 어떻게 선택하더라도 그 각각의 경우의 두 번째 자리로 선택할 수 있는 경우는 5가지이다. 첫 번째 자리를 선택하는 방법은 4가지이다. 따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $4 \times 5 = 20$이다.

답 20개

개념

곱의 법칙은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

곱의 법칙은 경우의 수, 합의 법칙, 순열, 계승, 조합 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



합의 법칙과 **곱의 법칙**은 경우의 수를 세는 가장 기본적인 두 방법이다. 합의 법칙은 기준에 따라 동시에 일어나지 않도록 사건을 나누고, 각 사건이 일어나는 경우의 수를

더하여 전체 경우의 수를 계산하는 방법이다. 이때 각 사건이 일어나는 경우의 수가 같을 때는 같은 수를 반복하여 더함으로써 경우를 구하게 되므로 이러한 상황에서는 자연스럽게 곱셈을 이용하여 경우의 수를 계산하게 된다. 이것이 바로 곱의 법칙이다. 즉, 곱의 법칙은 합의 법칙의 특수한 경우에 해당한다.

곱의 법칙을 사용하여 서로 다른 대상 중 일부 또는 전체를 택하여 일렬로 나열하는 **순열**의 수를 계산할 수 있고, 이는 **계승**을 이용하여 나타낼 수 있다. 또 순열의 수는 서로 다른 대상 중 일부를 택하는 **조합**의 수와도 관련된다.

순열(順列; permutation)

정의

순열은 무엇인가요?

서로 다른 n개에서 $r(0 < r \leq n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r를 택하는 **순열**이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$과 같이 나타낸다.

의미

순열이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'순하다' 는 뜻을 가진 '순(順)' 은 '차례' 나 '순서' 를 의미하고, '열(列)' 은 '늘어놓다' , '펼쳐 놓다' 는 뜻을 가진다. 따라서 '순열' 은 어떤 대상들을 일정한 **순**서대로 나**열**하는 것을 의미한다.

順 순할 순　　列 벌일 렬(열)

개념

순열은 구체적으로 어떤 상황에서 사용되나요?

다음은 모두 '서로 다른 5개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 것', 즉 5개에서 2개를 택하는 순열이다.

❶ 문자 a, b, c, d, e에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 것

❷ 다섯 명의 학생 중에서 회장과 부회장을 각각 1명씩 선출하는 것

❸ 다섯 개의 도시 중에서 1일차와 2일차에 각각 방문할 도시를 정하는 것

따라서 ❶, ❷, ❸의 경우의 수는 모두 순열의 수 ${}_5\mathrm{P}_2$와 같다.

❶의 경우를 모두 나열하면 다음과 같다.

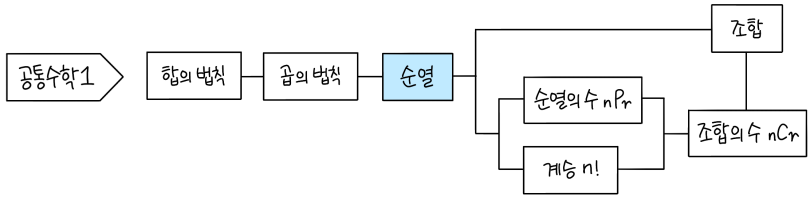
ab	ac	ad	ae
ba	bc	bd	be
ca	cb	cd	ce
da	db	dc	de
ea	eb	ec	ed

따라서 순열의 수 ${}_5P_2$는 20임을 알 수 있다.

개념

순열은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

순열은 합의 법칙, 곱의 법칙, 계승, 조합 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



순열은 서로 다른 대상 중 일부 또는 전체를 택하여 일렬로 나열하는 것으로 순열의 수는 **합의 법칙**의 특수한 경우에 해당하는 **곱의 법칙**을 사용하여 계산할 수 있고, 이를 **계승**을 이용하여 나타낼 수 있다. 한편 순열과는 달리 서로 다른 대상 중 일부 또는 전체를 순서를 생각하지 않고 선택하기만 하는 것을 **조합**이라 한다.

계승階乘; factorial

정의

계승은 무엇인가요?

1부터 n까지의 모든 자연수를 곱한 것을 n의 **계승**이라 하고, 기호로 $n!$과 같이 나타낸다. 즉,

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

이다.

$n!$은 'n의 계승' 또는 'n 팩토리얼(factorial)'이라고 읽는다.

개념

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

3!과 5!을 각각 계산하시오.

풀이 ❶ $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

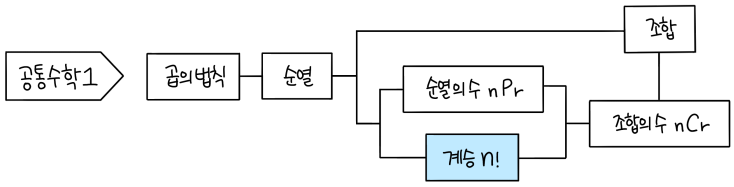
❷ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

답 6, 120

개념

계승은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

계승은 곱의 법칙, 순열, 조합 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



계승은 1부터 주어진 자연수까지의 곱을 간단히 나타낸 것으로서 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 **순열**의 수이다. **곱의 법칙**과 계승을 이용하면 서로 다른 n개의 대상에서 r개를 택하여 나열하는 순열의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{r!}$과 같이 표현할 수 있으며, **조합**의 수는 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$과 같이 표현할 수 있다.

조합組合; combination

정의

조합은 무엇인가요?

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r(0 < r \leq n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$과 같이 나타낸다.

의미

조합이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'조(組)'는 '짜다, 조직하다'를 의미하고, '합(合)'은 '합하다, 모으다'는 뜻을 가진다. 따라서 '조합'은 어떤 대상들을 **조**립하여 하나로 통**합**하는 것을 의미한다.

組 짤 조　　合 합할 합

'하나의 단일체를 만들도록 결합하다'라는 뜻의 동사 combine의 명사형 combination은, '조합(**組合**)'이라는 한자 표현과 같은 의미를 가진다.

개념

조합은 구체적으로 어떤 상황에서 사용되나요?

다음은 모두 '서로 다른 5개에서 순서를 생각하지 않고 2개를 택하는 것', 즉 5개에서 2개를 택하는 조합이다.

❶ 문자 a, b, c, d, e에서 2개를 택하는 것

❷ 다섯 명의 학생 중에서 임원을 2명을 선출하는 것

❸ 원 위의 서로 다른 다섯 개의 점 중에서 두 점을 이어 선분을 만드는 것

따라서 ❶, ❷, ❸의 경우의 수는 모두 조합의 수 ${}_5\mathrm{C}_2$와 같다.

❶의 경우를 모두 나열하면 다음과 같다.

a와 b　a와 c　a와 d　a와 e　b와 c
b와 d　b와 e　c와 d　c와 e　d와 e

따라서 조합의 수 ${}_5\mathrm{C}_2$는 10임을 알 수 있다.

개념

조합의 수 ${}_nC_r$를 찾을 때는 꼭 모든 경우를 나열해야 하나요?

조합은 순열과 밀접한 관련이 있다. 예를 들어, 4개에서 3개를 택하는 순열을 생각해 보자. 문자 a, b, c, d에서 세 개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 모든 경우를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

구분(조합)	순열	경우의 수
a와 b와 c	abc, acb, bac, bca, cab, cba	3!
a와 b와 d	abd, adb, bad, bda, dab, dba	3!
a와 c와 d	acd, adc, cad, cda, dac, dca	3!
b와 c와 d	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb	3!
합계		${}_4P_3$

a, b, c, d에서 3개를 택하는 각각의 경우에, 선택한 세 개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는 모두 3!로 같다. a, b, c, d에서 3개를 택하는 모든 경우의 수는 조합의 수 ${}_4C_3$이므로 순열의 수 ${}_4P_3$은 곱의 법칙에 따라 ${}_4P_3 = {}_4C_3 \times 3!$과 같이 나타낼 수 있다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r(0 < r \leq n)$개를 택하는 각각의 경우에, 선택한 r개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 모두 $r!$로 같다. n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r$이므로 순열의 수 ${}_nP_r$는 곱의 법칙에 따라 ${}_nP_r = {}_nC_r \times r!$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

개념

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

조합의 수 ${}_5C_1$, ${}_5C_2$, ${}_5C_3$, ${}_5C_4$, ${}_5C_5$를 각각 계산하시오.

풀이

❶ ${}_5C_1 = \frac{5}{1} = 5$

❷ ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

❸ ${}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

❹ ${}_5\mathrm{C}_4 = \dfrac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1} = 5$

❺ ${}_5\mathrm{C}_5 = \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1} = 1$

답 5, 10, 10, 5, 1

개념

${}_5\mathrm{C}_2 = {}_5\mathrm{C}_3$ 이고 ${}_5\mathrm{C}_1 = {}_5\mathrm{C}_4$ 인 것은 단순한 우연일까요?

조합의 수를 계산하는 방법에 따라 다음이 성립함을 알 수 있다.

$${}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5!}{3!2!} = {}_5\mathrm{C}_3, \qquad {}_5\mathrm{C}_1 = \frac{5!}{1!4!} = \frac{5!}{4!1!} = {}_5\mathrm{C}_4$$

일반적으로 자연수 n에 대하여 $0 < r < n$일 때 다음이 성립한다.

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$



$r = n$인 경우에도 이 공식을 그대로 적용할 수 있나요?

$r = n$인 경우 이 공식을 그대로 적용하면 ${}_n\mathrm{C}_n = {}_n\mathrm{C}_{n-n} = {}_n\mathrm{C}_0$이 된다. n개에서 r을 택하는 조합을 정의할 때는 $0 < r \le n$으로 제한하지만, $0! = 1$이므로 공식 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$에서 $r = 0$을 대입하면 우변은 $\dfrac{n!}{0!n!} = 1$이고 이는 ${}_n\mathrm{C}_n$과 일치한다. 따라서 ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$로 정하면, $r = 0$ 또는 $r = n$인 경우에도 다음이 성립한다.

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} \quad (0 \le r \le n)$$

조합의 수 ${}_{13}\mathrm{C}_{11}$의 값을 찾으시오.

풀이 ${}_{13}\mathrm{C}_{11} = {}_{13}\mathrm{C}_2 = \dfrac{13\times12}{2\times1} = 78$

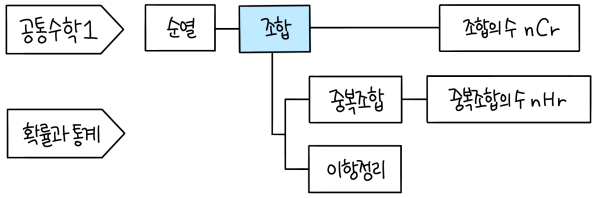
답 78

이처럼 ${}_n\mathrm{C}_r$에서 $\dfrac{n}{2} < r \le n$인 경우 공식 ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$을 이용하면 편리하다.

개념

조합은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

조합은 합의 법칙, 곱의 법칙, 순열, 중복조합, 이항정리 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



조합은 서로 다른 대상에서 일부 또는 전체를 택하여 일렬로 나열하는 순열과는 달리 서로 다른 대상에서 순서를 생각하지 않고 일부 또는 전체를 선택하는 것이다. 조합의 수는 합의 법칙을 이용하여 구할 수도 있지만, 곱의 법칙과 순열의 수 계산 공식을 이용하여 계산할 수 있으며, 이를 계승을 이용하여 나타낼 수 있다.

순열과 조합은 이후 〈확률과 통계〉 과목에서 다루는 중복순열, 중복조합, 이항정리 등의 용어 및 개념과 연결된다.

행렬行列; matrix

정의

행렬은 무엇인가요?

수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것을 **행렬**이라고 한다.

성분 행렬을 이루는 각각의 수나 문자를 그 행렬의 **성분**(成分; entry)이라고 한다.

행 행렬에서 성분을 가로로 배열한 줄을 **행**(行, row)이라 하고, 위에서부터 차례대로 제1행, 제2행, 제3행, ⋯ 이라고 한다.

열 행렬에서 성분을 세로로 배열한 줄을 **열**(列, column)이라 하고, 왼쪽에서부터 차례대로 제1열, 제2열, 제3열, ⋯ 이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

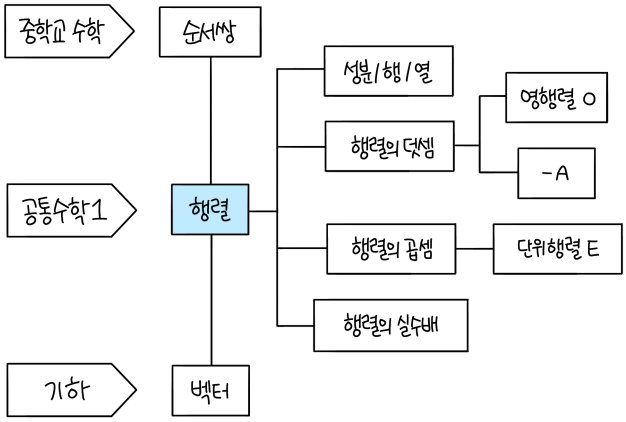
❶ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\ -5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$는 수를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것이므로 행렬이다.

❷ $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & \\ 6 & & \end{pmatrix}$는 수를 직사각형 모양으로 배열한 것이 아니므로 행렬이 아니다.

개념

행렬은 다른 용어나 개념과 어떻게 연결되나요?

행렬(행, 열, 성분)은 〈중학교 수학〉에서 다룬 연립일차방정식, 〈공통수학2〉에서 다루는 대칭이동, 〈기하〉에서 다루는 벡터, 평면벡터, 공간벡터 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 나타낸 **행렬**을 이용하면, 〈중학교 수학〉에서 다룬 연립일차방정식을 행렬에 대한 간단한 등식으로 나타낼 수 있고, 좌표평면에서 x축, y축, $y=x$ 등의 직선에 대한 점의 대칭이동도 행렬로 나타낼 수 있다. 행렬 중에서 **열**이 하나 뿐인 행렬이나 **행**이 하나 뿐인 행렬을 **벡터**라고 하는데, 그 중 **성분**이 두 개인 벡터를 **평면벡터**, 성분이 세 개인 벡터를 **공간벡터**라고 부른다.

공통수학2 | 기본수학2

머 리 말

이 자료는 2022 개정 교육과정의 〈공통수학2 | 기본수학2〉, 〈기본수학2〉에서 다루는 다음의 수학 용어들을 설명하고 안내하기 위해 마련되었습니다.

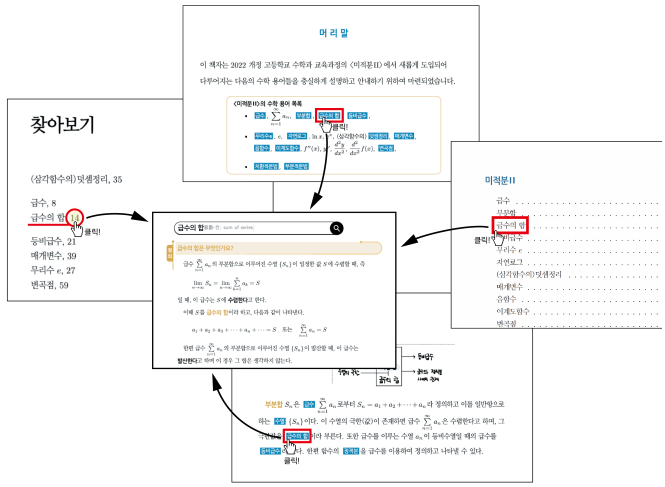
〈공통수학2 | 기본수학2〉의 수학 용어 목록

- 내분, 대칭이동,
- 집합, 원소, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 서로소, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙, (집합의) 분배법칙, 드모르간의 법칙, 명제, 가정, 결론, 정의, 정리, 조건, 진리집합, 부정, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법, 절대부등식,
- 정의역, 치역, 공역, 대응, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 일대일함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수

각 수학 용어에 대한 설명/안내 자료를 찾아가는 방법은 다음과 같습니다.

용어 설명 찾아가는 방법

(방법1) 위 목록의 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법2) [차례]에 있는 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법3) 맨 뒤 [찾아보기]에 있는 용어 옆 숫자(쪽수)를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법4) 자료 본문에서 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.



고등학생이 각 수학 용어를 이해하는 과정에서 자연스럽게 제기할 수 있는 질문 및 교사가 고등학생의 수학적 사고를 유도하기 위해 제기할 수 있는 질문을 중심으로 묻고 답하는 문답 방식으로 자료를 구성하였습니다. 이 자료가 고등학교 수학 용어 및 관련 학습 내용에 대하여 학생 스스로 질문을 던지고 질문에 대한 답을 탐색하는 습관을 형성하는데 기여하고, 수학 교사가 학생의 이런 습관 형성과 의미 있는 수학적 사고 활동을 안내하는 데 활용되기를 바랍니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점

이 자료는 고등학생이 각 수학 용어를 정확하고 명료하게 이해하기 위해 필요한 용어의 뜻(정의), 표현, 구체적인 예 등의 기본적인 내용 뿐 아니라 더 알아보기 질문을 통해 그 용어에 대한 고등학생의 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용, 더 나아가 용어 관련 다양한 참고 자료와 대학 수준의 보다 심화 확장된 내용까지 심화(참고)를 통해 폭넓게 다루고자 하였습니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점을 살펴보면 다음과 같습니다.

[자료의 짜임새]

	기본	더 알아보기	심화(참고)
내용	고등학생의 수학 용어에 대한 정확하고 명료한 이해에 필요한 정의, 의미, 예 등의 기본 내용으로 구성	고등학생의 수학 용어에 대한 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용으로 구성	대학 수준의 심화 학습을 원하는 고등학생, 수업을 준비하는 교사(혹은 예비교사)를 위한 [기본]과 [더 알아보기]의 내용을 더욱 심화한 내용 및 참고 자료로 활용 가능한 내용으로 구성
특징	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 모든 내용이 용어가 도입되는 과목 교육과정의 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 범위를 벗어날 수 있음. 단, 설명에 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙은 해당 과목 교육과정 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용 및 이때 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어날 수 있음

[자료의 활용]

고등학생	수학 용어에 대한 교과서 중심의 기본적이고 핵심적인 의미와 내용을 이해를 원하는 학생은 기본에 해당하는 내용을 읽고 공부하면 됩니다. 기본에 해당하는 내용을 토대로 좀 더 깊이 있는 이해를 원하는 학생은 더 알아보기의 내용을 읽으면 도움이 될 수 있습니다. 심화(참고)의 내용은 참고 자료로서 "아, 이런 내용도 있구나." 정도로 이해하거나, 읽지 않아도 됩니다.
(예비)교사	기본에 해당하는 내용은 모든 학생에게 가르쳐야 할 내용입니다. 더 알아보기와 심화(참고)의 내용은 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정 범위를 벗어난 학생의 질문에 답하거나 심화 탐구 활동 자료로 활용 가능합니다.

[활용 시 유의점]

더 알아보기와 심화(참고)의 내용 중에는 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어나는 내용이 포함되어 있습니다. 특히 심화(참고)의 내용은 대학 학부 수준의 내용을 포함하기도 합니다. 그러므로 고등학교 수학 교사가 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용할 때는 신중한 주의가 필요합니다. 특히 평가에 교육과정의 범위를 벗어나는 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용하지 않도록 유의할 필요가 있습니다.

내분內分; internal division

정의

내분은 무엇인가요?

그림과 같이 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n \ (m > 0,\ n > 0)$일 때, 점 P는 선분 AB를 $m : n$으로 **내분**한다고 하며, 점 P를 선분 AB의 **내분점**이라고 한다.



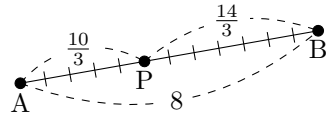
예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

선분 AB의 길이가 8이라 하자. 선분 AB 위의 점 P가 선분 AB를 5 : 7로 내분할 때, 점 P는

$$\overline{AP} = 8 \times \frac{5}{5+7} = \frac{10}{3}, \quad \overline{PB} = 8 \times \frac{7}{5+7} = \frac{14}{3}$$

를 만족시키는 점이다.



선분 AB와 선분 BA를 $m : n$으로 각각 내분하는 점은 같은가요?

선분 AB와 선분 BA는 모두 두 점 A와 B를 양끝점으로 하는 선분을 나타낸다. 선분 AB와 선분 BA가 같은 도형일지라도, 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점과 선분 BA를 $m : n$으로 내분하는 점은 일반적으로 다른 대상이다.

예를 들어, 길이가 10인 선분 AB에 대하여

❶ 선분 AB 위의 점 P가 선분 AB를 2 : 3으로 내분할 때, 점 P는

$$\overline{AP} = 10 \times \frac{2}{2+3} = 4, \quad \overline{PB} = 10 \times \frac{3}{2+3} = 6$$

을 만족시키는 점이다.

❷ 선분 BA 위의 점 Q가 선분 BA를 2 : 3으로 내분할 때, 점 Q는

$$\overline{BQ} = 10 \times \frac{3}{2+3} = 6, \quad \overline{QA} = 10 \times \frac{2}{2+3} = 4$$

을 만족시키는 점이다.

의미

내분이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

내분(內分)에서 내(內)는 '안쪽', '내부'를 뜻하고, 분(分)은 '나누다', '분할하다'는 뜻을 가진다. 그러므로 내분(內分)은 두 점을 잇는 선분을 내(內)부에서 분(分)할하는 것을 의미한다.

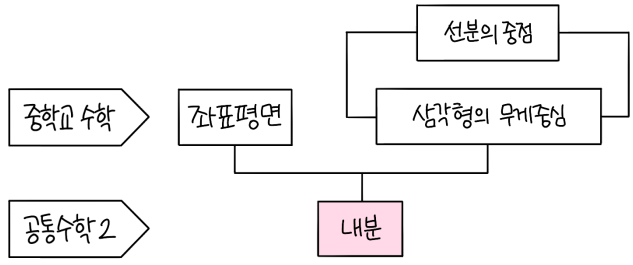


내분을 영어로는 internal division이라고 한다. internal에는 '내적인'이라는 뜻이 있고 division에는 '나눔'이라는 뜻이 있다. 그러므로 internal division은 내적인 나눔 즉, 주어진 선분의 한 점을 경계로 하여 그 선분을 내적으로 두 부분으로 나누는 것을 의미한다.

개념

내분과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

선분의 내분은 〈중학교 수학〉에서 다루는 좌표평면, 좌표, 중점, 닮음, 삼각형의 무게중심 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



선분의 중점은 선분을 1:1로 **내분**하는 점이고, 삼각형의 무게중심은 삼각형의 중선을 2:1 또는 1:2로 내분하는 점이다. 좌표평면에서 선분을 일정한 비로 내분하는 점 즉, 내분점의

좌표는 삼각형의 닮음을 활용하여 구할 수 있다.

대칭이동對稱移動; symmetric transformation

정의

대칭이동은 무엇인가요?

어떤 도형을 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭인 도형으로 옮기는 것을 **대칭이동**이라고 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

점 $(2,-1)$을 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

❶ x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2,1)$이다.

❷ y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,-1)$이다.

❸ 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,1)$이다.

❹ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1,2)$이다.

또, 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$을 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 다음과 같다.

❶ x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$이다.

❷ y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$이다.

❸ 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x+2)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$이다.

❹ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}$이다.

의미

대칭이동이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

대칭이동(對稱移動)에서 대(對)는 '마주하다', '서로 마주보다'를 뜻하고, 칭(稱)은 '균형'을 뜻하기에 대칭(對稱)은 '서로 마주보며 균형을 이룸'을 뜻한다. 그러므로 대칭이동(對稱移動)은 대칭(對稱)을 이용한 이동(移動) 즉, 서로 마주보며 균형을 유지하도록 이동하는 것을 의미한다.

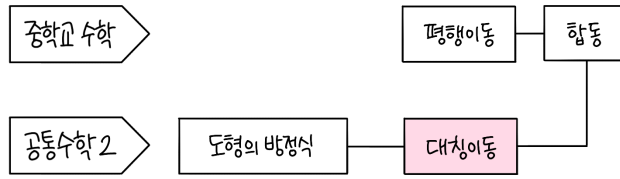
對	稱	移	動
대할 대	칭할(버틸) 칭	옮길 이	움직일 동

대칭이동을 영어로는 symmetric transformation이라고 한다. symmetric에는 '대칭적인'이라는 뜻이 있고 transformation에는 '이동', '변환'이라는 뜻이 있다. 그러므로 symmetric transformation은 대칭적인 이동 즉, 두 도형이 서로 대칭이 되도록 이동한다는 것을 의미한다.

개념

대칭이동과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

대칭이동은 도형의 방정식을 포함하여 〈초등학교 수학〉에서 다루는 뒤집기, 〈중학교 수학〉에서 다룬 평행이동, 합동 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



주어진 평면도형을 그 도형과 합동인 도형으로 옮기는 함수의 일종인 **대칭이동**, 평행이동, 회전이동은 각각 〈초등학교 수학〉에서 다루는 뒤집기, 밀기, 돌리기에 해당한다.

좌표평면에서 도형의 대칭이동은 점에 대한 대칭이동과 x축, y축, 직선 $y=x$와 같은 직선에 대한 대칭이동이 있다. 좌표평면에서 방정식 $f(x,y)=0$으로 나타내어지는 도형을 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각 $f(-x,-y)=0$, $f(x,-y)=0$, $f(-x,y)=0$, $f(y,x)=0$이다.

집합集合; set과 원소元素; element

정의

집합과 원소는 무엇인가요?

어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임을 **집합**이라고 한다. 이때 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라고 한다.

a가 집합 A의 원소일 때, 'a는 집합 A에 **속한다**.'고 하며, 이것을 기호로 $a \in A$와 같이 나타낸다. 한편, b가 집합 A의 원소가 아닐 때, 'b는 집합 A에 **속하지 않는다**.'고 하며, 이것을 기호로 $b \notin A$와 같이 나타낸다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ '6의 배수의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

예를 들어 12는 6의 배수이므로 이 집합의 원소이고, 15는 6의 배수가 아니므로 이 집합의 원소가 아니다. '6의 배수의 모임'을 집합 A라 할 때, 이 사실을 $12 \in A$이고 $15 \notin A$와 같이 나타낼 수 있다.

❷ '작은 자연수의 모임'은 '작다.'의 기준이 명확하지 않아서 그 대상을 분명하게 정할 수 없다. 따라서 '작은 자연수의 모임'은 집합이 아니다.

의미

집합, 원소라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

집합 집합(集合)에서 집(集)은 '모으다'를 뜻하고, 합(合)은 '합하다'는 뜻을 가진다. 그러므로 집합(集合)은 여러 대상을 어떤 기준에 따라 모아서(集) 합(合)해 놓은 것을 의미한다.



집합을 영어로는 set이라고 한다. set은 그 자체로 '모임', '모음', '집합'을 뜻한다.

원소 원소(元素)에서 원(元)은 '근본', '기본'을 뜻하고, 소(素)는 '바탕 성분이나 요소'

를 뜻한다. 그러므로 원소(元素)는 집합을 이루는 기본적인(元) 구성 요소(素)를 의미한다.

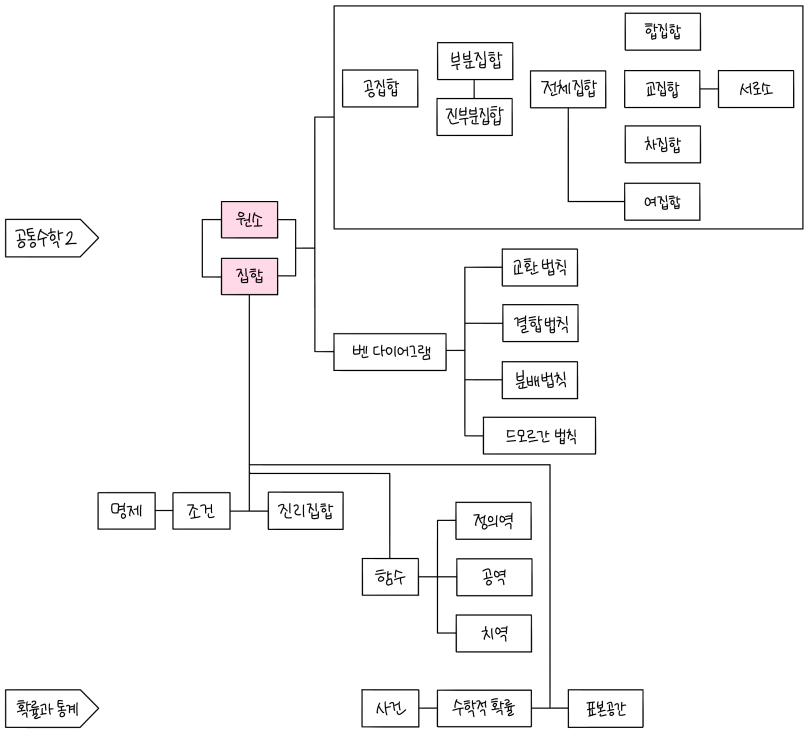


원소를 영어로는 element라고 한다. element는 그 자체로 '원소', '요소'를 뜻한다.

개념

집합, 원소와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

집합과 원소는 집합에서 다루는 모든 용어와 개념 즉, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 서로소, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙, (집합의) 분배법칙, 드모르간의 법칙 등의 기술과 설명에 필요한 기초 용어일 뿐 아니라 집합으로 나타내어지는 조건의 진리집합, 함수의 정의역, 공역, 치역 등의 용어 및 개념과도 밀접한 관련이 있고, 〈확률과 통계〉에서 다루는 표본공간, 사건, 수학적 확률 등의 용어 및 개념과도 관련이 있다.



실제로 공집합, 부분집합, 진부분집합, 전체집합, 여집합, 합집합, 교집합, 차집합은 용어 자체에 **집합**이라는 용어를 포함하고 있고, 이들 각 집합의 정의와 성질은 그 집합을 구성하는 **원소**가 무엇이고 어떻게 결정되는지에 따라 정해진다. 특히 합집합, 교집합, 차집합은 두 집합에 의해 만들어지는 새로운 집합을 나타내는 용어인 동시에 두 집합 사이의 연산을 나타내는 용어이기도 하다.

벤 다이어그램은 용어 자체에 집합이나 원소라는 용어가 포함되어 있지는 않지만 어떤 집합 그 자체나 집합과 원소 사이의 관계, 집합과 집합 사이의 관계 등을 시각적으로 즉, 그림으로 나타낸 것을 의미하고, (집합의) 서로소는 공통 원소가 없는 두 집합을 일컫는 용어이며, (집합의) 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 드모르간의 법칙은 집합의 연산이 지닌 고유한 성질을 지칭하는 용어이다.

조건이 참이 되게 하는 모든 원소의 집합인 진리집합을 이용하면 명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 참, 거짓을 판별할 수 있다. 또 집합 X에서 집합 Y로의 함수가 있을 때 두 집합 X, Y를 각각 그 함수의 정의역, 공역이라 부르고, 함숫값 전체의

집합을 그 함수의 치역이라 부른다. 한편 어떤 시행에서 특정 사건이 일어날 수학적 확률은 표본공간의 원소의 개수에 대한 사건의 원소의 개수의 비로 정의된다.

그 이외에도 집합과 원소는 집합 그 자체뿐 아니라 수학의 모든 영역에서 어떤 대상과 대상들의 모임 및 이들 사이의 관계를 나타내고 설명할 때 사용되는 기초 용어이다.

공집합空集合; empty set

정의

공집합은 무엇인가요?

원소가 하나도 없는 집합을 **공집합**이라 하며, 이것을 기호로

$$\varnothing$$

와 같이 나타낸다. 공집합은 원소의 개수가 0인 유한집합으로 생각한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 집합 A를 $A=\{x \mid x^2+1=0$인 실수$\}$라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 1$이므로 $x^2+1 \neq 0$이다. 따라서 $x^2+1=0$인 실수는 하나도 없으므로 공집합이다. 즉, $A=\varnothing$이고 A의 원소의 개수는 0이다.

❷ 한편, 집합 B를 $B=\{x \mid x^2-2=0$인 실수$\}$라 하자. 이차방정식 $x^2-2=0$의 실근은 $\pm\sqrt{2}$이므로 $B=\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$이다. 따라서 B는 원소의 개수가 2인 집합이므로 공집합이 아니다. 즉, $B \neq \varnothing$이다.

의미

공집합이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

공집합(**空集合**)에서 공(**空**)은 '비어 있다', '아무것도 없다'를 뜻하고, 집(**集**)은 '모으다'를 뜻하며, 합(**合**)은 '합하다'는 뜻을 가진다. 그러므로 공집합(**空集合**)은 비어있는(**空**) 집합(**集合**) 즉, 원소가 하나도 없는 집합을 의미한다.



공집합을 영어로는 empty set이라고 한다. empty에는 '비어 있는'이라는 뜻이 있고, set은 '집합'을 뜻한다. 그러므로 empty set은 글자 그대로 비어있는 집합 즉, 공집합으로 번역된다.

공집합을 나타내는 기호로 ∅이 많이 사용되지만, '원소가 하나도 없는 집합'이라는 의미로 공집합을

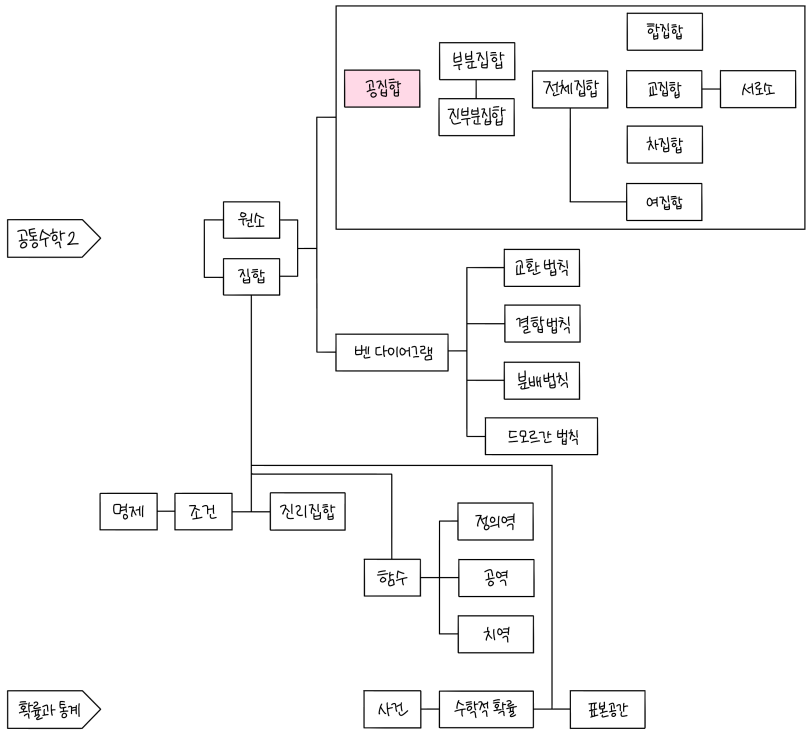
{ }

와 같이 나타내기도 한다.

개념

공집합과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

공집합은 집합, 원소, 부분집합, 진부분집합, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 서로소 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈확률과 통계〉에서 다루는 사건 중 결코 일어날 수 없는 사건을 나타낼 때도 사용된다.



공집합은 **원소**가 하나도 없는 **집합**으로서, 공집합 자신을 포함한 모든 집합의 **부분집합**이고, 공집합 자신을 제외한 모든 집합의 **진부분집합**이다. 공집합의 **여집합**은 **전체집합**이고, 전체집합의 여집합은 공집합이다.

어떤 집합과 공집합의 **합집합**은 원래 집합과 같고, 어떤 집합에 대한 공집합의 **차집합** 역시 원래 집합과 같다. 또 어떤 집합과 공집합의 **교집합**은 공집합이다. 특히 두 집합의 교집합이 공집합일 때 '두 집합은 **서로소**이다'라고 한다.

한편 어떤 시행에서 결코 일어날 수 없는 **사건** 즉, 일어날 확률이 0인 사건을 공집합 $\varnothing$으로 나타낸다.

부분집합部分集合; subset과 진부분집합眞部分集合; proper subset

정의

부분집합은 무엇인가요?

두 집합 A와 B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 속할 때, A를 B의 **부분집합**이라 하며, 이것을 기호로 $A \subset B$와 같이 나타낸다. 이때 '집합 A는 집합 B에 **포함된다**.'고 한다.

또, 공집합은 모든 집합의 부분집합으로 정한다. 즉, 집합 A에 대하여 $\varnothing \subset A$이다.

한편, 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닐 때, 이것을 기호로 $A \not\subset B$와 같이 나타낸다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 두 집합 $A = \{x \mid x-3=0\}$과 $B = \{x \mid (x-3)(x+1)=0\}$에서 A의 모든 원소 3이 B에 속하므로, A는 B의 부분집합이다. 즉, $A \subset B$이다.

❷ 두 집합 $B = \{x \mid (x-3)(x+1)=0\}$과 $C = \{x \mid (x-3)(x+2)=0\}$에서 B의 원소 -1은 C에 속하지 않으므로, B는 C의 부분집합이 아니다. 즉, $B \not\subset C$이다.

정의

두 집합은 언제 같다고 하나요?

두 집합 A와 B에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$일 때, 'A와 B는 **서로 같다**.'고 하며, 이것을 기호로 $A = B$와 같이 나타낸다.

한편, 두 집합 A와 B가 서로 같지 않을 때, 이것을 기호로 $A \neq B$와 같이 나타낸다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 두 집합 $A = \{5, 5, 1\}$, $B = \{1, 5\}$에서 A의 모든 원소 $5, 5, 1$이 B에 속하므로 $A \subset B$이다. 또한 B의 모든 원소 $1, 5$가 A에 속하므로 $B \subseteq A$이다. 따라서 두 집합 A와 B는 서로 같다. 즉, $A = B$이다.

❷ 두 집합 $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$과 $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$에서 C의 원소 6은 D에 속하지 않으므로, $C \not\subset D$이다. 따라서 $C \neq D$이다.

정의

진부분집합은 무엇인가요?

두 집합 A와 B에 대하여 A가 B의 부분집합이지만 서로 같지 않을 때, 즉

$A \subset B$이고 $A \neq B$일 때,

A를 B의 **진부분집합**이라고 한다.

의미

부분집합, 진부분집합이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

부분집합(部分集合)에서 부분(部分)은 '전체에서 떼어낸 일부', '전체를 이루는 한 조각'를 뜻하고, 집(集)은 '모으다'를 뜻하며, 합(合)은 '합하다'는 뜻을 가진다. 그러므로 어떤 집합의 부분집합(部分集合)은 원래 집합의 한 부분(部分)을 떼어내어 만든 집합(集合) 즉, 원래 집합의 일부를 이루는 집합을 의미한다. 한편 진(眞)은 '참된', '진짜의'를 뜻하므로, 어떤 집합의 진부분집합(眞部分集合)은 그 집합의 진(眞)짜 부분집합(部分集合) 즉, 어떤 집합의 그 집합과 같지 않은 '진짜' 일부분으로 이루어진 집합을 의미한다.

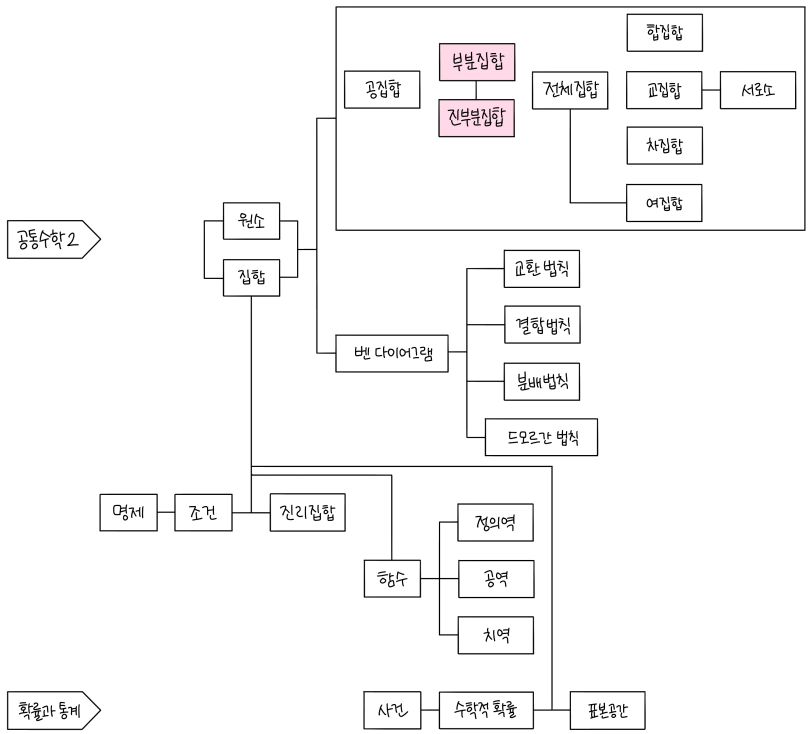
眞	部	分	集	合
참 진	떼 부	나눌 분	모을 집	합할 합

부분집합과 진부분집합을 영어로는 각각 subset과 proper subset이라고 한다. subset은 '부분집합'을 뜻한다. 이때 sub는 '아래의'라는 뜻이 있다. 즉, 어떤 집합에 포함되는 집합을 그 집합의 아래에 있다는 의미로 subset이라 하고 이를 부분집합이라 번역한 것이다. 한편 proper에는 '진짜'라는 뜻이 있으므로, proper subset은 진짜 부분집합을 의미하고 이를 줄여 진부분집합이라 번역한다. 어떤 집합의 부분집합 중에는 자기 자신도 포함되는데, 자기 자신을 자신의 일부분이라고 하는 것이 그렇게 자연스럽지는 않기 때문에, 자기 자신을 제외한 부분집합이 진짜 부분집합이라는 의미에서 proper subset 즉, 진부분집합이라 하는 것이다.

개념

부분집합, 진부분집합과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

부분집합과 진부분집합은 집합, 원소, 두 집합의 상등(같음), 공집합, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 서로소 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 조건의 진리집합, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 함수의 공역, 치역 등의 용어 및 개념과도 관련이 있고, 〈확률과 통계〉에서 다루는 표본공간, 사건, 수학적 확률 등의 용어 및 개념과도 관련이 있다.



집합 A가 집합 B의 **부분집합**이라는 것은 집합 A의 모든 **원소**가 집합 B의 원소가 된다는 것을 의미하고, 두 집합의 상등 즉, 두 집합이 서로 같다는 것은 두 집합이 서로의 부분집합이 됨을 의미한다. 이들 경우 모두 **벤 다이어그램**으로 시각화하여 나타낼 수 있다. 모든 집합과 그 **여집합**은 자기 자신의 부분집합인 동시에 **전체집합**의 부분집합이고, 어떤 집합의 자기 자신을 제외한 모든 부분집합은 그 집합의 **진부분집합**이며, **공집합**은 모든 집합의 부분집합이다.

만약 집합 A가 집합 B의 부분집합이라면, 집합 A와 집합 B의 **합집합**은 B, **교집합**은 A이고, 집합 A에 대한 집합 B의 **차집합**은 공집합이 된다. 이 경우 집합 A와 집합 B의 여집합은 **서로소**이다.

두 **조건** $p(x)$, $q(x)$의 **진리집합** P, Q에 대하여 $P \subset Q$일 때 **명제** '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 참이고 이때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 한다. 또 $p(x)$가 $q(x)$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 부른다.

집합 X에서 집합 Y로의 함수가 일대일함수이고, **치역**이 **공역**의 진부분집합이 아닐 때 이 함수를 집합 X에서 집합 Y로의 일대일대응이라고 한다. 일대일대응은 역함수를 갖는다.

한편 어떤 시행에서 특정 **사건**이 일어날 수학적 확률은 **표본공간**의 원소의 개수에 대한 사건의 원소의 개수의 비로 정의되는데, 이때 사건은 표본공간의 부분집합으로 정의된다.

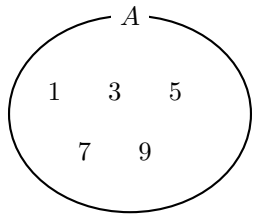
벤 다이어그램Venn diagram

정의

벤 다이어그램은 무엇인가요?

집합을 나타낼 때 그림을 이용하기도 한다. 예를 들어 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$를 그림과 같이 나타낼 수 있다.

이와 같은 방법으로 집합을 나타낸 그림을 **벤 다이어그램**이라고 한다.



의미

벤 다이어그램이라는 용어의 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

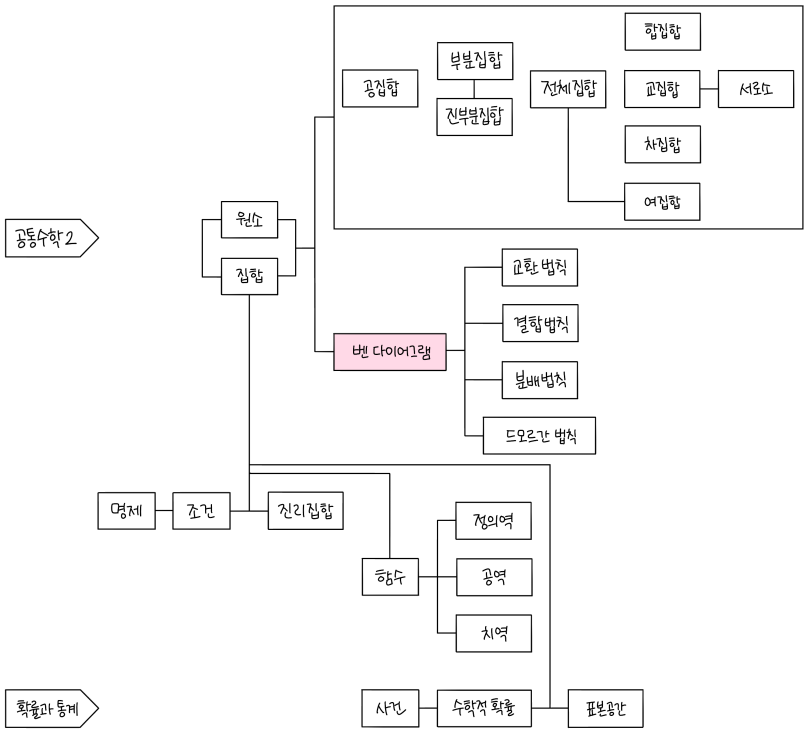
벤 다이어그램은 영어 Venn diagram을 소리나는 대로 읽은 것이다. 여기서 Venn은 영국의 논리학자 존 벤(John Venn, 1834-1923)의 이름이고, diagram은 '그림', '도형'을 뜻한다. 그러므로 Venn diagram은 벤이 고안한 그림 또는 도형을 의미한다. 실제로 벤은 1880년 자신의 논문 On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings에서 기존의 오일러 다이어그램(Euler diagram)을 일반화하여 전체집합을 직사각형으로 나타내고, 전체집합의 부분집합 및 부분집합들 사이의 관계를 직사각형 내부에 그려진 원으로 나타내는 지금과 같은 형태의 다이어그램을 제안하였다.

개념

벤 다이어그램과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

벤 다이어그램은 집합, 원소, 부분집합, 진부분집합, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 서로소, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙, (집합의) 분배법칙, 드모르간의 법칙 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 함수의 정의역, 공역, 치역, 〈확률과 통계〉에서 다루는 시행의 표본공간, 사건, 확률의 성질 등과 같이 집합으로 나타내어지는

거의 모든 용어 및 개념과도 관련이 있다.



벤 다이어그램을 이용하면 **전체집합**을 포함한 임의의 **집합** 그 자체 뿐 아니라 집합과 **원소** 사이의 관계나 집합과 집합 사이의 관계 즉, 어떤 집합의 **부분집합**과 **진부분집합** 및 **여집합**, 두 집합의 **합집합**, **교집합**, **차집합**과 **서로소**인 두 집합 등을 시각화하여 나타낼 수 있다. 또 (집합의) **교환법칙**, **결합법칙**, **분배법칙**, **드모르간의 법칙**과 같은 집합의 연산법칙이 성립한다는 것을 벤 다이어그램을 이용하여 시각적으로 확인할 수 있다.

한편 벤 다이어그램은 **정의역** X에서 **공역** Y로의 함수와 그 함숫값 및 **치역**을 시각화하여 나타내거나, 어떤 시행의 **표본공간**과 그 부분집합인 **사건** 및 확률의 여러 가지 성질을 시각화하여 나타낼 때에도 사용된다.

합집합合集合; union과 교집합交集合; intersection

정의

합집합과 교집합은 무엇인가요?

두 집합 A와 B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **합집합**이라 하며, 이것을 기호로 $A \cup B$와 같이 나타낸다. A와 B의 합집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$$

또, 두 집합 A와 B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **교집합**이라 하며, 이것을 기호로 $A \cap B$와 같이 나타낸다. A와 B의 교집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$$

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$를 생각하자.

❶ $8 \in A$이므로 $8 \in A \cup B$이다. 또한, $3 \in B$이므로 $3 \in A \cup B$이다. 그러나 $5 \notin A$이고 $5 \notin B$이므로 $5 \notin A \cup B$이다.

실제로, A와 B의 합집합은 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$이다.

❷ $2 \in A$이고 $2 \in B$이므로 $2 \in A \cap B$이다. 그러나 $8 \in A$이지만 $8 \notin B$이므로 $8 \notin A \cap B$이다.

실제로, A와 B의 교집합은 $A \cap B = \{2, 6\}$이다.

의미

합집합, 교집합이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

합집합 합집합(**合集合**)에서 합(**合**)은 '합하다'를 뜻하고, 집(**集**)은 '모으다'를 뜻한다. 그러므로 두 집합의 합집합(**合集合**)은 그 두 집합을 합(**合**)하여 만든 집합(**集合**) 즉, 두

집합의 원소들을 모두 합쳐 하나로 모아 만든 집합을 의미한다.



합집합을 영어로는 union이라고 한다. union은 그 자체로 '결합', '통합'이라는 뜻이 있다. 두 집합의 합집합은 그 두 집합을 합하여 만든 결과로서의 집합을 의미하기도 하고, 두 집합을 합하여 하나의 집합 즉, 합집합을 만드는 연산을 의미하기도 한다.

교집합 교집합(**交集合**)에서 교(**交**)는 '서로 교차하다', '사귀다'를 뜻하고, 집(**集**)은 '모으다', 합(**合**)은 '합하다'를 뜻한다. 그러므로 두 집합의 교집합(**交集合**)은 그 두 집합이 서로 교차(**交**)하는 부분으로 만든 집합(**集合**) 즉, 두 집합에서 서로 겹치는 원소들을 모두 모아 만든 집합을 의미한다.

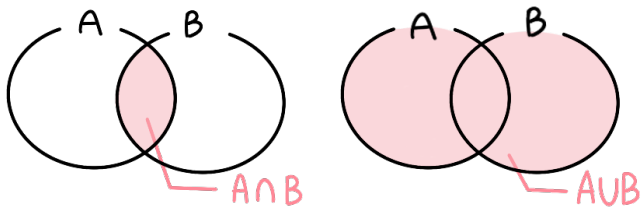


교집합을 영어로는 intersection이라고 한다. intersection은 그 자체로 '길이 교차하는 지점', '겹치는 부분'이라는 뜻이 있다. 두 집합의 교집합은 그 두 집합이 겹치는 부분 즉, 공통인 원소들을 모아 만든 결과로서의 집합을 의미하기도 하고, 두 집합의 교집합을 만드는 연산을 의미하기도 한다.

개념

합집합과 교집합을 시각적으로 나타낼 수 있나요?

벤 다이어그램을 이용하면 합집합과 교집합을 시각적으로 나타낼 수 있다. 교집합은 두 집합이 나타내는 영역 가운데 서로 겹치는 부분이고, 합집합은 두 집합이 나타내는 모든 영역을 하나로 모은 전체 영역이다.

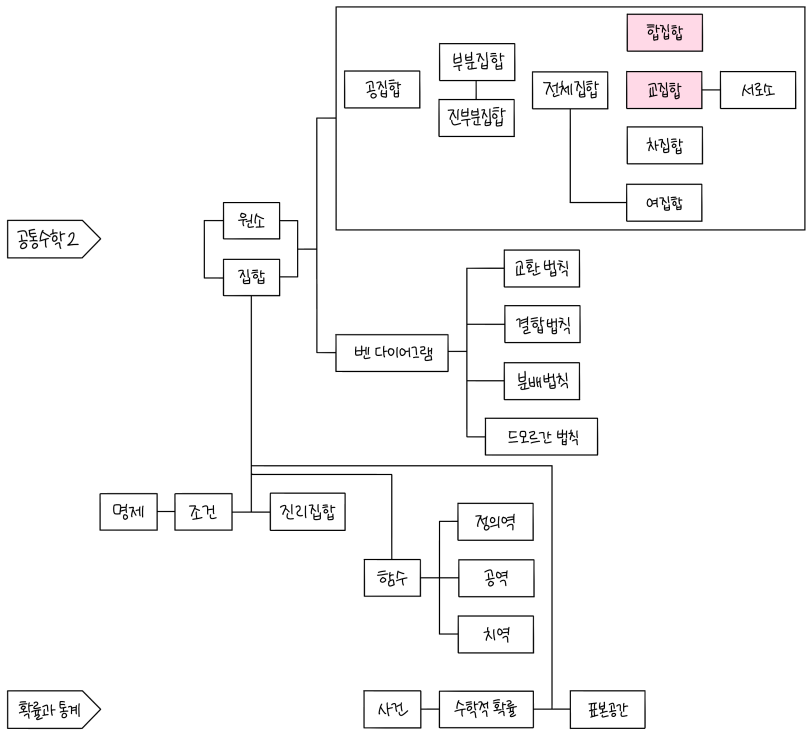


집합의 원소의 개수가 작을 경우, 벤 다이어그램을 활용하면 합집합과 교집합을 보다 쉽게 파악할 수 있다.

개념

합집합, 교집합과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

합집합과 교집합은 집합, 원소, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 벤 다이어그램, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 서로소, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙, (집합의) 분배법칙, 드모르간의 법칙 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



두 **집합**의 **합집합**과 **교집합**은 각각 두 집합 중 적어도 한 집합에 속하는 **원소**를 모두 모아 놓은 집합과 두 집합에 공통인 원소를 모두 모아 놓은 집합으로서 두 집합을 결합하여

만든 새로운 집합을 나타내는 용어인 동시에, 그 결합 방식에 해당하는 두 집합의 연산을 일컫는 용어이기도 하다. 두 집합의 합집합과 교집합은 둘 다 **벤 다이어그램**으로 시각화하여 나타낼 수 있다.

임의의 집합과 **공집합**의 합집합과 교집합은 각각 그 집합 자신과 공집합이 되고, 임의의 집합과 그 **여집합**의 합집합과 교집합은 각각 전체집합과 공집합이 된다. 또 임의의 집합과 **전체집합**의 합집합과 교집합은 각각 전체집합과 그 집합 자신이 되고, 임의의 집합과 그 집합의 임의의 **부분집합**(**진부분집합**)의 합집합과 교집합은 각각 그 집합 자신과 그 부분집합(진부분집합)이 된다. 한편, 집합 A에 대한 집합 B의 **차집합**은 A와 B의 여집합의 교집합이고, **서로소**인 두 집합의 교집합은 공집합이다.

두 집합의 합집합과 교집합 연산 각각에 대하여 (집합의) **교환법칙**과 **결합법칙** 및 **드모르간의 법칙**이 성립하고, 두 연산이 혼합되어 있는 경우 **분배법칙**이 성립한다.

전체집합全體集合; universal set과 여집합餘集合; complement

정의

전체집합과 여집합은 무엇인가요?

어떤 집합에 대하여 그 부분집합을 생각할 때, 처음의 집합을 **전체집합**이라 하며, 이것을 기호로 U와 같이 나타낸다.

전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 **여집합**이라 하며, 이것을 기호로 A^C와 같이 나타낸다. A의 여집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A^C = \{x \mid x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\}$$

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$와 집합 $A = \{1, 2, 3, 6\}$을 생각하자.

❶ $1 \in U$이고 $1 \notin A$이므로 $1 \in A^C$이다.

❷ 한편, $7 \notin A$이지만 $7 \notin U$이므로 $7 \notin A^C$이다.

실제로 집합 U에 대한 A의 여집합은 $A^C = \{4, 5\}$이다.



전체집합과 공집합의 여집합도 생각할 수 있나요?

전체집합 U는 이미 모든 원소를 가지고 있으므로 U에 속하지 않는 원소는 없다. 따라서 $U^C = \varnothing$이다. 한편, 공집합 $\varnothing$에는 어떠한 원소도 속하지 않으므로 $\varnothing^C = U$이다.

의미

전체집합, 여집합이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

전체집합 전체집합(**全體集合**)에서 전체(**全體**)은 글자 그대로 '전체'를 뜻하고, 집(**集**)은 '모으다', 합(**合**)은 '합하다'를 뜻한다. 그러므로 전체집합(**全體集合**)은 전체(**全體**)에 해당하는 집합(**集合**) 즉, 모든 원소를 포함한 집합, 전체 범위의 집합 등의 의미를 지닌다.



전체집합을 영어로는 universal set이라고 한다. universal은 '전체의', '보편적인'이라는 뜻이 있고, set은 '집합'을 뜻하므로 universal set은 전체적인 집합 즉, 전체집합으로 번역된다.

여집합 여집합(餘集合)에서 여(餘)는 '남다', '나머지'를 뜻하고, 집(集)은 '모으다', 합(合)은 '합하다'를 뜻한다. 그러므로 어떤 집합의 여집합(餘集合)은 그 집합을 제외하고 남는(餘) 부분의 집합(集合) 즉, 그 집합의 원소들을 제외한 나머지 원소들을 모두 모아 만든 집합을 의미한다.



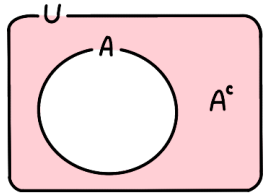
여집합을 영어로는 complement라고 한다. complement에는 '보완', '보충' 즉, 무언가를 완전하게 하기 위해 부족한 부분을 채우는 것이라는 의미가 있다. 그러므로 어떤 집합의 complement는 그 집합을 완전하게 하기 위해 부족한 부분을 보완해주는 집합 즉, 그 집합에 없는 부분 또는 전체집합에서 그 집합을 제외한 나머지 부분의 집합이라는 의미로 여집합으로 번역된다.

개념

여집합을 시각적으로 나타낼 수 있나요?

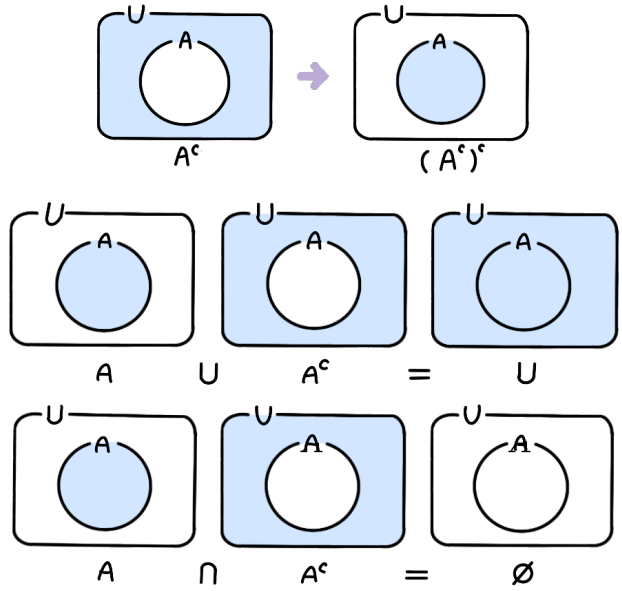
A의 여집합 A^C는 전체집합 U에서 집합 A에 속하지 않는 원소들의 집합을 말한다.

벤 다이어그램을 이용하면 여집합을 시각적으로 간단하게 나타낼 수 있다. 집합 A가 차지하고 있는 영역을 제외한 나머지 부분이 A의 여집합의 영역이다.



벤 다이어그램을 이용하면, 다음 사실이 성립함을 확인할 수 있다.

$$(A^C)^C = A, \qquad A \cup A^C = U, \qquad A \cap A^C = \varnothing$$



개념

전체집합은 어떻게 정하나요? 왜 항상 같은 것이 아니죠?

전체집합 U는 문제에서 다루고자 하는 대상의 범위를 편의상 정한 집합이다. 상황에 따라 달라질 수 있으며, 상황에서 다루는 모든 원소를 포함하는 집합을 정해서 사용한다.

예를 들어, 30 이하의 자연수 중에서 약수나 배수를 다룰 때에는 전체집합을 $U = \{x \mid x$는 30 이하의 자연수$\}$로 정할 수 있다.

전체집합은 문제 맥락에 따라 선택되는 집합이므로 문제에서 등장하는 모든 집합을 포함하고, 상황의 범위를 벗어나지 않는다면 어떤 집합이든 전체집합 역할을 할 수 있다.

개념 전체집합이 바뀌면 여집합도 바뀌나요?

집합 A의 여집합 A^C를 정의할 때 전체집합이 사용되었으므로 전체집합이 바뀌면 여집합도 바뀌게 된다.

예를 들어, 집합 $A=\{2,4\}$라고 하자.

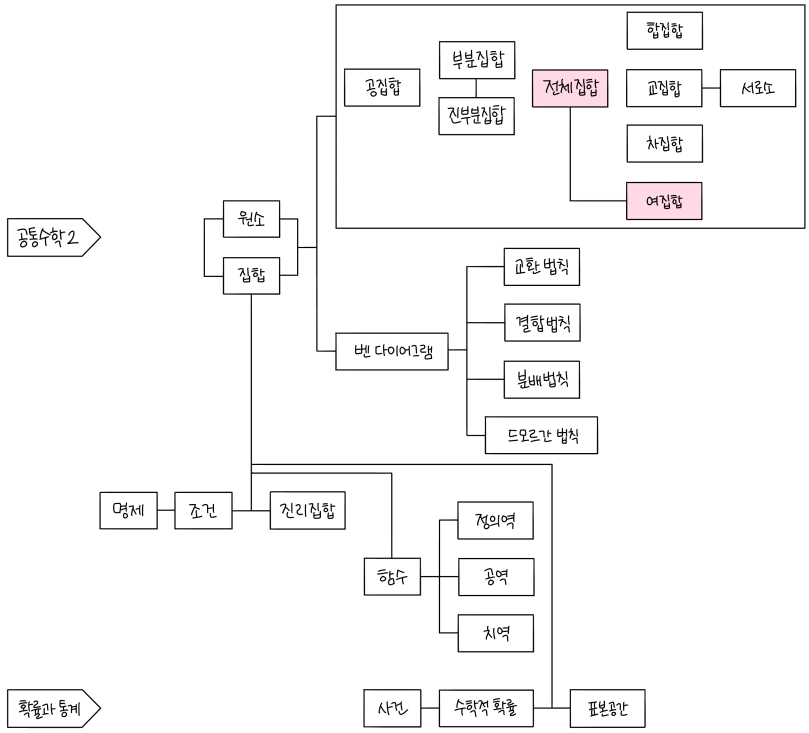
❶ 전체집합을 $U=\{1,2,3,4,5\}$로 정하면 $A^C=\{1,3,5\}$이다.

❷ 한편, 전체집합을 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$로 정하면 $A^C=\{1,3,5,6,7\}$이 된다.

이처럼 여집합은 전체집합에서 A의 원소를 제외한 모든 원소들의 집합을 의미하므로, 전체집합을 어떻게 정하느냐에 따라 달라질 수 있다.

개념 전체집합, 여집합과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

전체집합과 여집합은 집합, 원소, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 차집합, (집합의) 서로소, 드모르간의 법칙 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈확률과 통계〉에서 다루는 표본공간, 사건, 여사건 등의 용어 및 개념과도 관련이 있다.



임의의 **집합**은 **전체집합**의 **부분집합**이고, 특히 전체집합을 제외한 모든 집합은 전체집합의 **진부분집합**이다. 이런 이유로 전체집합은 **벤 다이어그램**에서 모든 집합을 포함하는 형태로 그려진다.

어떤 집합의 **여집합**은 그 집합에 속하지 않는 전체집합의 **원소**로 이루어진 집합으로서, 임의의 집합과 그 여집합의 **합집합**은 전체집합이고, 임의의 집합과 그 여집합의 **교집합**은 **공집합**이다. 그러므로 임의의 집합과 그 여집합은 항상 **서로소**이다. 공집합의 여집합은 전체집합이고, 전체집합의 여집합은 공집합이며, 집합 A에 대한 집합 B의 **차집합**은 A와 B의 여집합의 **교집합**이다.

두 집합의 합집합의 여집합은 각 집합의 여집합의 교집합과 같고, 두 집합의 교집합의 여집합은 각 집합의 여집합의 합집합과 같은데, 이를 일컬어 **드모르간의 법칙**이라 한다.

한편 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합인 **표본공간**은 전체집합으로 간주되고, 그 시행에서 일어나는 **사건**은 표본공간의 부분집합으로 정의되며, 어떤 사건의 **여사건**은 그 사건의 여집합으로 나타내어진다.

차집합差集合; difference set

정의

차집합은 무엇인가요?

두 집합 A와 B에 대하여 A에 속하지만 B에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 **차집합**이라 하며, 이것을 기호로 $A-B$와 같이 나타낸다. A에 대한 B의 차집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$$

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

두 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$와 $B=\{3,4,6\}$에 대하여 A에 대한 B의 차집합은 $A-B=\{1,2,5\}$이다.



집합 A가 B를 포함하고 있지 않더라도 차집합 $A-B$를 구할 수 있나요?

차집합 $A-B$는 집합 A에 속하지만 집합 B에 속하지 않는 원소들을 모은 집합이다. 따라서 A가 B를 완전히 포함하고 있지 않더라도 차집합은 항상 구할 수 있다. $A-B$는 집합 A에서 집합 B를 빼는 것이 아니라 집합 A에서 집합 B와 공통인 부분을 제외하는 것이다.

의미

차집합이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

차집합(**差集合**)에서 차(**差**)은 '차이', '서로 다름', '빼다'를 뜻하고, 집(**集**)은 '모으다'를 뜻하며, 합(**合**)은 '합하다'는 뜻을 가진다. 그러므로 차집합(**差集合**)은 한 집합에서 다른 집합을 뺀(**差**) 집합(**集合**) 즉, 한 집합에서 다른 집합과 공통인 부분을 빼고 그 집합과 다른 부분만으로 만든 집합을 의미한다.

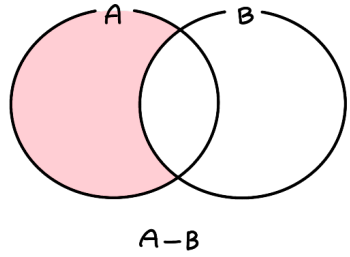
差 빼(차이) 차　　集 모을 집　　合 합할 합

차집합을 영어로는 difference set이라고 한다. difference에는 '차이', '차'라는 뜻이 있고, set은 '집합'을 뜻한다. 그러므로 difference set은 글자 그대로 차이 집합 즉, 차집합으로 번역된다.

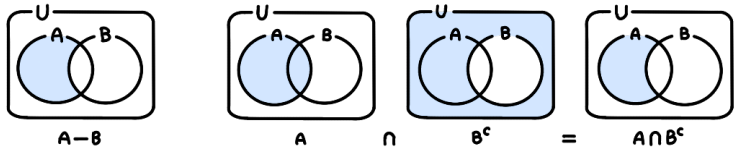
개념

차집합을 시각적으로 나타낼 수 있나요?

벤 다이어그램에서 차집합 $A-B$가 나타내는 영역은 집합 A의 영역에서 집합 B와 겹치는 부분을 제외한 나머지 부분이다.



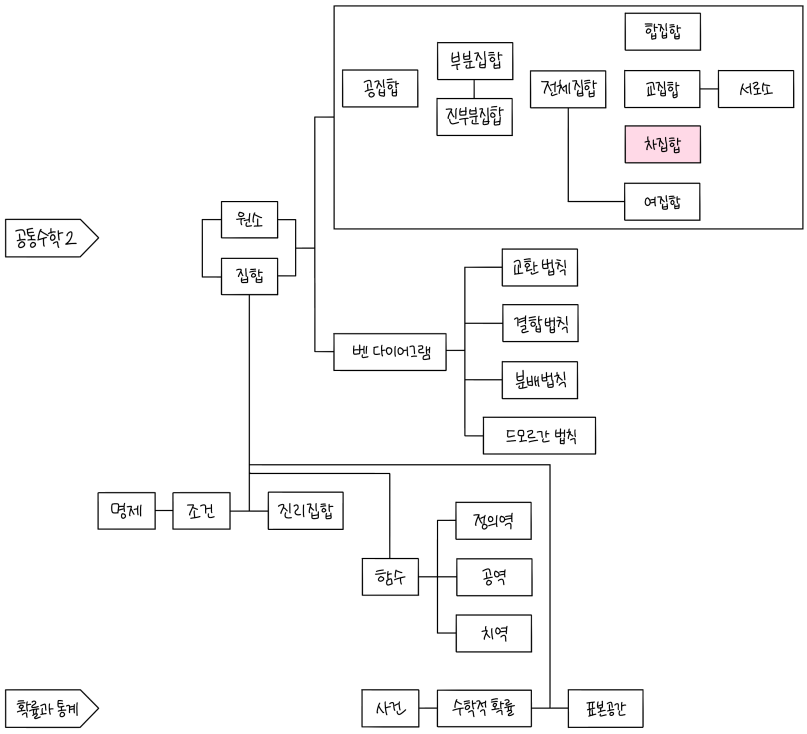
이를 이용하면, 전체집합 U의 두 부분집합 A와 B에 대하여 $A-B=A\cap B^C$가 성립함을 확인할 수 있다.



개념

차집합과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

차집합은 집합, 원소, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, (집합의) 서로소, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



집합 A에 대한 집합 B의 **차집합**은 A에는 속하지만 B에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합으로서, A와 B의 여집합의 교집합과 같다. 즉, $A-B=A\cap B^c$이다. 이것은 벤 다이어그램을 통해서도 금방 확인할 수 있다. 특히 집합 A에 대한 A의 차집합은 공집합 즉, $A-A=A\cap A^c=\varnothing$이므로 A와 A^c은 서로소이고, 전체집합 U에 대한 집합 A의 차집합은 A의 여집합 즉, $U-A=A^c$이다. 또, 만약 집합 A가 집합 B의 부분집합(진부분집합)이면, $A-B=\varnothing$이다.

합집합, 교집합과 달리 차집합에 대해서는 (집합의) 교환법칙과 결합법칙이 일반적으로 성립하지 않는다. 즉, 일반적으로 $A-B\neq B-A$, $(A-B)-C\neq A-(B-C)$이다.

서로소 서로素;disjoint

정의

서로소는 무엇인가요?

두 집합 A와 B에서 공통인 원소가 하나도 없을 때, 즉 $A \cap B = \varnothing$일 때, A와 B는 **서로소**라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 두 집합 $A = \{1, 3, 5\}$와 $B = \{2, 4, 6\}$에 대하여 A와 B는 공통으로 가지는 원소가 없으므로 $A \cap B = \varnothing$이다. 따라서 A와 B는 서로소이다.

❷ 공집합 $\varnothing$은 어떠한 원소도 가지지 않으므로, 집합 A와 공통으로 가지는 원소가 없다. 따라서 $\varnothing$은 모든 집합과 서로소인 집합이다.

의미

서로소라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

서로소(素)에서 소(素)에는 '본디', '바탕', '희다(흰색)'라는 뜻이 있고, 순수한 상태, 더 이상 나누어지지 않는 기본 상태, 아무 것도 섞이지 않은 상태 등의 의미를 지닌다. 2보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신 이외의 약수가 없는 수를 소(素)수라고 하는데, 이는 더 이상 나누어지지 않는 수, 모든 자연수의 바탕이 되는 순수하고 기본적인 수라는 의미를 지닌다. 또 두 자연수가 서로소(素)라는 것은 두 수의 공통된 약수가 1 이외에는 아무 것도 없음을 의미한다. 이와 유사하게 두 집합이 서로소(素)라는 것은 두 집합 사이에 서로 공통인 원소가 아무 것도 없는(素) 상태 즉, 두 집합 사이에 서로 섞인 원소가 하나도 없는 상태를 의미한다.

서 로 素

흴(본디, 바탕) 소

두 집합의 서로소를 영어로는 disjoint라고 한다. disjoint에는 '뿔뿔이 흩어져있는', '서로 떨어져 있는'이라는 뜻이 있다. 그러므로 두 집합이 disjoint라는 것은 두 집합이

서로 떨어져 있어서 공통인 원소가 하나도 없는 상태 즉, 서로 어떤 원소도 섞이지 않은 상태를 의미하며, 이런 이유로 서로소라고 번역한 것으로 보인다.

개념

두 집합에 공통 원소가 없는 경우에 왜 따로 이름을 붙이나요?

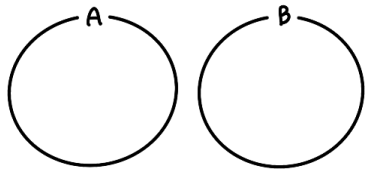
두 집합 A와 B에 대하여 $A \cap B = \varnothing$인 상황은 집합의 원소의 개수를 계산할 때 자주 등장하는 중요한 경우이다.

A와 B가 서로소인 경우 합집합 $A \cup B$의 원소의 개수는 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$와 같이 계산할 수 있다.

개념

서로소인 두 집합을 시각적으로 나타낼 수 있나요?

서로소인 두 집합은 벤 다이어그램을 사용하여 두 집합이 나타내는 영역이 서로 겹치지 않도록 그리면 시각적으로 표현할 수 있다.



개념

서로소인 자연수, 서로소인 집합에서 서로소는 같은 개념인가요?

❶ 두 자연수 $8, 15$와 같이 두 자연수의 공약수가 1뿐일 때, 두 자연수를 서로소(relatively prime)라고 한다.

❷ 집합의 경우 두 집합 A, B의 교집합 $A \cap B$가 공집합 $\varnothing$와 같을 때, 두 집합을 서로소(disjoint)라고 한다.

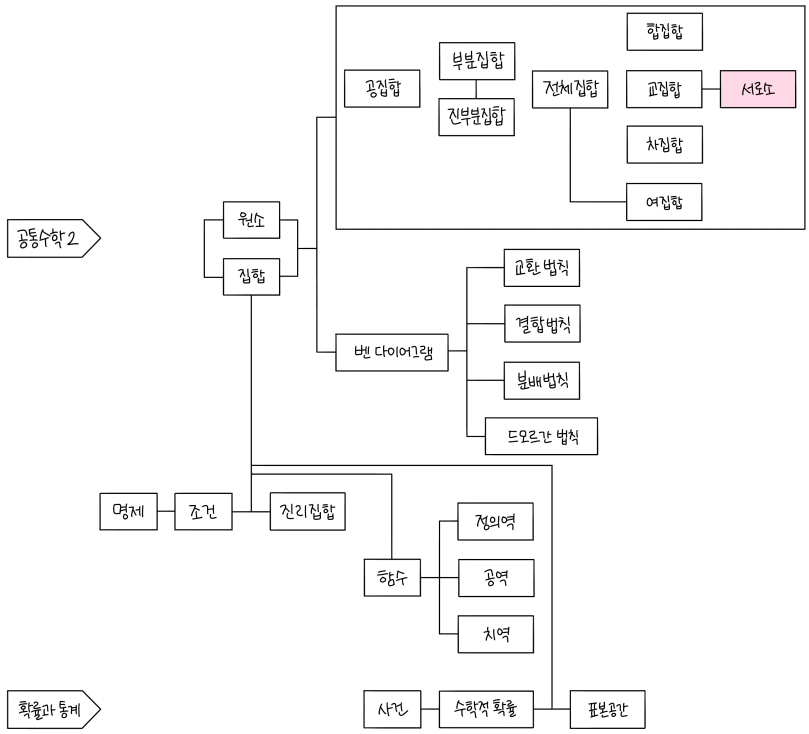
이처럼 두 상황에서 '서로소'는 공통된 것이 없다를 의미하는 공통점을 갖지만, 정확히는 자연수에서 '1을 제외한 공약수의 없음', 집합에서 '공통 원소의 없음'을 의미한다는 점이 다르다.

개념

(집합의) 서로소와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

(집합의) 서로소는 〈중학교 수학〉에서 다루는 (두 수의) 서로소, 집합, 원소, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합 등의 용어

및 개념과 관련이 있고, 〈확률과 통계〉에서 다루는 배반사건과도 관련이 있다.



두 **집합**이 **서로소**라는 것은, 1 이외의 공약수가 없는 두 (자연)수를 일컫는 두 수의 서로소와 달리, 두 집합의 공통 **원소**가 없음 즉, 두 집합의 **교집합**이 **공집합**임을 의미하고, 서로소인 두 집합의 **합집합**의 원소의 개수는 두 집합 각각의 원소의 개수를 더한 것과 같다. 이것은 **벤 다이어그램**에서 서로 겹치는 부분이 없는 두 개의 원 등으로 시각화하여 나타낼 수 있다.

전체집합과 서로소인 집합은 공집합 뿐이고, 두 집합 A와 B가 서로소이면 A에 대한 B의 차집합은 A 자신 즉, $A-B=A$이고, B에 대한 A의 차집합은 B 자신 즉, $B-A=B$이다.

만약 집합 A가 집합 B의 **부분집합**(**진부분집합**)이라면, A와 B의 **여집합**은 서로소이므로 A에 대한 B의 **차집합**은 공집합이다. 즉, $A-B=A\cap B^c=\varnothing$이다. 특히 $A-A=A\cap A^c=\varnothing$이다.

한편 어떤 시행에서 두 사건 A, B가 서로소일 때 즉, $A \cap B = \varnothing$일 때, A와 B는 서로 배반이라 하고, 이 두 사건을 서로 **배반사건**이라 부른다.

교환법칙交換法則; commutative law과 결합법칙結合法則; associative law

정의

교환법칙과 결합법칙은 무엇인가요?

두 집합 A와 B에 대하여

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$

가 성립하고, 이것을 각각 합집합과 교집합에 대한 **교환법칙**이라고 한다.

또, 세 집합 A, B, C에 대하여

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

가 성립하고, 이것을 각각 합집합과 교집합에 대한 **결합법칙**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

집합의 합집합과 교집합은 수의 덧셈과 곱셈과 마찬가지로 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.

❶ 두 집합 $A = \{1, 2\}$와 $B = \{2, 3\}$에 대하여 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, $B \cup A = \{1, 2, 3\}$이고 $A \cap B = \{2\}$, $B \cap A = \{2\}$이다. 따라서 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$이다. 이처럼 집합의 순서로 바꾸어도 결과가 달라지지 않는다.

❷ 세 집합 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$에 대하여

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$
$$A \cup (B \cup C) = \{1\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

이고

$$(A \cap B) \cap C = \{1\} \cap \{2, 3\} = \varnothing$$
$$A \cap (B \cap C) = \{1\} \cap \{2\} = \varnothing$$

이다. 따라서 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$이다.

이처럼 집합을 묶는 방법을 바꾸어도 결과가 달라지지 않는다.

의미

교환법칙, 결합법칙이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

교환법칙 교환법칙(交換法則)에서 교환(交換)은 '서로 자리를 바꾼다'를 뜻하고, 법칙(法則)은 글자 그대로 법칙을 뜻한다. 그러므로 집합에서 교환법칙(交換法則)은 집합 연산 즉, 합집합과 교집합 연산 각각에 대하여 연산의 대상이 되는 두 항 즉, 두 집합의 자리를 서로 교환(交換)해도 연산 결과가 같다는 성질 즉, 법칙(法則)을 말한다.



교환법칙을 영어로는 commutative law라고 한다. commutative에는 '교환의'라는 뜻이 있고, law는 '법칙'을 뜻하므로, commutative law는 글자 그대로 교환의 법칙 즉, 교환법칙으로 번역된다. 합집합과 교집합 연산 각각에 대하여 교환법칙이 성립한다.

결합법칙 결합법칙(結合法則)에서 결합(結合)은 '서로 묶어서 합하는 것'을 뜻하고, 법칙(法則)은 글자 그대로 법칙을 뜻한다. 그러므로 집합에서 결합법칙(結合法則)은 집합 연산 즉, 합집합과 교집합 연산 각각에 대하여 집합들을 결합(結合)하는 방식인 연산의 순서를 바꾸어도 연산 결과가 같다는 법칙(法則)을 말한다. 세 개의 연산이 있을 때 괄호를 이용하여 연산의 순서를 표시하는데, 연산의 순서를 바꾼다는 것은 괄호의 위치를 바꾼다는 것을 의미한다. 그러므로 결합법칙은 괄호 위치 즉, 묶음 순서를 바꾸어도 연산 결과가 변하지 않음을 의미한다.

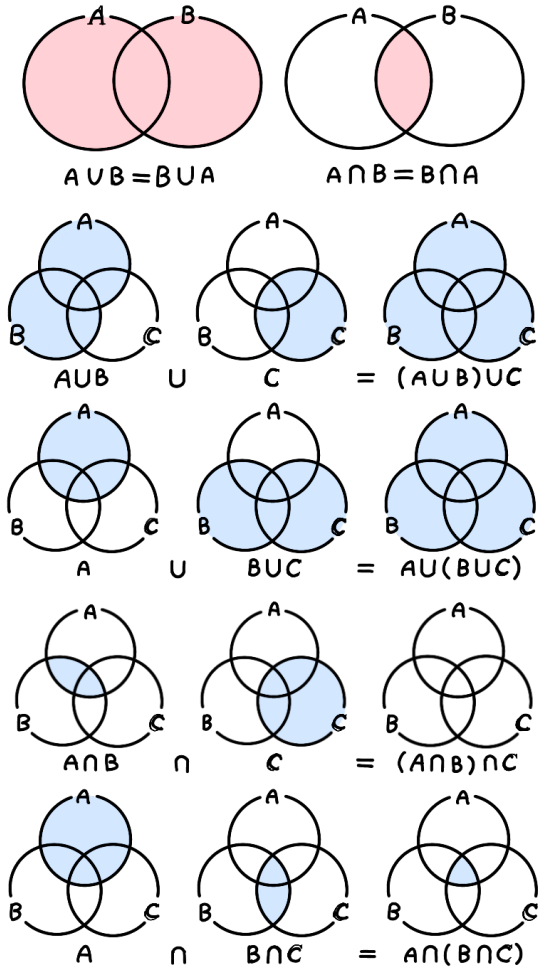


결합법칙을 영어로는 associative law라고 한다. associative에는 '결합의'라는 뜻이 있고, law는 '법칙'을 뜻하므로, associative law는 글자 그대로 결합의 법칙 즉, 결합법칙으로 번역된다. 합집합과 교집합 연산 각각에 대하여 결합법칙이 성립한다.

개념

교환법칙과 결합법칙이 성립하는지 어떻게 알 수 있나요?

벤 다이어그램으로 시각화하면 교집합과 합집합에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 알 수 있다.

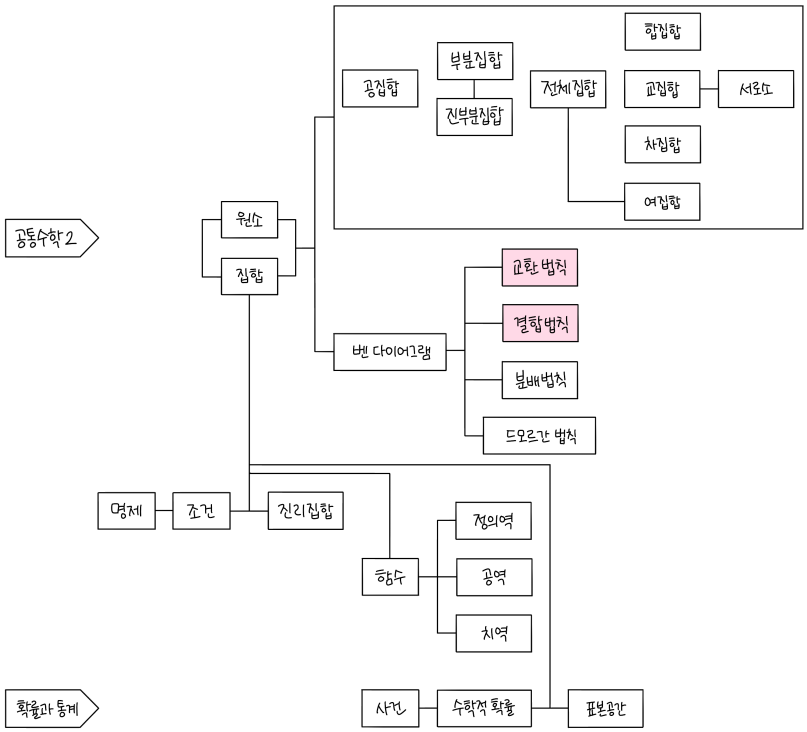


개념

(집합의) 교환법칙, 결합법칙과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

(집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙은 〈중학교 수학〉과 〈공통수학1〉에서 다루는 두 수(실수, 복소수)의 덧셈과 곱셈 각각에 대한 결합법칙과 교환법칙을 포함하여 집합, 원소, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 차집합, (집합의) 분배법칙, 드모르간의 법칙 등의 용어 및

개념과 관련이 있다.



두 실수 혹은 두 복소수의 덧셈과 곱셈 각각에 대하여 결합법칙과 교환법칙이 성립함을 〈중학교 수학〉과 〈공통수학1〉에서 다룬 바 있다. 이와 유사하게 두 집합의 합집합과 교집합 연산 각각에 대해서도 결합법칙과 교환법칙이 성립한다.

집합의 **교환법칙**과 **결합법칙**은 집합의 합집합과 교집합 연산 각각에 대하여 성립하는 성질로서, 결합법칙은 합집합(교집합) 연산이 여러 개 있을 때 연산의 순서를 바꾸어도 연산 결과가 같음을 의미하고, 교환법칙은 합집합(교집합) 연산의 대상이 되는 두 집합의 순서 즉, 위치를 바꾸어도 연산 결과가 같음을 의미한다. 이것은 벤 다이어그램을 통해서도 금방 확인할 수 있다.

그러나 차집합 연산에 대해서는 결합법칙과 교환법칙 그 어느 것도 일반적으로 성립하지 않는다. 집합 연산의 중요한 성질로 결합법칙과 교환법칙 이외에 분배법칙, 드모르간의 법칙도 있다.

분배법칙分配法則; distributive law

정의

분배법칙은 무엇인가요?

세 집합 A, B, C에 대하여

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

가 성립하고, 이것을 집합의 연산에 대한 **분배법칙**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

세 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{3, 5\}$를 생각하자.

❶ $B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$이므로

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$$

이고, $A \cap B = \{2\}$, $A \cap C = \{3\}$이므로

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$$

이다. 따라서 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$이다.

❷ $B \cap C = \varnothing$이므로

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup \varnothing = \{1, 2, 3\}$$

이고, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$이므로

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3\}$$

이다. 따라서 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$이다.



집합에서는 합집합도 분배가 되네요?

집합의 연산에 대한 분배법칙 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$는 수에서의 분배법칙

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$와 비슷하다.

수에서는 일반적으로 $a + (b \times c) = (a+b) \times (a+c)$가 성립하지 않지만, 집합에서는 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$가 성립한다.

의미

분배법칙이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

분배법칙(分配法則)에서 분배(分配)는 '어떤 것을 여러 부분에 나누어 배분함'을 뜻하고, 법칙(法則)은 글자 그대로 법칙을 뜻한다. 그러므로 집합에서 분배법칙(分配法則)은 집합 연산을 여러 부분에 분배(分配)하여 적용하는 것에 대한 법칙(法則)을 말한다. 교집합 연산을 여러 부분에 분배한 뒤 합집합 연산을 적용할 수도 있고 합집합 연산을 여러 부분에 분배한 뒤 교집합 연산을 적용할 수도 있다.

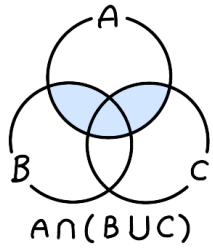
分	配	法	則
나눌 분	나눌 배	법 법	법칙 칙

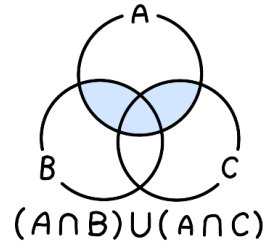
분배법칙을 영어로는 distributive law라고 한다. distributive에는 '분배의'라는 뜻이 있고, law는 '법칙'을 뜻하므로, distributive law는 글자 그대로 분배의 법칙 즉, 분배법칙으로 번역된다.

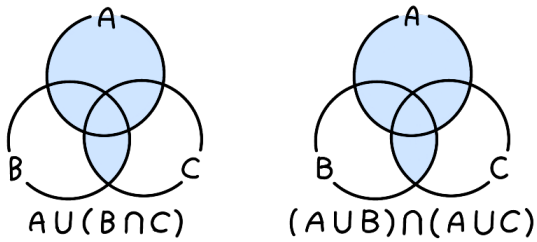
개념

분배법칙이 성립하는지 어떻게 알 수 있나요?

벤 다이어그램으로 시각화하면 교집합과 합집합에 대한 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 알 수 있다.



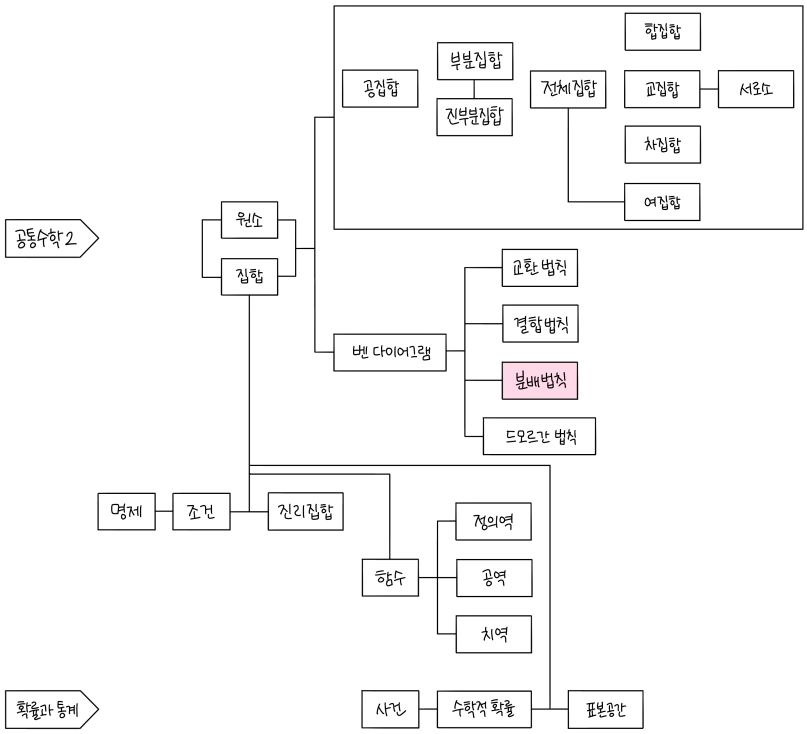




개념

(집합의) 분배법칙과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

(집합의) 분배법칙은 〈중학교 수학〉과 〈공통수학1〉에서 다루는 두 수(실수, 복소수)의 덧셈과 곱셈에 대한 분배법칙을 포함하여 집합, 원소, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, (집합의) 결합법칙, (집합의) 교환법칙, 드모르간의 법칙 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



두 실수 혹은 두 복소수의 덧셈과 곱셈에 대하여 분배법칙이 성립함을 즉, $a(b+c)=ab+ac$임을 〈중학교 수학〉과 〈공통수학1〉에서 다룬 바 있다. 이와 유사하게 두 집합의 합집합과 교집합 연산에 대해서도 분배법칙이 성립한다.

집합의 교환법칙과 결합법칙이 두 집합의 합집합과 교집합 연산 각각에 대하여 성립하는 성질이라고 한다면, **분배법칙**은 합집합과 교집합 연산이 혼합되어 있을 때 성립하는 성질로서, 세 집합 A, B, C에 대하여 $A \cap (B \cup C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C)) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$가 성립한다는 것이다. 이것은 벤 다이어그램을 통해 시각적으로 확인할 수 있다. 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙 이외에 집합 연산의 중요한 성질로 드모르간의 법칙도 있다.

드모르간의 법칙드모르간의 法則; De Morgan's law

정의

드모르간의 법칙은 무엇인가요?

전체집합 U의 두 부분집합 A와 B에 대하여

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

가 성립하고, 이것을 **드모르간의 법칙**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$와 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$를 생각하자.

❶ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$이므로 $(A \cup B)^C = \{5\}$이고, $A^C = \{4, 5\}$, $B^C = \{1, 2, 5\}$이므로 $A^C \cap B^C = \{5\}$이다. 따라서 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$이다.

❷ $A \cap B = \{3\}$이므로 $(A \cap B)^C = \{1, 2, 4, 5\}$이고, $A^C = \{4, 5\}$, $B^C = \{1, 2, 5\}$이므로 $A^C \cup B^C = \{1, 2, 4, 5\}$이다. 따라서 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$이다.

의미

분배법칙이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

드모르간의 법칙(法則)에서 드모르간(De Morgan)은 영국의 수학자이자 논리학자인 어거스터스 드 모르간(Augustus De Morgan, 1806-1871)의 이름이고, 법칙(法則)은 글자 그대로 법칙을 뜻한다. 즉, 드모르간의 법칙은 드 모르간이 자신의 저서 Formal Logic에서 명제로 제시한 논리와 집합 연산의 부정에 대한 기본 법칙이기에 그의 이름을 따서 드모르간의 법칙이라 부르는 것이다.

드 모 르 간 의 法 則

법 법 법칙 칙

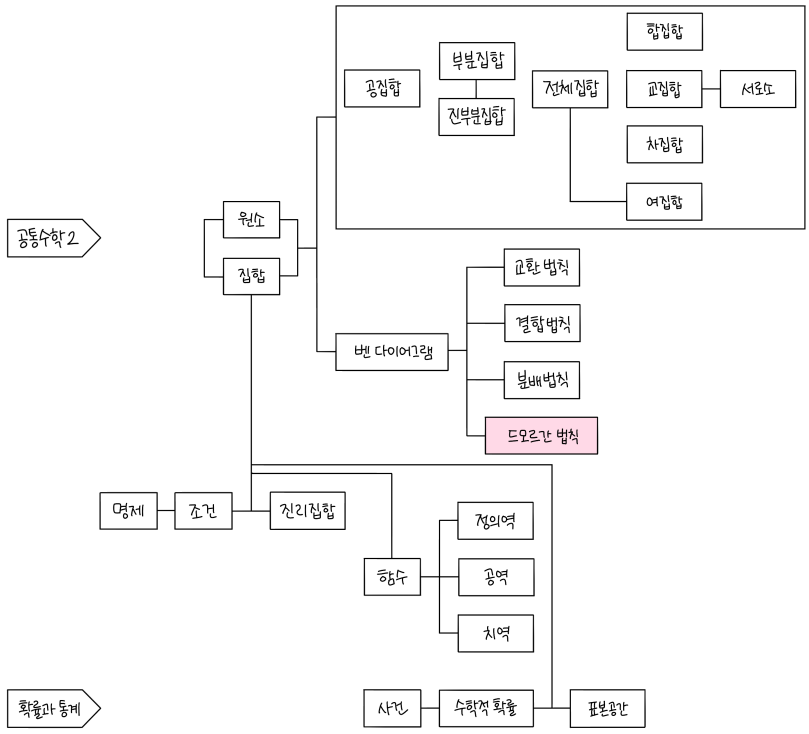
드모르간의 법칙을 영어로는 De Morgan's law라고 한다. De Morgan's는 '드모르간의'를 뜻하고, law는 '법칙'을 뜻하므로, De Morgan's law는 글자 그대로

드모르간의 법칙으로 번역된다.

개념

드모르간의 법칙과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

드모르간의 법칙은 집합, 원소, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, (집합의) 결합법칙, (집합의) 교환법칙, 분배법칙 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



두 **집합**의 **합집합**과 **교집합** 연산에 대하여 성립하는 성질 중 하나인 **드모르간의 법칙**은 두 집합의 합집합의 **여집합**은 각 집합의 여집합의 교집합과 같고, 두 집합의 교집합의 여집합은 각 집합의 여집합의 합집합과 같음을 의미한다. 이것은 **벤 다이어그램**을 통해 시각적으로 확인할 수 있다. 드모르간의 법칙 이외에 집합 연산의 중요한 성질로 집합의 **교환법칙**, **결합법칙**, **분배법칙**이 있다.

명제命題; proposition

정의

명제는 무엇인가요?

참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식을 **명제**라고 한다.

명제는 보통 알파벳 소문자 p, q, r, $\cdots$ 로 나타낸다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ '3은 2보다 크다.'는 참인 문장이므로 명제이다.

❷ '18은 4의 배수이다.'는 거짓인 문장이므로 명제이다.



'18은 4의 배수이다.'는 거짓인데, 왜 이런 문장도 명제가 되나요?

명제는 참인지 거짓인지 판별할 수 있는 문장을 말한다. 따라서 그 문장이 참인지 거짓인지와는 관계없이, 판별이 가능하기만 하면 명제가 된다.

주어진 문장이 명제인지를 판별할 때는 '참이냐 거짓이냐'가 아니라, '참인지 거짓인지 판별 가능하냐'로 결정해야 한다.

의미

명제라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

명제(**命題**)에서 명(**命**)에는 '명하다', '정하다'는 뜻이 있고, 제(**題**)에는 '주제', '제목', '문장'이라는 뜻이 있다. 그러므로 명제(**命題**)은 참인지 거짓인지 정할 수 있는 또는 정해진 (**命**) 문장이나 문제(**題**)을 의미한다.

命	題
명할(정할) 명	제목(문제) 제

명제를 영어로는 proposition이라고 한다. proposition에는 '진술', '주장'이라는 뜻이 있는데, 여기에 그 진위 즉, 참과 거짓 여부를 분명히 정할 수 있다는 또는 정해져 있다는

의미를 더하여 명제라고 번역한 것으로 보인다.

개념

명제가 아닌 문장도 있나요?

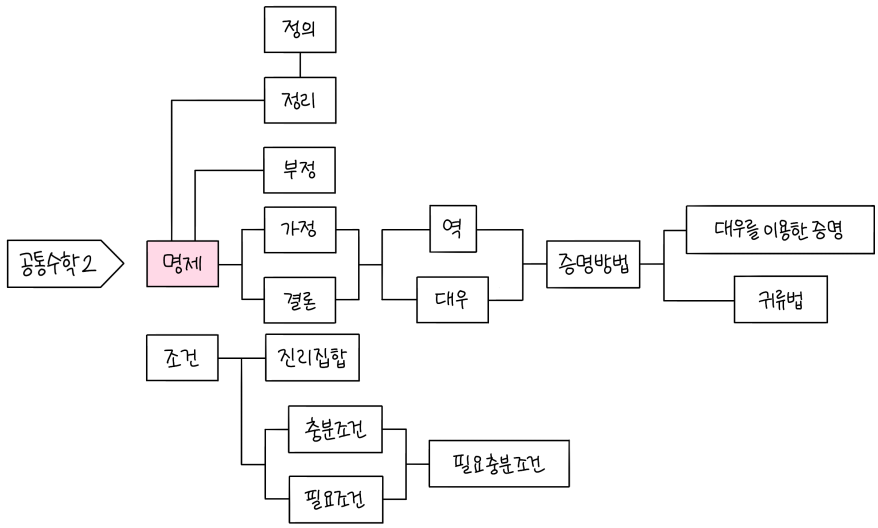
'100은 큰 수이다.'는 '크다'의 기준이 명확하지 않으므로 참인지 거짓인지 판별할 수 없다. 따라서 이 문장은 명제가 아니다.

또한 '이 영화는 재밌다.', '이 문제는 쉽다.'에서 '재밌다', '쉽다'와 같이 개인의 감정, 취향 또는 평가, 즉 주관적인 판단이 포함된 문장은 기준이 명확하지 않으므로 참인지 거짓인지 판별할 수 없다. 따라서 이러한 문장들은 명제가 될 수 없다.

개념

명제와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

명제는 가정, 결론, 정의, 정리, 조건, 진리집합, 부정, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법, 절대부등식 등의 용어 및 개념과 관련이 있다. 한편 수학에서 다루는 문장이나 식 중에서 어떤 개념이나 용어의 뜻을 정한 정의를 제외한 대부분의 문장이나 식은 참, 거짓에 대한 판별을 필요로 하는 명제 또는 정리라는 점에서 명제는 수학의 모든 영역의 대부분의 용어 및 개념과 관련이 있다.



명제는 어떤 용어나 개념의 뜻을 약속으로 정하는 **정의**와 달리 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있고 또 판별해야 하는 문장이나 식으로서, 참임이 증명된 경우 **정리**라고 부른다. 명제와는 달리 문장에 포함된 변수(이를테면, x)의 값에 따라 참, 거짓이 판별되는

문장이나 식을 **조건**이라 하고, 조건이 참이 되게 하는 모든 변수(이를테면, x)의 값의 집합을 그 조건의 **진리집합**이라 한다. 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식인 **절대부등식**은 그 진리집합이 전체집합 즉, 실수 전체의 집합인 부등식 형태의 조건이라 할 수 있다.

명제는 조건(이를테면, $p(x)$, $q(x)$ 등)을 이용하여 조건문 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 형태로 나타낼 수 있다. 이때 $p(x)$를 이 명제의 **가정**이라 하고, $q(x)$를 이 명제의 **결론**이라 한다.

예를 들어 명제 '2는 짝수이다.'는 두 조건 'x는 2이다.'와 'x는 짝수이다.'를 이용하여 '모든 x에 대하여 x가 2이면 x는 짝수이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 이 명제의 가정은 'x는 2이다.'이고, 결론은 'x는 짝수이다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 두 조건 $p(x)$와 $q(x)$의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있다. 즉, $P \subset Q$이면 주어진 명제는 참이고 그렇지 않을 경우 거짓이다. 또 주어진 명제가 참일 때 즉, $P \subset Q$일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 하고, $p(x)$가 $q(x)$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 한다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 가정과 결론을 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $q(x)$이면 $p(x)$이다.'를 원래 명제의 **역**이라 하고, 가정과 결론을 각각 **부정**하여 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$이면 $\sim p(x)$이다.'를 원래 명제의 **대우**라고 한다. 두 조건 $p(x)$, $q(x)$의 진리집합 P, Q에 대하여 두 조건의 부정 $\sim p(x)$, $\sim q(x)$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이고, 이때 $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다. 그러므로 어떤 명제의 참, 거짓을 판별할 때 원래 명제 대신 그 명제의 대우의 참, 거짓을 판별해도 된다. 즉, 어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명해도 된다는 것이다.

명제가 참임을 증명하는 방법 중 그 명제의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진 사실이나 주어진 가정에 모순이 생긴다는 것을 보여 증명하는 방법을 **귀류법**이라 한다. 귀류법은 명제를 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'로 나타내었을 때 이 명제의 부정 '$p(x)$이고 $\sim q(x)$인 x가 존재한다.'가 거짓임을 보이는 것 즉, 조건 $p(x)$를 만족하지만

조건 $q(x)$는 만족하지 않는 x는 존재할 수 없음을 보이는 것이라 할 수 있다.

정의定義; definition와 정리定理; theorem

정의

정의와 정리는 무엇인가요?

용어의 뜻을 명확하게 정한 것을 그 용어의 **정의**라고 한다.

또, 참임이 증명된 명제 중에서 기본이 되거나 다른 명제를 증명할 때 이용할 수 있는 것을 **정리**라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ '집합 A의 여집합 A^C는 전체집합 U에서 A에 속하지 않는 원소들의 집합이다.'는 여집합의 정의이다.

또한 '이등변삼각형은 두 변의 길이가 같은 삼각형이다.', '직각삼각형은 한 내각이 직각인 삼각형이다.'는 각각 이등변삼각형과 직각삼각형의 정의이다.

❷ '전체집합 U와 두 집합 A, B에 대하여 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$가 성립한다.'는 정리이다.

또한 '이등변삼각형에서 두 밑각의 크기는 같다.', '직각삼각형에서 빗변의 길이의 제곱은 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합과 같다(피타고라스의 정리).'는 정리의 대표적인 예이다.

의미

정의, 정리라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

정의 정의(定義)에서 정(定)은 '정하다', '결정하다'는 뜻이 있고, 의(義)는 '뜻', '의미', '도리'를 뜻한다. 그러므로 정의(定義)은 어떤 개념이나 용어의 뜻이나 의(義)미를 명확하게 정(定)하는 것을 의미한다.

定	義
정할 정	뜻 의

정의를 영어로 definition이라고 한다. definition은 그 자체로 '정의'를 뜻하므로,

그대로 정의라고 번역된다.

정리 정리(定理)에서 정(定)은 '정하다', '결정하다'는 뜻이 있고, 리(理)는 '이치', '원리', '법칙'을 뜻한다. 그러므로 정리(定理)은 정(定)해진 이(義)치 또는 확정된 진리 즉, 이미 증명되어 참임이 확정된 명제를 의미한다.



정리를 영어로는 theorem이라고 한다. theorem은 '본다'는 뜻의 그리스어 theorema에서 유래했는데, 관찰과 고찰을 통해 얻어진 결론 또는 오랫동안 보고 검토한 결과 참임이 확인된 결론이라는 의미에서 정리라고 번역한 것으로 보인다.

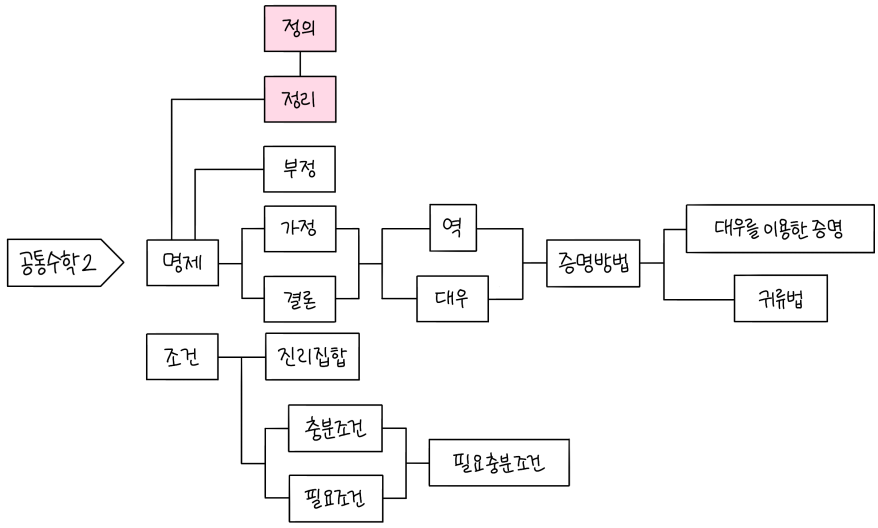
개념 **용어의 정의를 한가지로 명확하게 정하는 이유는 무엇인가요?**

수학에서 용어의 정의는 의사소통을 정확하게 하기 위한 약속이기 때문에 용어의 뜻을 한 가지로 명확하게 정하는 것이다.

따라서 정의를 정확히 알고 있어야 개념을 혼동하지 않고 사용할 수 있다. 예를 들어, '여집합'의 정의를 모르면 전체집합이 바뀌었을 때 여집합도 달라진다는 사실을 이해하기 어렵다.

개념 **정의, 정리와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?**

정의, 정리는 명제, 가정, 결론, 조건, 진리집합, 부정, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법, 절대부등식 등의 용어 및 개념과 관련이 있다. 한편 수학에서 다루는 대부분의 문장이나 식은 어떤 개념이나 용어의 뜻을 정하는 정의이거나 참, 거짓에 대한 판별과 증명을 필요로 하는 명제 또는 정리라는 점에서 정의와 정리는 수학의 모든 영역의 대부분의 용어 및 개념과 관련이 있다.



명제는 어떤 용어나 개념의 뜻을 약속으로 정하는 **정의**와 달리 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있고 또 판별해야 하는 문장이나 식으로서, 참임이 증명된 경우 **정리**라고 부른다. 명제와 정리는 참, 거짓을 판별하고 증명해야 하는 대상이라는 점에서 구분하지 않기도 한다. 명제와는 달리 문장에 포함된 변수(이를테면, x)의 값에 따라 참, 거짓이 판별되는 문장이나 식을 **조건**이라 하고, 조건이 참이 되게 하는 모든 변수(이를테면, x)의 값의 집합을 그 조건의 **진리집합**이라 한다. 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식인 **절대부등식**은 그 진리집합이 전체집합 즉, 실수 전체의 집합인 부등식 형태의 조건이라 할 수 있다.

명제(정리)는 조건(이를테면, $p(x)$, $q(x)$ 등)을 이용하여 조건문 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 형태로 나타낼 수 있다. 이때 $p(x)$를 이 명제(정리)의 **가정**이라 하고, $q(x)$를 이 명제(정리)의 **결론**이라 한다.

예를 들어 명제(정리) '2는 짝수이다.'는 두 조건 'x는 2이다.'와 'x는 짝수이다.'를 이용하여 '모든 x에 대하여 x가 2이면 x는 짝수이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 이 명제(정리)의 가정은 'x는 2이다.'이고, 결론은 'x는 짝수이다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 두 조건 $p(x)$와 $q(x)$의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있다. 즉, $P \subset Q$이면 주어진 명제는 참이고 그렇지 않을 경우 거짓이다. 또 주어진 명제(정리)가 참일 때 즉, $P \subset Q$일 때 $p(x)$

는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 하고, $p(x)$가 $q(x)$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 한다.

명제(정리) '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 가정과 결론을 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $q(x)$이면 $p(x)$이다.'를 원래 명제(정리)의 **역**이라 하고, 가정과 결론을 각각 **부정**하여 서로 바꾼 명제(정리) '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$이면 $\sim p(x)$이다.'를 원래 명제(정리)의 **대우**라고 한다. 두 조건 $p(x)$, $q(x)$의 진리집합 P, Q에 대하여 두 조건의 부정 $\sim p(x)$, $\sim q(x)$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이고, 이때 $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다. 그러므로 어떤 명제의 참, 거짓을 판별할 때 원래 명제 대신 그 명제의 대우의 참, 거짓을 판별해도 된다. 즉, 어떤 명제(정리)가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명해도 된다는 것이다.

명제(정리)가 참임을 증명하는 방법 중 그 명제(정리)의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진 사실이나 주어진 가정에 모순이 생긴다는 것을 보여 증명하는 방법을 **귀류법**이라 한다. 귀류법은 명제(정리)를 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'로 나타내었을 때 이 명제(정리)의 부정 '$p(x)$이고 $\sim q(x)$인 x가 존재한다.'가 거짓임을 보이는 것 즉, 조건 $p(x)$를 만족하지만 조건 $q(x)$는 만족하지 않는 x는 존재할 수 없음을 보이는 것이라 할 수 있다.

조건條件; condition과 진리집합眞理集合; truth set

정의 **조건과 진리집합은 무엇인가요?**

변수를 포함하는 문장이나 식 중에서 변수의 값에 따라 참, 거짓을 판별할 수 있는 것을 **조건**이라고 한다.

변수 x를 포함하는 조건을 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $\cdots$로 나타내는데, 이를 간단히 p, q, r, $\cdots$로 나타내기도 한다.

또, 전체집합 U의 원소 중에서 조건 p가 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 조건 p의 **진리집합**이라고 한다.

예 **구체적인 예와 함께 설명해 주세요.**

❶ 'x는 2의 배수이다.'라는 변수 x를 포함하는 문장은 x의 값이 정해져 있지 않으면 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다. 그런데 x의 값이 4로 정해지면 '4는 2의 배수이다.'라는 문장이 만들어지고 이는 참인 명제가 된다. 변수 x의 값에 따라 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 'x는 2의 배수이다.'는 조건이다.

❷ 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 원소 중에서 조건 'x는 2의 배수이다.'를 참이 되게 하는 모든 원소는 2, 4, 6이다. 따라서 이 조건의 진리집합은 $\{2, 4, 6\}$이다.

의미 **조건, 진리집합이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.**

조건 조건(條件)에서 조(條)는 '항목', '조목'을 뜻하고, 건(件)은 '사물', '사항', '경우', '요소'를 뜻한다. 그러므로 조건(條件)은 어떤 주장이나 판단이 참이 되게 하기 위해 필요한 조(條)목이나 사물, 물건(件) 등을 의미한다.

條	件
가지(조목) 조	물건 건

조건을 영어로 condition이라고 한다. condition에는 그 자체로 '조건'이라는 뜻이

있으므로 그대로 조건이라고 번역한다.

진리집합 진리집합(眞理集合)에서 진(眞)은 '참'을 뜻하고, 리(理)는 '이치', '원리', '법칙'을 뜻한다. 그러므로 진리집합(眞理集合)은 주어진 문장 즉, 조건이 참인(眞) 이치(理) 즉, 참인 명제가 되게 하는 원소들의 집합(集合)을 의미한다.



진리집합을 영어로는 truth set이라고 한다. truth에는 '진리'라는 뜻이 있고, set은 '집합'을 뜻하므로, truth set은 글자 그대로 진리집합으로 번역된다.

개념 **전체집합이 바뀌면 조건의 진리집합도 바뀌나요?**

조건 p의 진리집합을 정의할 때 전체집합이 사용되었으므로 전체집합이 바뀌면 진리집합도 바뀌게 된다.

예를 들어, 조건 p를 $x>3$이라고 하자.

❶ 전체집합을 자연수 전체의 집합으로 하면 p의 진리집합은 $\{4,5,6,7,\cdots\}$이다.

❷ 한편, 전체집합을 $U=\{1,2,3,4,5\}$로 정하면 p의 진리집합은 $\{4,5\}$이다.

이처럼 진리집합은 전체집합의 원소 중에서 p를 참이 되게 하는 모든 원소들의 집합을 의미하므로, 전체집합을 어떻게 정하느냐에 따라 달라질 수 있다.

개념 **진리집합이 공집합일 수도 있나요?**

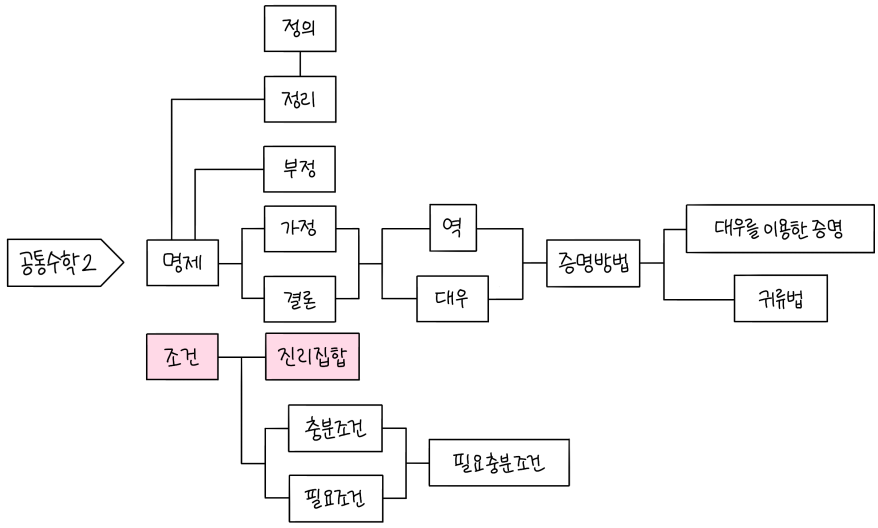
전체집합을 $U=\{1,2,3,4,5\}$로 정하면 '$x>10$'을 참이 되게 하는 원소는 U에 없으므로 U에서 조건 '$x>10$'의 진리집합은 공집합 $\varnothing$이다.

그러나 진리집합이 공집합이라고 해서 $x>10$이 조건이 아니라고 판단해서는 안 된다. $x>10$은 x의 값이 주어지면 참인지 거짓인지 판별할 수 있으므로 여전히 조건이다.

개념

조건, 진리집합과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

조건, 진리집합은 명제, 가정, 결론, 정의, 정리, 부정, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법, 절대부등식 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



명제는 어떤 용어나 개념의 뜻을 약속으로 정하는 **정의**와 달리 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있고 또 판별해야 하는 문장이나 식으로서, 참임이 증명된 경우 **정리**라고 부른다. 명제와는 달리 문장에 포함된 변수(이를테면, x)의 값에 따라 참, 거짓이 판별되는 문장이나 식을 **조건**이라 하고, 조건이 참이 되게 하는 모든 변수(이를테면, x)의 값의 집합을 그 조건의 **진리집합**이라 한다. 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식인 **절대부등식**은 그 진리집합이 전체집합 즉, 실수 전체의 집합인 부등식 형태의 조건이라 할 수 있다.

명제는 조건(이를테면, $p(x)$, $q(x)$ 등)을 이용하여 조건문 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 형태로 나타낼 수 있다. 이때 $p(x)$를 이 명제의 **가정**이라 하고, $q(x)$를 이 명제의 **결론**이라 한다.

예를 들어 명제 '2는 짝수이다.'는 두 조건 'x는 2이다.'와 'x는 짝수이다.'를 이용하여 '모든 x에 대하여 x가 2이면 x는 짝수이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 이 명제의 가정은 'x는 2이다.'이고, 결론은 'x는 짝수이다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 두 조건 $p(x)$와 $q(x)$의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있다. 즉, $P \subset Q$이면 주어진 명제는 참이고 그렇지 않을 경우 거짓이다. 또 주어진 명제가 참일 때 즉, $P \subset Q$일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 하고, $p(x)$가 $q(x)$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 한다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 가정과 결론을 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $q(x)$이면 $p(x)$이다.'를 원래 명제의 **역**이라 하고, 가정과 결론을 각각 **부정**하여 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$이면 $\sim p(x)$이다.'를 원래 명제의 **대우**라고 한다. 두 조건 $p(x)$, $q(x)$의 진리집합 P, Q에 대하여 두 조건의 부정 $\sim p(x)$, $\sim q(x)$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이고, 이때 $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다. 그러므로 어떤 명제의 참, 거짓을 판별할 때 원래 명제 대신 그 명제의 대우의 참, 거짓을 판별해도 된다. 즉, 어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명해도 된다는 것이다.

명제가 참임을 증명하는 방법 중 그 명제의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진 사실이나 주어진 가정에 모순이 생긴다는 것을 보여 증명하는 방법을 **귀류법**이라 한다. 귀류법은 명제를 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'로 나타내었을 때 이 명제의 부정 '$p(x)$이고 $\sim q(x)$인 x가 존재한다.'가 거짓임을 보이는 것 즉, 조건 $p(x)$를 만족하지만 조건 $q(x)$는 만족하지 않는 x는 존재할 수 없음을 보이는 것이라 할 수 있다.

부정否定; negation

정의

부정은 무엇인가요?

명제 p에 대하여 'p가 아니다.'를 명제 p의 **부정**이라 하며, 이것을 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다. 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

명제의 부정과 마찬가지로, 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 조건 p의 부정이라 하며, 이것을 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다. 전체집합 U에서 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 명제 p를 '4는 짝수이다.'라 하자. 그러면 p의 부정 $\sim p$는 '4는 짝수가 아니다.'이다. 이 경우 p는 참인 명제이고, $\sim p$는 거짓인 명제이다.

❷ 조건 p를 'x는 3 보다 크다.', 즉 '$x > 3$'이라 하자. 그러면 p의 부정 $\sim p$는 'x는 3 보다 크지 않다.', 즉 '$x \le 3$'이다. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 p의 진리집합은 $P = \{4, 5\}$이고, $\sim p$의 진리집합은 $P^C = \{1, 2, 3\}$이다.

의미

부정이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

부정(否定)에서 부(否)에는 '아니하다', '거부하다'는 뜻이 있고, 정(定)에는 '정하다', '규정하다'는 뜻이 있다. 그러므로 부정(否定)은 정(定)한 것을 아니라고(否) 함 즉, 어떤 명제나 조건에 대하여 그것이 아니라고 진술하는 것을 의미한다.



부정을 영어로는 negation이라고 한다. negation은 그 자체로 '부정', '거부'를 뜻하며, '부인하다', '아니라고 하다'는 뜻의 라틴어 negare에서 유래되었다. 어떤 명제나 조건 p의 부정은 통상 $\sim p$와 같이 나타내고, 'p의 부정(negation)' 또는 '낫(not) p'라고 읽는다.

개념

명제를 두 번 부정하면 어떻게 되나요? 다시 원래 명제가 되나요?

명제 p의 부정은 $\sim p$가 되고, 이것의 부정은 $\sim(\sim p)$가 된다. 이때, $\sim(\sim p)$는 원래 명제 p와 같은 의미가 된다.

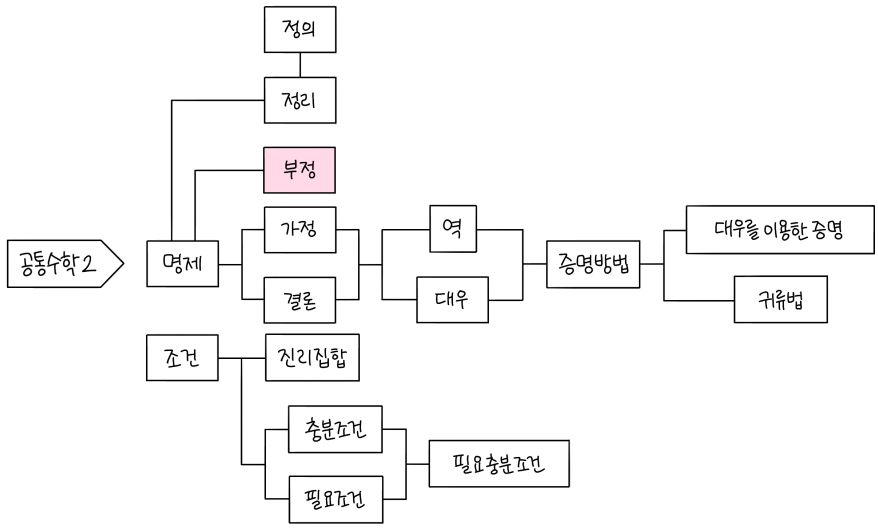
예를 들어, 명제 p를 '5는 소수이다.'라 하면, $\sim p$는 '5는 소수가 아니다.'가 된다. 또한, $\sim(\sim p)$는 '5는 소수가 아니다가 아니다.', 즉 '5는 소수이다.'가 된다.

이처럼 명제 p에 대하여 $\sim(\sim p)$는 p이다.

개념

명제의 부정과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

명제의 부정은 명제, 가정, 결론, 정의, 정리, 조건, 진리집합, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법, 절대부등식 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



명제는 어떤 용어나 개념의 뜻을 약속으로 정하는 **정의**와 달리 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있고 또 판별해야 하는 문장이나 식으로서, 참임이 증명된 경우 **정리**라고 부른다. 명제와는 달리 문장에 포함된 변수(이를테면, x)의 값에 따라 참, 거짓이 판별되는 문장이나 식을 **조건**이라 하고, 조건이 참이 되게 하는 모든 변수(이를테면, x)의 값의 집합을 그 조건의 **진리집합**이라 한다. 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식인 **절대부등식**은 그 진리집합이 전체집합 즉, 실수 전체의 집합인 부등식 형태의 조건이라 할 수 있다.

명제는 조건(이를테면, $p(x)$, $q(x)$ 등)을 이용하여 조건문 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 형태로 나타낼 수 있다. 이때 $p(x)$를 이 명제의 **가정**이라 하고, $q(x)$를 이 명제의 **결론**이라 한다.

예를 들어 명제 '2는 짝수이다.'는 두 조건 'x는 2이다.'와 'x는 짝수이다.'를 이용하여 '모든 x에 대하여 x가 2이면 x는 짝수이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 이 명제의 가정은 'x는 2이다.'이고, 결론은 'x는 짝수이다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 두 조건 $p(x)$와 $q(x)$의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있다. 즉, $P \subset Q$이면 주어진 명제는 참이고 그렇지 않을 경우 거짓이다. 또 주어진 명제가 참일 때 즉, $P \subset Q$일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 하고, $p(x)$가 $q(x)$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 한다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 가정과 결론을 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $q(x)$이면 $p(x)$이다.'를 원래 명제의 **역**이라 하고, 가정과 결론을 각각 **부정**하여 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$이면 $\sim p(x)$이다.'를 원래 명제의 **대우**라고 한다. 두 조건 $p(x)$, $q(x)$의 진리집합 P, Q에 대하여 두 조건의 부정 $\sim p(x)$, $\sim q(x)$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이고, 이때 $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다. 그러므로 어떤 명제의 참, 거짓을 판별할 때 원래 명제 대신 그 명제의 대우의 참, 거짓을 판별해도 된다. 즉, 어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명해도 된다는 것이다.

명제가 참임을 증명하는 방법 중 그 명제의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진 사실이나 주어진 가정에 모순이 생긴다는 것을 보여 증명하는 방법을 **귀류법**이라 한다. 귀류법은 명제를 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'로 나타내었을 때 이 명제의 부정 '$p(x)$이고 $\sim q(x)$인 x가 존재한다.'가 거짓임을 보이는 것 즉, 조건 $p(x)$를 만족하지만 조건 $q(x)$는 만족하지 않는 x는 존재할 수 없음을 보이는 것이라 할 수 있다.

가정假定; assumption과 결론結論; conclusion

정의

가정과 결론은 무엇인가요?

두 조건 p와 q로 이루어진 명제 'p이면 q이다.'를 기호로 $p \longrightarrow q$와 같이 나타낸다. 이때 p를 **가정**, q를 **결론**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 두 조건 p: $x > 3$과 q: $x^2 > 9$으로 이루어진 명제 '$x > 3$이면 $x^2 > 9$이다.'에서 가정은 '$x > 3$'이고, 결론은 '$x^2 > 9$'이다.

❷ 명제 '4의 배수이면 2의 배수이다.'를 'x가 4의 배수이면 x가 2의 배수이다.'와 같이 두 조건으로 이루어진 명제로 볼 수 있다. 따라서 이 명제를 가정 'x가 4의 배수이다.'과 결론 'x가 2의 배수이다.'로 나눌 수 있다.

의미

가정, 결론이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

가정 가정(假定)에서 가(假)에는 '임시로', '거짓으로'라는 뜻이 있고, 정(定)은 '정하다', '결정하다'를 뜻한다. 그러므로 가정(假定)은 임시로(假) 정(定)해 놓은 것 즉, 명제의 결론을 도출하기 위해 설정해 놓은 전제를 의미한다.

假	定
임시(거짓) 가	정할 정

가정을 영어로는 assumption 또는 hypothesis라고 한다. assumption은 '끌어와서 받아들이다'는 뜻의 라틴어 assumere에서 유래하여 검증없이 받아들이는 전제라는 의미가 있고, hypothesis는 '아래에 놓은 것'이라는 뜻의 그리스어 hypóthesis에서 유래하여 기초가 되는 말이나 전제라는 의미를 지닌다. assumption과 hypothesis 둘 다 가정, 추정, 가설 등으로 번역된다. 명제 '만약 A이면 B이다.(If A, then B)'에서 A가 이 명제의 가정이다.

결론 결론(結論)에서 결(結)에는 '매듭짓다', '끝맺다'는 뜻이 있고, 론(論)은 '논하다', '주장하다', '근거있는 말'을 뜻한다. 그러므로 결론(結論)은 논(論)의를 끝맺는(結) 진술 즉, 가정에서 출발하여 논리적 추론을 통해 얻게 되는 또는 도달한 최종 진술을 의미한다.



결론을 영어로는 conclusion이라고 한다. conclusion은 '결론을 내리다', '끝내다'는 뜻의 동사 conclude의 명사형으로 그 자체로 '결론'을 뜻한다. 명제 '만약 A이면 B이다.(If A, then B)'에서 B가 이 명제의 결론이다.

개념 **두 조건으로 이루어진 명제 'p이면 q이다.'의 참·거짓은 어떻게 판별하나요?**

두 조건 p와 q의 진리집합을 각각 P와 Q라 하자. 명제 'p이면 q이다.'의 참·거짓은 p, q의 진리집합 P, Q를 이용하여 설명할 수 있다.

P에 속하는 모든 원소가 Q의 원소이면, 즉 p가 참이 되게 하는 모든 원소에 대하여 조건 q가 참이 되면, 명제 'p이면 q이다.'는 참인 명제이다.

한편, P에 속하는 원소 중 Q에 속하지 않는 원소가 있으면, 즉 p기 참이 되게 하는 원소에 대하여 q가 거짓이 되게 하는 원소가 있으면, 명제 'p이면 q이다.'는 거짓인 명제이다.

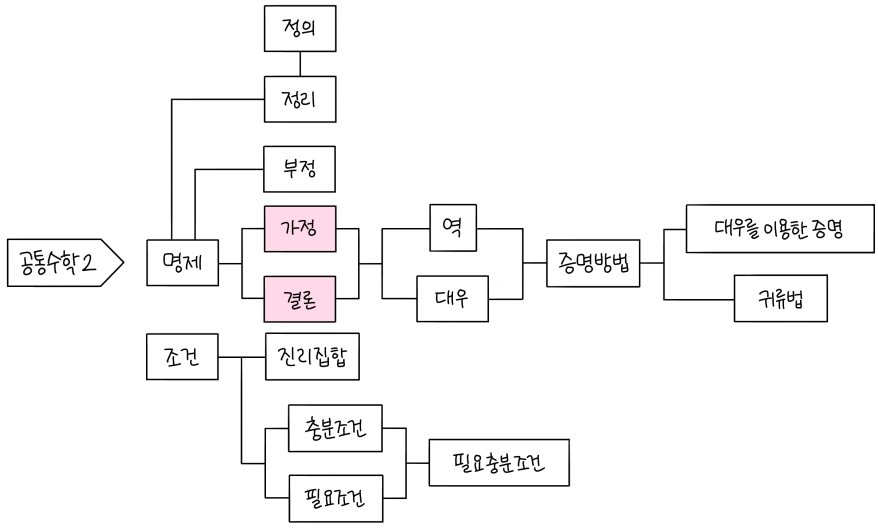
따라서, 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 두 조건 p와 q의 진리집합을 각각 P와 Q라 할 때

❶ $P \subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이다.

❷ $P \not\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이고, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이다.

개념 **가정, 결론과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?**

가정과 결론은 명제, 정의, 정리, 조건, 진리집합, 부정, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법, 절대부등식 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



명제는 어떤 용어나 개념의 뜻을 약속으로 정하는 **정의**와 달리 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있고 또 판별해야 하는 문장이나 식으로서, 참임이 증명된 경우 **정리**라고 부른다. 명제와는 달리 문장에 포함된 변수(이를테면, x)의 값에 따라 참, 거짓이 판별되는 문장이나 식을 **조건**이라 하고, 조건이 참이 되게 하는 모든 변수(이를테면, x)의 값의 집합을 그 조건의 **진리집합**이라 한다. 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식인 **절대부등식**은 그 진리집합이 전체집합 즉, 실수 전체의 집합인 부등식 형태의 조건이라 할 수 있다.

명제는 조건(이를테면, $p(x)$, $q(x)$ 등)을 이용하여 조건문 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 형태로 나타낼 수 있다. 이때 $p(x)$를 이 명제의 **가정**이라 하고, $q(x)$를 이 명제의 **결론**이라 한다.

예를 들어 명제 '2는 짝수이다.'는 두 조건 'x는 2이다.'와 'x는 짝수이다.'를 이용하여 '모든 x에 대하여 x가 2이면 x는 짝수이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 이 명제의 가정은 'x는 2이다.'이고, 결론은 'x는 짝수이다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 두 조건 $p(x)$와 $q(x)$의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있다. 즉, $P \subset Q$이면 주어진 명제는 참이고 그렇지 않을 경우 거짓이다. 또 주어진 명제가 참일 때 즉, $P \subset Q$일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 하고, $p(x)$가 $q(x)$이기

위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 한다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 가정과 결론을 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $q(x)$이면 $p(x)$이다.'를 원래 명제의 **역**이라 하고, 가정과 결론을 각각 **부정**하여 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$이면 $\sim p(x)$이다.'를 원래 명제의 **대우**라고 한다. 두 조건 $p(x)$, $q(x)$의 진리집합 P, Q에 대하여 두 조건의 부정 $\sim p(x)$, $\sim q(x)$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이고, 이때 $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다. 그러므로 어떤 명제의 참, 거짓을 판별할 때 원래 명제 대신 그 명제의 대우의 참, 거짓을 판별해도 된다. 즉, 어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명해도 된다는 것이다.

명제가 참임을 증명하는 방법 중 그 명제의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진 사실이나 주어진 가정에 모순이 생긴다는 것을 보여 증명하는 방법을 **귀류법**이라 한다. 귀류법은 명제를 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'로 나타내었을 때 이 명제의 부정 '$p(x)$이고 $\sim q(x)$인 x가 존재한다.'가 거짓임을 보이는 것 즉, 가정 $p(x)$를 만족하지만 결론 $q(x)$는 만족하지 않는 x는 존재할 수 없음을 보이는 것이라 할 수 있다.

역逆; converse과 대우對偶; contraposition

정의

역과 대우는 무엇인가요?

명제 $p \longrightarrow q$에서 가정과 결론을 서로 바꾼 명제

$$q \longrightarrow p$$

를 명제 $p \longrightarrow q$의 **역**이라고 한다.

또, 명제 $p \longrightarrow q$에서 가정과 결론을 각각 부정하여 서로 바꾼 명제

$$\sim q \longrightarrow \sim p$$

을 명제 $p \longrightarrow q$의 **대우**라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

명제 '$x > 3$이면 $x^2 > 9$이다.'에 대하여 가정은 $x > 3$이고, 결론은 $x^2 > 9$이다.

❶ 가정과 결론을 서로 바꾸어 만든 새로운 명제 '$x^2 > 9$이면 $x > 3$이다.'가 주어진 명제의 역이다.

❷ 가정과 결론을 각각 부정하여 서로 바꾼 명제 '$x^2 \leq 9$이면 $x \leq 3$이다.'가 주어진 명제의 대우이다.

의미

역, 대우라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

(역) 역(逆)은 '거꾸로 하다', '거슬러 올라가다'라는 뜻이 있다. 즉, 주어진 명제에 대하여 그 명제의 방향을 거꾸로 한 것 즉, 명제의 가정과 결론을 거꾸로 바꾸어 놓은 것을 의미한다.

逆

거꾸로 할(거스를) 역

역을 영어로는 converse라고 한다. converse는 '의견, 진술 등이 거꾸로임'을 의미하며, 명제의 가정과 결론의 위치와 방향이 거꾸로 되어 있기에 converse라고 한 것이다. '거꾸로'라는 의미를 지닌 한자어 역(逆)으로 번역한 것이며 '역인 명제' 또는 '역 명제'를 간단히 '역'이라고 하는 것이다.

대우 대우(對偶)에서 대(對)에는 '서로 마주하다', '대응하다'는 뜻이 있고, 우(偶)은 '짝', '쌍', '대응되는 것'을 뜻한다. 그러므로 대우(對偶)은 서로 대(對)응하는 쌍이나 짝(偶)을 의미한다. 어떤 명제가 참이면 그 대우도 참이고, 거짓이면 그 대우도 거짓이라는 점에서 어떤 명제와 그 대우는 논리적으로 같은(동치인) 서로의 짝이 된다는 의미로 대우(對偶)라고 하는 것이다.



대우를 영어로는 contraposition이라고 한다. contraposition에는 '마주 놓음'이라는 뜻이 있다. 주어진 명제와 그 대우 명제가 사로 마주놓아진 것이라는 의미에서 contraposition이라 하는 것이고, 이를 서로 대응하는 짝이나 쌍을 의미하는 한자어 대우(對偶)로 번역한 것이다.

개념

역과 대우의 참·거짓은 주어진 명제의 참·거짓과 어떤 관계가 있나요?

두 조건 p와 q의 진리집합을 각각 P와 Q라 하자.

❶ $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고,

❷ $P \not\subset Q$이면 $P^C \not\subset Q^C$

이므로 명제 $p \longrightarrow q$와 이 명제의 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$의 참·거짓은 항상 같음을 알 수 있다.

❶ 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

❷ 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 대우인 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 거짓이다.

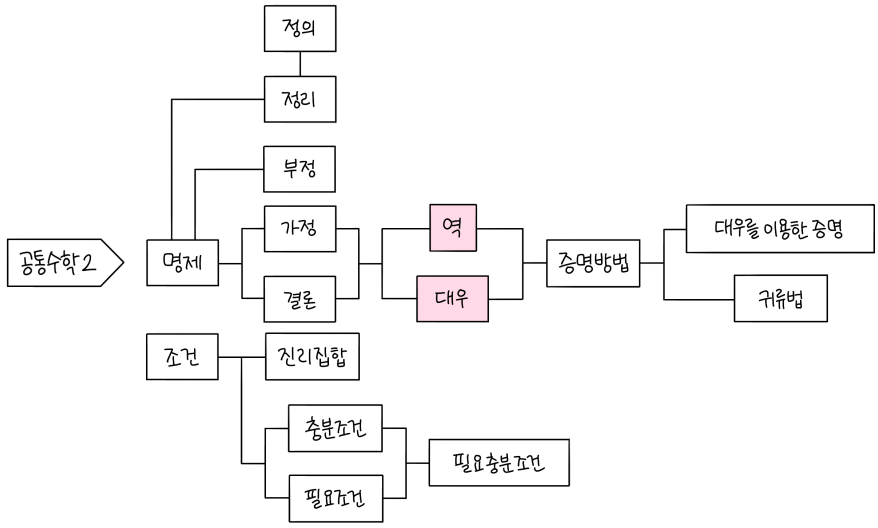
한편, $P = Q$인지 아닌지에 따라 $P \subset Q$일 때 $Q \subset P$일 수 있고($P = Q$인 경우), $Q \not\subset P$일 수 있다($P \neq Q$인 경우). 따라서 명제 $p \longrightarrow q$의 참·거짓과 이 명제의 역인

$q \longrightarrow p$의 참·거짓은 무관하다.

개념

역, 대우와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

역과 대우는 명제, 가정, 결론, 정의, 정리, 조건, 진리집합, 부정, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법, 절대부등식 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



명제는 어떤 용어나 개념의 뜻을 약속으로 정하는 **정의**와 달리 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있고 또 판별해야 하는 문장이나 식으로서, 참임이 증명된 경우 **정리**라고 부른다. 명제와는 달리 문장에 포함된 변수(이를테면, x)의 값에 따라 참, 거짓이 판별되는 문장이나 식을 **조건**이라 하고, 조건이 참이 되게 하는 모든 변수(이를테면, x)의 값의 집합을 그 조건의 **진리집합**이라 한다. 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식인 **절대부등식**은 그 진리집합이 전체집합 즉, 실수 전체의 집합인 부등식 형태의 조건이라 할 수 있다.

명제는 조건(이를테면, $p(x)$, $q(x)$ 등)을 이용하여 조건문 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 형태로 나타낼 수 있다. 이때 $p(x)$를 이 명제의 **가정**이라 하고, $q(x)$를 이 명제의 **결론**이라 한다.

예를 들어 명제 '2는 짝수이다.'는 두 조건 'x는 2이다.'와 'x는 짝수이다.'를 이용하여 '모든 x에 대하여 x가 2이면 x는 짝수이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 이 명제의

가정은 'x는 2이다.'이고, 결론은 'x는 짝수이다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 두 조건 $p(x)$와 $q(x)$의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있다. 즉, $P \subset Q$이면 주어진 명제는 참이고 그렇지 않을 경우 거짓이다. 또 주어진 명제가 참일 때 즉, $P \subset Q$일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 하고, $p(x)$가 $q(x)$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 한다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 가정과 결론을 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $q(x)$이면 $p(x)$이다.'를 원래 명제의 **역**이라 하고, 가정과 결론을 각각 **부정**하여 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$이면 $\sim p(x)$이다.'를 원래 명제의 **대우**라고 한다. 두 조건 $p(x)$, $q(x)$의 진리집합 P, Q에 대하여 두 조건의 부정 $\sim p(x)$, $\sim q(x)$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이고, 이때 $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다. 그러므로 어떤 명제의 참, 거짓을 판별할 때 원래 명제 대신 그 명제의 대우의 참, 거짓을 판별해도 된다. 즉, 어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명해도 된다는 것이다.

명제가 참임을 증명하는 방법 중 그 명제의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진 사실이나 주어진 가정에 모순이 생긴다는 것을 보여 증명하는 방법을 **귀류법**이라 한다. 귀류법은 명제를 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'로 나타내었을 때 이 명제의 부정 '$p(x)$이고 $\sim q(x)$인 x가 존재한다.'가 거짓임을 보이는 것 즉, 조건 $p(x)$를 만족하지만 조건 $q(x)$는 만족하지 않는 x는 존재할 수 없음을 보이는 것이라 할 수 있다.

충분조건充分條件; sufficient condition과 필요조건必要條件; necessary condition

정의

충분조건과 필요조건, 그리고 필요충분조건은 무엇인가요?

명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 이것을 기호로

$$p \Longrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때 p는 q이기 위한 **충분조건**, q는 p이기 위한 **필요조건**이라고 한다.

또, 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$일 때, 이것을 기호로

$$p \Longleftrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때 p는 q이기 위한 **필요충분조건**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ p가 q이기 위한 충분조건이라는 것은 p는 q가 참임을 보장한다는 의미이다.

예를 들어, $x=2$이면 반드시 x는 짝수이므로 명제 '$x=2$이면 x는 짝수이다.'는 참인 명제이다. 따라서 조건 '$x=2$'는 조건 'x는 짝수이다.'이기 위한 충분조건이다. 이것을 기호로

$$x=2 \quad \Longrightarrow \quad x\text{는 짝수이다.}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

❷ p가 q이기 위한 필요조건이라는 것은 p를 만족시키지 않으면 q가 참이 되게 할 수 없다는 것, 즉 q가 참이 되게 하기 위해서는 반드시 p를 만족시켜야 한다는 것을 의미한다.

예를 들어, $x=2$이기 위해서는 반드시 x는 짝수이어야 한다. 따라서 조건 'x는 짝수이다.'는 $x=2$이기 위한 필요조건이다.

의미

충분조건, 필요조건, 필요충분조건이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

충분조건 충분조건(充分條件)에서 충분(充分)은 말 그대로 '충분하다'를 뜻하고, 조(條)는 '항목', '조목', 건(件)은 '사물', '사항', '경우', '요소'를 뜻한다. 그러므로 충분조건(充分條件)은 어떤 것이 참이 되기 위해 갖추어야 할 조건을 충분(充分)히 갖춘 조건(條件)을 의미한다. 명제 'p이면 q이다.'가 참일 때, q이기 위해서는 p이면 충분하기 때문에 p는 q이기 위한 충분조건이라고 하는 것이다.

充	分	條	件
채울 충	나눌 분	가지(조목) 조	물건(항목) 건

충분조건을 영어로는 sufficient condition이라고 한다. sufficient에는 '충분한'이라는 뜻이 있고, condition은 '조건'을 뜻하므로, sufficient condition은 충분한 조건 즉, 충분조건이라고 번역한다.

필요조건 필요조건(必要條件)에서 필요(必要)는 말 그대로 '무언가가 필요하다'를 뜻하고, 조(條)는 '항목', '조목'을 뜻하고, 건(件)은 '사물', '사항', '경우', '요소'를 뜻한다. 그러므로 필요조건(必要條件)은 어떤 것이 참이 되기 위해 필요(必要)하긴 하지만 그것만으로는 충분하지 않아서 다른 조건이 더 필요(必要)한 상태의 조건(條件)을 의미한다. 명제 'p이면 q이다.'가 참일 때, q이기 위해서는 p이면 충분하다. 그러나 p이려면 q가 필요하고 그 이외에도 다른 조건이 더 필요하다는 의미에서 q는 p이기 위한 필요조건이라고 하는 것이다.

必	要	條	件
반드시 필	요긴할 요	가지(조목) 조	물건(항목) 건

필요조건을 영어로 necessary condition이라고 한다. necessary에는 '필요한'이라는 뜻이 있고, condition은 '조건'을 뜻하므로, necessary condition은 필요한 조건 즉,

필요조건이라고 번역한다.

필요충분조건 필요충분조건(必要充分條件)은 글자 그대로 필요조건(必要)조건인 동시에 충분(充分)조건인 조건(條件)을 뜻한다. 두 명제 'p이면 q이다.'와 그 역인 'q이면 p이다.'가 모두 참일 때, p와 q는 각각 서로이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건이므로, 이를 서로가 서로이기 위한 필요충분조건이라 하는 것이다.

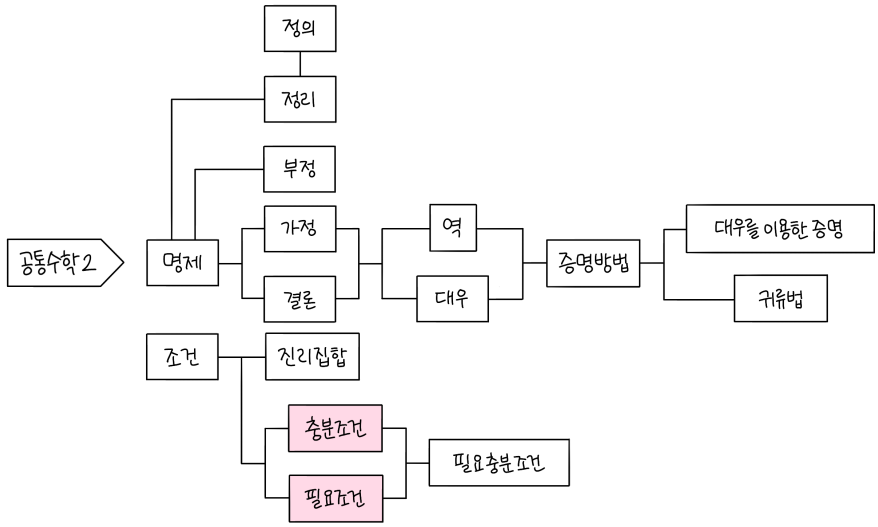
必 要 充 分 條 件
필 요 충 분 조 건

필요충분조건을 영어로는 necessary and sufficient condition이라고 한다. necessary에는 '필요한'이라는 뜻이 있고, sufficient에는 '충분한'이라는 뜻이 있으며, condition은 '조건'을 뜻하므로, necessary and sufficient condition은 필요하고 충분한 조건 즉, 필요충분조건이라고 번역한다.

개념

충분조건, 필요조건, 필요충분조건과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

충분조건, 필요조건, 필요충분조건은 명제, 가정, 결론, 정의, 정리, 조건, 진리집합, 부정, 역, 대우, 귀류법, 절대부등식 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



명제는 어떤 용어나 개념의 뜻을 약속으로 정하는 **정의**와 달리 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있고 또 판별해야 하는 문장이나 식으로서, 참임이 증명된 경우 **정리**라고 부른다. 명제와는 달리 문장에 포함된 변수(이를테면, x)의 값에 따라 참, 거짓이 판별되는 문장이나 식을 **조건**이라 하고, 조건이 참이 되게 하는 모든 변수(이를테면, x)의 값의 집합을 그 조건의 **진리집합**이라 한다. 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식인 **절대부등식**은 그 진리집합이 전체집합 즉, 실수 전체의 집합인 부등식 형태의 조건이라 할 수 있다.

명제는 조건(이를테면, $p(x)$, $q(x)$ 등)을 이용하여 조건문 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 형태로 나타낼 수 있다. 이때 $p(x)$를 이 명제의 **가정**이라 하고, $q(x)$를 이 명제의 **결론**이라 한다.

예를 들어 명제 '2는 짝수이다.'는 두 조건 'x는 2이다.'와 'x는 짝수이다.'를 이용하여 '모든 x에 대하여 x가 2이면 x는 짝수이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 이 명제의 가정은 'x는 2이다.'이고, 결론은 'x는 짝수이다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 두 조건 $p(x)$와 $q(x)$의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있다. 즉, $P \subset Q$이면 주어진 명제는 참이고 그렇지 않을 경우 거짓이다. 또 주어진 명제가 참일 때 즉, $P \subset Q$일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 하고, $p(x)$가 $q(x)$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 한다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 가정과 결론을 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $q(x)$이면 $p(x)$이다.'를 원래 명제의 **역**이라 하고, 가정과 결론을 각각 **부정**하여 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$이면 $\sim p(x)$이다.'를 원래 명제의 **대우**라고 한다. 두 조건 $p(x)$, $q(x)$의 진리집합 P, Q에 대하여 두 조건의 부정 $\sim p(x)$, $\sim q(x)$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이고, 이때 $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다. 그러므로 어떤 명제의 참, 거짓을 판별할 때 원래 명제 대신 그 명제의 대우의 참, 거짓을 판별해도 된다. 즉, 어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명해도 된다는 것이다.

명제가 참임을 증명하는 방법 중 그 명제의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진

사실이나 주어진 가정에 모순이 생긴다는 것을 보여 증명하는 방법을 **귀류법**이라 한다. 귀류법은 명제를 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'로 나타내었을 때 이 명제의 부정 '$p(x)$이고 $\sim q(x)$인 x가 존재한다.'가 거짓임을 보이는 것 즉, 조건 $p(x)$를 만족하지만 조건 $q(x)$는 만족하지 않는 x는 존재할 수 없음을 보이는 것이라 할 수 있다.

귀류법歸謬法; proof by contradiction

정의

귀류법은 무엇인가요?

어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 명제의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진 사실에 모순이 생긴다는 것을 보여도 된다. 이와 같이 증명하는 방법을 **귀류법**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

귀류법을 이용하여 명제 '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.'가 참임을 증명하시오.

풀이 명제를 부정하여 $\sqrt{2}$가 유리수라 하자. 그러면 서로소인 두 자연수 m과 n에 대하여

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

으로 나타낼 수 있다. 즉, $n = \sqrt{2}m$이므로 양변을 제곱하면

$$n^2 = 2m^2$$

임을 얻을 수 있고, n^2이 짝수이므로 n도 짝수이다.

따라서 $n = 2k$인 자연수 k가 있으므로

$$4k^2 = 2m^2, \quad 즉 2k^2 = m^2$$

이다. 이때 m^2이 짝수이므로 m도 짝수이다.

그런데 m과 n이 모두 짝수이므로 m과 n이 서로소임에 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

의미

귀류법이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

귀류법(歸謬法)에서 귀(歸)에는 '돌아가다', '귀결되다', '어떤 결말에 이르다'는 뜻이 있고, 류(謬)는 '잘못', '오류', '모순'를 뜻하며, 법(法)은 '방법', '규칙'이라는 뜻을 가진다. 그러므로 귀류법(歸謬法)은 모순이나 오류(謬)로 귀(歸)결되는 것을 보임으로서 명제가 참임을 보이는 방법(法) 즉, 증명하고자 하는 결론을 거짓이라 가정하였을 때 그 가정이 거짓임을 즉, 증명하고자 하는 결론이 참임을 모순을 통해 증명하는 방법을 의미한다.

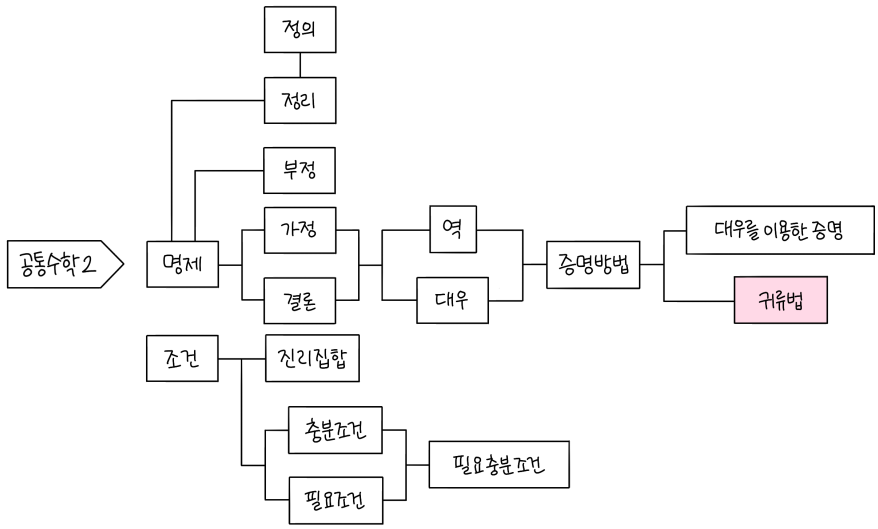
歸	謬	法
돌아갈 귀	그르칠(틀릴) 류	법 법

귀류법을 영어로는 proof by contradiction이라고 한다. proof는 '증명'을 뜻하고, contradiction은 '모순'을 뜻하므로, proof by contradiction은 '모순에 의한 증명'을 의미한다. 이런 이유로 모순에 귀결되는 것을 보여 참임을 밝히는 방법을 뜻하는 한자어 귀류법으로 번역한 것이다.

개념

귀류법과 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

귀류법은 명제, 가정, 결론, 정의, 정리, 조건, 진리집합, 부정, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 절대부등식 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



명제는 어떤 용어나 개념의 뜻을 약속으로 정하는 정의와 달리 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있고 또 판별해야 하는 문장이나 식으로서, 참임이 증명된 경우 정리라고 부른다. 명제와는 달리 문장에 포함된 변수(이를테면, x)의 값에 따라 참, 거짓이 판별되는 문장이나 식을 조건이라 하고, 조건이 참이 되게 하는 모든 변수(이를테면, x)의 값의 집합을 그 조건의 진리집합이라 한다. 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상

성립하는 부등식인 **절대부등식**은 그 진리집합이 전체집합 즉, 실수 전체의 집합인 부등식 형태의 조건이라 할 수 있다.

명제는 조건(이를테면, $p(x)$, $q(x)$ 등)을 이용하여 조건문 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 형태로 나타낼 수 있다. 이때 $p(x)$를 이 명제의 **가정**이라 하고, $q(x)$를 이 명제의 **결론**이라 한다.

예를 들어 명제 '2는 짝수이다.'는 두 조건 'x는 2이다.'와 'x는 짝수이다.'를 이용하여 '모든 x에 대하여 x가 2이면 x는 짝수이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 이 명제의 가정은 'x는 2이다.'이고, 결론은 'x는 짝수이다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 두 조건 $p(x)$와 $q(x)$의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있다. 즉, $P \subset Q$이면 주어진 명제는 참이고 그렇지 않을 경우 거짓이다. 또 주어진 명제가 참일 때 즉, $P \subset Q$일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 하고, $p(x)$가 $q(x)$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 한다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 가정과 결론을 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $q(x)$이면 $p(x)$이다.'를 원래 명제의 **역**이라 하고, 가정과 결론을 각각 **부정**하여 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$이면 $\sim p(x)$이다.'를 원래 명제의 **대우**라고 한다. 두 조건 $p(x)$, $q(x)$의 진리집합 P, Q에 대하여 두 조건의 부정 $\sim p(x)$, $\sim q(x)$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이고, 이때 $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다. 그러므로 어떤 명제의 참, 거짓을 판별할 때 원래 명제 대신 그 명제의 대우의 참, 거짓을 판별해도 된다. 즉, 어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명해도 된다는 것이다.

명제가 참임을 증명하는 방법 중 그 명제의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진 사실이나 주어진 가정에 모순이 생긴다는 것을 보여 증명하는 방법을 **귀류법**이라 한다. 귀류법은 명제를 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'로 나타내었을 때 이 명제의 부정 '$p(x)$이고 $\sim q(x)$인 x가 존재한다.'가 거짓임을 보이는 것 즉, 조건 $p(x)$를 만족하지만 조건 $q(x)$는 만족하지 않는 x는 존재할 수 없음을 보이는 것이라 할 수 있다.

절대부등식絶對不等式; absolute inequality

정의 절대부등식은 무엇인가요?

주어진 집합의 모든 원소에 대하여 성립하는 부등식을 **절대부등식**이라고 한다.

예 구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ $a>0$이고 $b>0$일 때, 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$가 성립한다.

❷ a와 b가 실수일 때, 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$가 성립한다.

이처럼 주어진 집합의 모든 원소에 대하여 성립하는 부등식은 절대부등식의 예이다.



위 부등식이 성립하는지 어떻게 증명할 수 있어요?

❶ $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2)}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$이다. 따라서 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$이고 여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

❷ $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2=2(|ab|-ab)$ 이다. 그런데 $|ab| \geq ab$이므로 $2(|ab|-ab) \geq 0$이다. 따라서 $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$이므로 $|a+b| \leq |a|+|b|$이며, 여기서 등호는 $ab \geq 0$일 때 성립한다.

의미 절대부등식이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

절대부등식(**絶對不等式**)은 글자 그대로 절대(**絶對**)적으로 성립하는 부등식(**不等式**)을 뜻한다. 부등식에 포함되어 있는 문자(미지수)의 값이 어떤 실수든 상관없이 즉, 모든 실수에 대하여 참이 되는 부등식으로서 그 해가 실수 전체가 되는 부등식을 의미한다.

絶	對	不	等	式
끊을 절	대할 대	아닐 부	같을 등	식 식

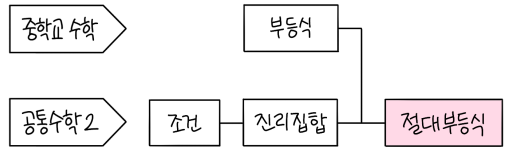
절대부등식을 영어로는 absolute inequality라고 한다. absolute는 '절대적인'을

뜻하고, inequality는 '부등식'을 뜻하므로, absolute inequality는 절대적인 부등식 즉, 이를 줄여 절대부등식이라고 번역한다.

개념

절대부등식과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

절대부등식은 명제, 가정, 결론, 정의, 정리, 조건, 진리집합, 부정, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



명제는 어떤 용어나 개념의 뜻을 약속으로 정하는 **정의**와 달리 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있고 또 판별해야 하는 문장이나 식으로서, 참임이 증명된 경우 **정리**라고 부른다. 명제와는 달리 문장에 포함된 변수(이를테면, x)의 값에 따라 참, 거짓이 판별되는 문장이나 식을 **조건**이라 하고, 조건이 참이 되게 하는 모든 변수(이를테면, x)의 값의 집합을 그 조건의 **진리집합**이라 한다. 부등식의 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식인 **절대부등식**은 그 진리집합이 전체집합 즉, 실수 전체의 집합인 부등식 형태의 조건이라 할 수 있다.

명제는 조건(이를테면, $p(x)$, $q(x)$ 등)을 이용하여 조건문 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 형태로 나타낼 수 있다. 이때 $p(x)$를 이 명제의 **가정**이라 하고, $q(x)$를 이 명제의 **결론**이라 한다.

예를 들어 명제 '2는 짝수이다.'는 두 조건 'x는 2이다.'와 'x는 짝수이다.'를 이용하여 '모든 x에 대하여 x가 2이면 x는 짝수이다.'와 같이 나타낼 수 있다. 이때 이 명제의 가정은 'x는 2이다.'이고, 결론은 'x는 짝수이다.'이다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'는 두 조건 $p(x)$와 $q(x)$의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있다. 즉, $P \subset Q$이면 주어진 명제는 참이고 그렇지 않을 경우 거짓이다. 또 주어진 명제가 참일 때 즉, $P \subset Q$일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **충분조건**, $q(x)$는 $p(x)$이기 위한 **필요조건**이라 하고, $p(x)$가 $q(x)$이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건일 때 $p(x)$는 $q(x)$이기 위한 **필요충분조건**이라 한다.

명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'의 가정과 결론을 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $q(x)$이면 $p(x)$이다.'를 원래 명제의 **역**이라 하고, 가정과 결론을 각각 **부정**하여 서로 바꾼 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$이면 $\sim p(x)$이다.'를 원래 명제의 **대우**라고 한다. 두 조건 $p(x)$, $q(x)$의 진리집합 P, Q에 대하여 두 조건의 부정 $\sim p(x)$, $\sim q(x)$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이고, 이때 $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이고 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다. 그러므로 어떤 명제의 참, 거짓을 판별할 때 원래 명제 대신 그 명제의 대우의 참, 거짓을 판별해도 된다. 즉, 어떤 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명해도 된다는 것이다.

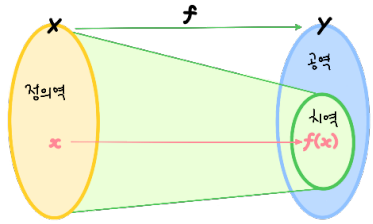
명제가 참임을 증명하는 방법 중 그 명제의 부정이 참이라 가정하면 이미 알려진 사실이나 주어진 가정에 모순이 생긴다는 것을 보여 증명하는 방법을 **귀류법**이라 한다. 귀류법은 명제를 '모든 x에 대하여 $p(x)$이면 $q(x)$이다.'로 나타내었을 때 이 명제의 부정 '$p(x)$이고 $\sim q(x)$인 x가 존재한다.'가 거짓임을 보이는 것 즉, 조건 $p(x)$를 만족하지만 조건 $q(x)$는 만족하지 않는 x는 존재할 수 없음을 보이는 것이라 할 수 있다.

대응對應; correspondence, **정의역**定義域; domain, **공역**共域; codomain, **치역**値域; range

정의

대응은 무엇인가요?

공집합이 아닌 두 집합 X와 Y에 대하여 X의 원소에 Y의 원소를 짝 지어 주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 **대응**이라고 한다. 이때 X의 원소 x에 Y의 원소 y를 대응하는 것을 기호로 $x \longrightarrow y$와 같이 나타낸다.



정의

정의역과 공역은 무엇인가요?

두 집합 X와 Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 '집합 X에서 집합 Y로의 함수'라 하며, 이것을 이호로

$$f : X \longrightarrow Y$$

와 같이 나타낸다.

이때 집합 X를 함수 f의 **정의역**, 집합 Y를 함수 f의 **공역**이라고 한다.

정의

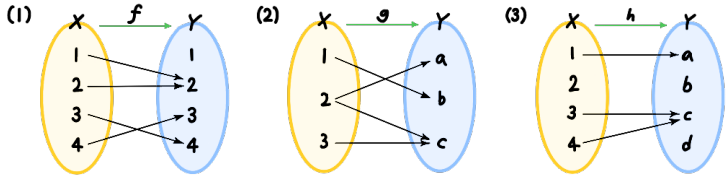
치역은 무엇인가요?

함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때, 이것을 기호로 $y = f(x)$와 같이 나타낸다. 이때 $f(x)$를 x에서의 함숫값이라 하고, 함숫값 전체의 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 **치역**이라고 한다. 함수의 치역은 공역의 부분집합이다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

다음과 같이 주어진 대응에 대하여 정의역, 공역, 치역을 구체적으로 확인해 보자.



❶ 그림 (1)의 대응 f에서 정의역은 $X=\{1,2,3,4\}$, 공역은 $Y=\{1,2,3,4\}$이다. 화살표를 보면

$$1\mapsto 2,\quad 2\mapsto 2,\quad 3\mapsto 3,\quad 4\mapsto 4$$

이므로 실제로 도착한 원소는 $2,3,4$이다. 따라서 치역은

$$\{2,3,4\}$$

이다. 이 경우에는 정의역의 모든 원소에 정확히 하나씩 대응되어 있으므로 f는 함수이다.

❷ 그림 (2)의 대응 g은 집합 $X=\{1,2,3\}$에서 집합 $Y=\{a,b,c\}$로의 한 대응이다. 화살표를 읽어 보면

$$1\mapsto b,\quad 2\mapsto a,\quad 2\mapsto c,\quad 3\mapsto c$$

와 같이 a,b,c 모두에 화살표가 도착한다. 그러나 X의 원소 2에서 두 개의 서로 다른 원소 a,c로 화살표가 나가므로, g는 함수가 아니다. (하지만 여전히 g는 X에서 Y로의 한 대응이다.)

❸ 그림 (3)의 대응 h에서 집합 $X=\{1,2,3,4\}$에서 집합 $Y=\{a,b,c,d\}$로의 한 대응이다. 화살표를 읽어 보면

$$1\mapsto a,\quad 3\mapsto c,\quad 4\mapsto c$$

이다. 이때 집합 X의 원소 2에서는 아무 화살표도 나오지 않으므로, 대응 h는 함수가

아니다.

의미

대응, 정의역, 공역, 치역이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

대응 대응(對應)에서 대(對)에는 '마주하다', '상대하다'는 뜻이 있고, 응(應)은 '응하다', '맞추다', '대답하다'를 뜻한다. 그러므로 대응(對應)은 서로 마주하여(對) 짝을 맞추는(應) 관계 즉, 두 집합의 원소들을 짝지어 연결하는 관계를 의미한다. 서로 합동인 도형에서도 서로 포개어지는 꼭짓점, 변, 각은 서로 대응한다고 한다.



대응을 영어로는 correspondence라고 한다. correspondence에는 '대응'이라는 뜻이 있으므로, 글자 그대로 대응이라고 번역하는 것이다.

정의역 정의역(定義域)에서 정의(定義)는 글자 그대로 '정의'를 뜻하고, 역(域)은 '영역', '범위', '구역'이라는 뜻을 가진다. 그러므로 함수의 정의역(定義域)은 함수가 정의(定義)되는 영역(域) 즉, 함수의 정의가 내려지는 집합을 의미한다.



정의역을 영어로는 domain이라고 한다. domain에는 '영역'이라는 뜻이 있다. 함수가 정의되는 영역이라는 의미로 domain이라 하고, 이를 정의역이라 번역하는 것이다.

공역 공역(共域)에서 공(共)에는 '함께', '더불어'라는 뜻이 있고, 역(域)은 '영역', '범위', '구역'이라는 뜻을 가진다. 그러므로 함수의 공역(共域)은 함수를 정의할 때 함수의 정의역과 함께(共) 정해놓은 영역(域) 즉, 정의역의 각 원소에 대하여 그 함숫값이 정해질 수 있도록 정의역과 함께 미리 정해놓은 집합을 의미한다.

共 함께 공　　域 지경(영역) 역

공역을 영어로는 codomain이라고 한다. codomain에서 co에는 '함께', '공통으로'라는 뜻이 있고, domain은 '영역'을 뜻한다. 그러므로 codomain은 정의역인 domain과 짝을 이루어 함께 하는 영역을 의미하고, '함께'를 뜻하는 한자 공(共)을 차용하여 공역이라 번역하는 것이다.

치역 치역(值域)에서 치(值)에는 '값'이라는 뜻이 있고, 역(域)은 '영역', '범위', '구역'이라는 뜻을 가진다. 그러므로 함수의 치역(值域)은 함숫값(值)들의 영역(域) 즉, 정의역의 각 원소에 대하여 그 함숫값들로 이루어진 집합을 의미한다.

值 값 치　　域 지경(영역) 역

치역을 영어로는 range라고 한다. range에는 '범위', '영역'이라는 뜻이 있다. 그러므로 함수의 range는 함숫값의 범위 또는 함숫값의 영역을 뜻하며, '값'를 뜻하는 한자 치(值)를 차용하여 치역이라 번역하는 것이다.

개념

모든 대응이 함수인가요?

예에서 살펴본 봐와 같이 모든 대응이 함수인 것은 아니다. 대응은 두 집합 사이에 어떤 방식으로든 짝을 지어 놓은 관계를 말하므로, 한 원소에 여러 개를 대응시키거나 어떤 원소에는 전혀 대응을 주지 않아도 된다. 그러나 함수는 보다 엄격한 조건을 만족해야 하며, 정의역의 각 원소를 정확히 하나의 원소에만 대응시켜야 한다.



그러면 함수는 어떤 조건을 만족해야 하나요?

함수가 되기 위해서는 다음 두 조건을 모두 만족해야 한다.

❶ 정의역에 있는 모든 원소가 반드시 어떤 원소와 대응되어야 한다.

❷ 정의역의 각 원소는 오직 하나의 원소에만 대응되어야 한다.

따라서 함수 $f : A \longrightarrow B$는 임의의 $a \in A$에 대하여, 유일한 $b \in B$가 존재하여 $f(a) = b$가 되는 관계라고 할 수 있다.

앞서 제시한 예에서 그림 (2)는 함수의 조건 ❷를 만족하지 않는 경우이며, 그림 (3)은 함수의 조건 ❶을 만족하지 않는 경우이다.

개념

함수의 정의역을 따로 말하지 않으면 어떻게 정하나요?

일반적으로 함수를 정의할 때에는 '정의역', '공역', '대응 규칙'을 함께 제시하는 것이 원칙이다. 그러나 수식으로 표현된 함수 $y = f(x)$의 수식만 보아도 정의역과 공역이 분명한 경우에는 정의역을 따로 쓰지 않고 생략하는 일이 많다. 특히 고등학교 과정에서는, 정의역이 따로 언급되지 않은 함수에 대하여 '그 함수가 의미를 가지는 실수 범위 전체'를 함수의 정의역으로 생각한다.

예를 들어

$$y = 2x + 1$$

과 같이만 주어져 있고 별다른 설명이 없다면, 이 수식은 모든 실수 x에 대하여 계산할 수 있으므로 정의역을 실수 전체의 집합으로 본다.

반면, 이후 배우게 될 유리함수와 무리함수와 같이 모든 실수에서 정의되지 않는 함수들도 있다. 이 경우에도 정의역이 따로 제시되지 않았다면, '그 수식이 실수 범위에서 실제로 계산될 수 있는 모든 값들의 집합'을 그 함수의 정의역으로 이해하면 된다.

개념

치역과 공역의 차이는 무엇인가요?

함수에서 공역은 함수의 함숫값이 속하도록 미리 정해 놓은 집합이고, 치역은 함수가 실제로 가지는 모든 함숫값의 집합이다. 함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 공역은 Y이고, 치역은

$$\{f(x) \mid x \in X\}$$

이다. 따라서

$$\{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$

가 성립하며, 치역은 공역 전체와 같을 수도 있고, 공역의 부분집합이 될 수도 있다. 앞서 제시한 예에서 그림 (1)은 치역이 공역의 부분집합이지만 공역 전체와 같지 않은 경우이다.

개념

함수의 그래프란 무엇인가요?

함수 $f : X \longrightarrow Y$가 주어졌다고 하자. 이때 정의역 X의 각 원소 x와 그에 대응하는 함숫값 $f(x)$로 이루어진 순서쌍들의 집합

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

을 함수 f의 **그래프(graph)**라고 한다. 즉, 함수의 그래프는 '입력값과 그에 대한 함숫값으로 이루어진 모든 순서쌍'을 한데 모아 나타낸 집합이다.

정의역과 공역이 모두 실수 집합인 경우, 이 그래프를 좌표평면 위의 점들로 나타낼 수 있다. 특히 함수 $y = f(x)$의 정의역과 공역이 모두 실수 전체 집합 $\mathbb{R}$일 때, 함수의 그래프는 좌표평면에서 다음과 같은 성질을 가진다.

❶ 각 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 그래프 위에는 점 $(x, f(x))$가 정확히 하나만 존재한다.

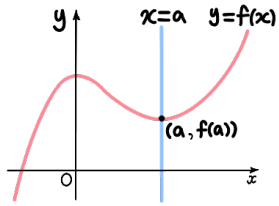
❷ 따라서 y축에 평행한 임의의 직선 $x = a$는 함수의 그래프와 한 점에서만 만난다.

이와 같이 함수의 그래프는 '함숫값이 어떻게 달라지는지'를 좌표평면에서 시각적으로 보여주는 도구라고 할 수 있다.



어떤 그래프가 함수의 그래프인지 어떻게 판단할 수 있나요?

함수 $f : X \longrightarrow Y$의 그래프는 언제나 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$의 형태를 가지며, 같은 x에 서로 다른 두 함숫값이 대응되는 일은 없다.



따라서 좌표평면 위의 어떤 그림이 함수의 그래프인지 판별할 때에는 y축에 평행한 직선을 생각한다. 임의의 x값에 대하여 그 직선이 그래프와 만나는 점이 두 개 이상이면, 그 그림은 어떤 함수의 그래프가 될 수 없다. (이를 '세로선 판별법'이라고 부른다.)



함수의 그래프는 항상 곡선 또는 직선으로 나타나나요?

정의역이 실수 전체 집합인 함수의 그래프는 실수축 위의 모든 x에 대한 점 $(x, f(x))$들의 모임으로 표현된다. 보통은 이 점들이 하나의 곡선이나 직선 모양으로 이어져 보이므로, 함수의 그래프를 함수의 기하적 표현이라고 부른다. 그러나 모든 함수의 그래프가 곡선이나 직선처럼 매끄럽게 이어지는 것은 아니다. 예를 들어

$$y = \begin{cases} 0 & (x\text{는 유리수}) \\ 1 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

와 같이 정의된 함수의 그래프는 곡선도 직선도 아니다. 이처럼 함수의 그래프가 점들이 흩어져 있는 모양이 될 수도 있음을 알고 있어야 한다.

개념

언제 두 함수를 같다고 하나요?

두 함수 f와 g가 있을 때, 다음이 성립하면

❶ 두 함수의 정의역과 공역이 각각 서로 같다.

❷ 정의역의 모든 원소 $x \in X$에 대하여 $f(x) = g(x)$이다.

f와 g는 서로 같다고 하고, 이를

$$f = g$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어, 두 함수

$$f(x)=|x|, \qquad g(x)=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

를 생각해 보자. 두 함수의 정의역과 공역을 모두 실수 전체 집합이라고 하면, 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$의 값이 항상 같음을 알 수 있다. 따라서 위의 두 조건이 모두 만족되므로

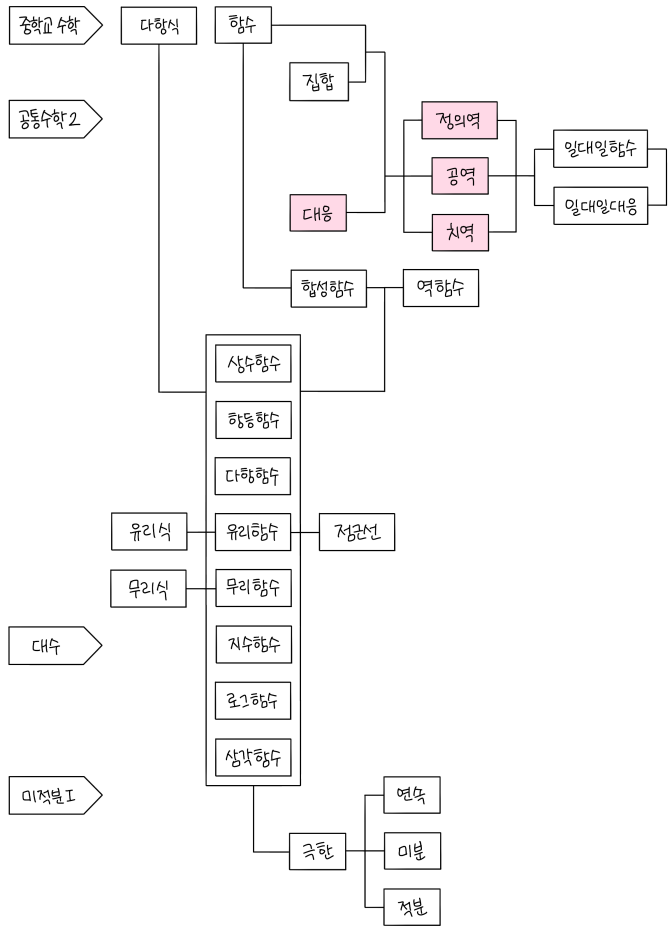
$$f=g$$

라고 할 수 있다. 이처럼 함수의 식이 다른 모양으로 주어져 있더라도, 정의역과 공역이 같고 모든 x에서 함숫값이 같으면 서로 같은 함수임을 이해해야 한다.

개념

대응, 정의역, 공역, 치역과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

대응, 정의역, 공역, 치역은 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 일대일함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩 짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라

한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y)=x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 **필요충분조건**은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 **항등함수**, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 **다항함수**, $f(x)$가 x에 대한 **유리식**인 함수를 **유리함수**, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 **무리식**인 함수를 **무리함수**라 한다. 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 **점근선**은 직선 $x=a$와 직선 $y=c$이다. 그 이외에도 **지수함수**, **로그함수**, **삼각함수**라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 **극한**, **연속**, **미분**, **적분** 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

심화(참고)

- **함수의 일반적인 정의는 중학교에서 배운 '두 양 사이의 대응'과 어떻게 연결되는가?**

  중학교에서는 함수를 주로 x와 y처럼 변화하는 두 양 사이의 대응 관계로 다루지만, 고등학교 공통수학2에서는 이 생각을 더 넓혀 두 집합 A와 B 사이의 대응으로 일반화한다. 이렇게 보면 함수는 '한 집합의 원소 하나하나를 다른 집합의 원소 하나씩에 정확하게 짝지어 주는 규칙'이라고 이해할 수 있다.

  두 집합 A와 B에 대하여

  $$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$$

  를 A와 B의 곱집합이라고 한다. $A\times B$의 임의의 부분집합 $R\subset A\times B$를 A와 B 사이의 관계(relationship)라고 부른다.

  이제 관계 $f\subset A\times B$가 다음 두 조건을 만족할 때, f를 A에서 B로 가는 함수라고 정의한다.

  ❶ 임의의 $x\in A$에 대하여 어떤 $y\in B$가 있어서 $(x,y)\in f$가 되도록 한다. (즉, A의 모든 원소가 반드시 B의 어떤 원소와는 짝지어진다.)

  ❷ 임의의 $x\in A$에 대하여 $(x,y_1)\in f$이고 $(x,y_2)\in f$이면 $y_1=y_2$이다. (즉, A의 한 원소가 서로 다른 두 원소와 동시에 짝지어지는 일은 없다.)

  이와 같이 정의되는 함수 f에 대하여, f를

  $$f:A\longrightarrow B$$

라고 나타내고, $(x, y) \in f$ 일 때 y 를 x 의 함숫값이라 하며

$$y = f(x)$$

와 같이 쓴다.

함수 $f : A \longrightarrow B$ 에서 집합 A 를 함수 f 의 정의역이라고 하고, 집합 B 를 공역이라고 한다. 또한 $x \in A$ 에 대하여 $y = f(x)$ 로 얻어지는 모든 함숫값들의 집합

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

을 함수 f 의 상 또는 치역이라고 한다. 이때 치역은 공역 B 의 부분집합이 되며, 공역 전체가 항상 치역과 같아야 하는 것은 아니라는 점에 유의한다.

일대일함수一對一函數; one-to-one function와 일대일대응一對一對應; one-to-one correspondence

정의

일대일함수와 일대일대응은 무엇인가요?

함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1과 x_2에 대하여

> $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

가 성립할 때, 이 함수 f를 **일대일함수**라고 한다.

또, 함수 $f: X \longrightarrow Y$가

> ❶ 일대일함수이다.
>
> ❷ 치역과 공역이 같다.

를 모두 만족시킬 때, 이 함수 f를 **일대일대응**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 함수 $f(x) = 2x$의 경우

임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$라고 하자. 이때

$$f(x_1) = 2x_1, \quad f(x_2) = 2x_2$$

이므로 $f(x_1) = f(x_2)$이면

$$2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

가 되어야 한다. 따라서 $x_1 \neq x_2$이면 항상 $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로, 함수 f는 일대일함수이다.

또한 공역과 치역이 모두 실수 전체 집합이므로 함수 f는 일대일대응이다.

❷ 함수 $g(x) = x^2$의 경우

서로 다른 두 실수 -2와 2에 대하여

$$-2 \neq 2 \quad \text{이지만} \quad g(-2) = (-2)^2 = 4,\ g(2) = 2^2 = 4$$

이므로 정의역의 서로 다른 두 원소가 같은 함숫값에 대응된다. 따라서 함수 g는 일대일함수가 아니다.

의미

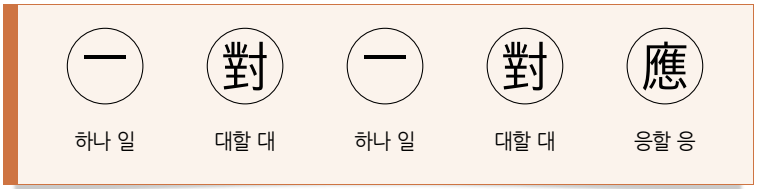
일대일함수, 일대일대응이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

일대일함수 일대일함수(一對一函數)에서 일대일(一對一)은 '하나와 하나가 짝을 이룸'을 뜻하므로, 일대일함수(一對一函數)는 정의역의 각 원소와 그 함숫값이 일대일(一對一)로 짝지어지는 함수(函數) 즉, 정의역의 원소의 개수와 함숫값의 개수인 치역의 원소의 개수가 같아서 정의역과 치역의 원소들이 서로 일대일로 짝지어지는 함수를 의미한다.

一	對	一	函	數
하나 일	대할 대	하나 일	상자 함	셈(수) 수

일대일함수를 영어로는 one to one function이라고 한다. one to one에는 '일대일'이라는 뜻이 있고, function은 '함수'를 뜻하므로, 이를 글자 그대로 일대일함수라고 번역하는 것이다.

일대일대응 일대일대응(一對一對應)에서 일대일(一對一)은 '하나와 하나가 짝을 이룸'을 뜻하고, 대응(對應)은 서로 마주하여(對) 짝을 맞추는(應) 관계 즉, 두 집합의 원소들을 짝지어 연결하는 관계를 의미한다. 그러므로 일대일대응(一對一對應)은 정의역의 각 원소에 공역의 한 원소가, 또 공역의 각 원소에 정의역의 한 원소가 서로 일대일(一對一)로 짝을 맞추는 대응(對應) 즉, 정의역의 각 원소에 공역의 원소 단 하나가 하나도 남김없이 일대일로 짝지어지는 대응을 의미한다. 다시 말해서 정의역의 원소의 개수와 공역의 원소의 개수가 같아서 정의역과 공역의 원소들이 남김없이 서로 일대일로 짝지어지는 함수를 의미한다.



일대일대응을 영어로는 one to one correspondence라고 한다. one to one에는 '일대일'이라는 뜻이 있고, correspondence는 '대응'을 뜻하므로, 이를 글자 그대로 일대일대응이라고 번역하는 것이다.

개념

일반적인 함수와 일대일함수는 어떻게 다른가요?

함수 $f : A \longrightarrow B$는 정의역 A의 각 원소를 공역 B의 원소 하나에 정확히 대응시키는 대응이다. 이때 f가 일대일함수(단사함수)라고 하려면, 서로 다른 두 원소가 같은 함숫값을 가질 수 없어야 한다.

즉, 함수 f가 일대일함수이기 위한 조건은 다음과 같이 정리된다.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

또는 대우를 사용하여

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 따라서 모든 함수가 정의역의 각 원소를 하나의 함숫값에 대응시키는 것은 같지만, 일대일함수는 '정의역의 서로 다른 원소에 같은 함숫값이 허용되지 않는다'는 점에서 더 엄격한 조건을 만족하는 함수이다. 이러한 일대일함수를 단사함수라고도 한다.

개념

일대일함수와 일대일대응은 서로 어떤 관계가 있나요?

일대일대응 함수 $f : A \longrightarrow B$는 정의역 A의 각 원소를 공역 B의 모든 원소와 '서로 다르게 정확히 한 번씩' 짝지어 주는 함수이다. 특히 일대일 조건

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

을 반드시 만족하므로, 모든 일대일대응 함수는 일대일함수라고 할 수 있다. 다만, 모든

일대일함수가 일대일대응인 것은 아니라는 점에 주의해야 한다.



그러면 일대일함수인 것만으로는 부족하다면, 일대일대응이 되려면 어떤 조건이 더 필요하나요?

일대일대응이 되기 위해서는 '일대일' 조건에 더하여 '치역과 공역이 같다'는 조건이 필요하다. 함수 $f : A \longrightarrow B$에 대하여

$$\{f(x) \mid x \in A\} = B$$

가 성립하여 공역 B의 모든 원소가 적어도 한 번은 어떤 $x \in A$의 함숫값으로 나타날 때, f를 전사함수 또는 A에서 B 위로의 함수라고 한다.

따라서 함수 $f : A \longrightarrow B$가

❶ 일대일함수이고,

❷ 전사함수일 때

이 두 조건을 모두 만족하면 f는 일대일대응이 된다. 정리하면,

$$\text{일대일대응} \iff \text{일대일함수이면서 동시에 전사함수}$$

라고 이해할 수 있다. 또한 일대일대응은 전단사함수라고도 한다.

개념

일대일함수의 그래프는 어떤 특징을 가지나요?

함수 $y = f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내었을 때, 일대일함수인지 여부는 수평선을 이용하여 판단할 수 있다. 일대일함수의 그래프는 다음 성질을 가진다.

❶ 임의의 실수 c에 대하여 수평선 $y = c$가 그래프와 만나는 점이 두 개 이상이 될 수 없다.

❷ 즉, 모든 수평선 $y = c$는 그래프와 '한 점 이하'에서만 만난다.

이 성질을 이용하여 그래프를 보고 일대일함수인지 판별하는 방법을 '수평선 판별법'이라고 한다.

개념

일대일함수인지 아닌지를 어떻게 판단할 수 있나요?

함수 $y = f(x)$가 주어졌을 때, 일대일함수인지 판단하는 방법은 크게 두 가지로 생각할 수 있다.

❶ 그래프를 이용하는 방법

좌표평면 위에 함수의 그래프를 그려 보고, 임의의 수평선 $y=c$가 그래프와 두 점 이상에서 만나는지 살펴본다. 어느 수평선도 그래프와 두 점 이상에서 만나지 않으면 일대일함수이다.

❷ 식으로 확인하는 방법

함수식 $y=f(x)$에 대하여

$$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$$

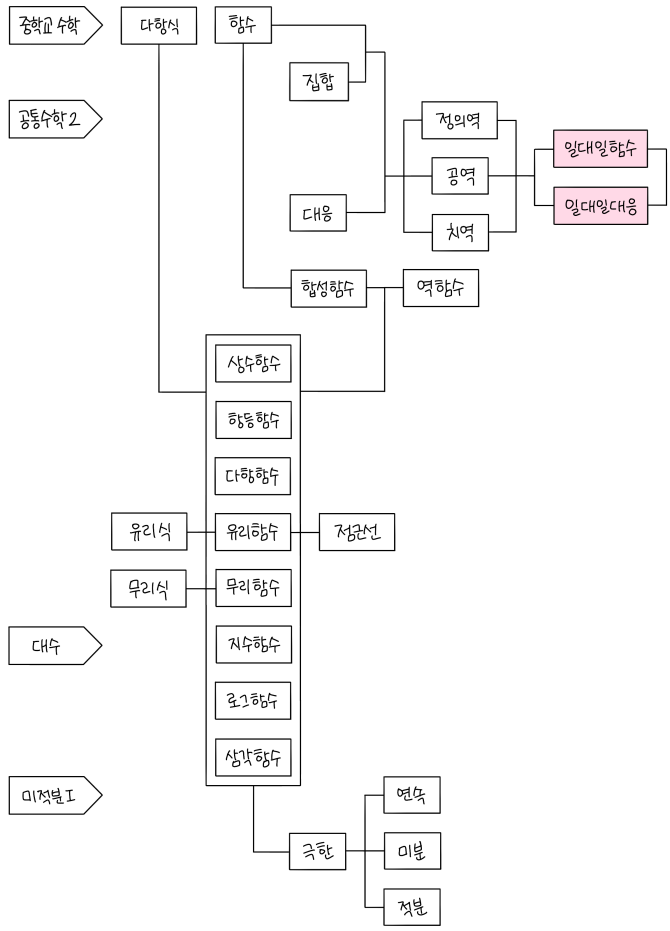
가 항상 성립하는지 직접 확인한다. 특히 함수가 정의역 전체에서 항상 증가하거나 항상 감소하는 단조함수이면, 정의역의 서로 다른 두 원소가 같은 함숫값을 가질 수 없으므로 일대일함수임을 알 수 있다.

이와 같이 그래프적 방법과 대수적 방법을 함께 이해해 두면, 다양한 함수에서 일대일대응 여부를 쉽게 판단할 수 있다.

개념

일대일함수와 일대일대응과 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

일대일함수, 일대일대응은 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 정의역, 공역, 치역, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩 짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라

한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y)=x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 **필요충분조건**은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 **항등함수**, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 **다항함수**, $f(x)$가 x에 대한 **유리식**인 함수를 **유리함수**, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 **무리식**인 함수를 **무리함수**라 한다. 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 **점근선**은 직선 $x=a$와 직선 $y=c$이다. 그 이외에도 **지수함수**, **로그함수**, **삼각함수**라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 **극한**, **연속**, **미분**, **적분** 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

항등함수恒等函數; identity function

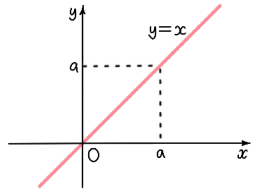
정의

항등함수는 무엇인가요?

함수 $f: X \longrightarrow X$에 대하여 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신인 x가 대응할 때, 즉

$$f(x) = x$$

일 때, 이 함수 f를 집합 X에서의 **항등함수**라고 한다.



의미

항등함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

항등함수(**恒等函數**)에서 항(**恒**)에는 '늘', '항상', '변하지 않는'이라는 뜻이 이 있고, 등(**等**)은 '같다'를 뜻하므로, 항등함수(**恒等函數**)는 정의역의 각 원소와 그 함숫값이 항(**恒**)상 같은(**等**) 함수(**函數**) 즉, 정의역의 각 원소에 그 자신을 대응시키는 함수를 의미한다.

恒	等	函	數
항상 항	같을 등	상자 함	셈(수) 수

항등함수를 영어로는 identity function이라고 한다. identity에는 '동일함'이라는 뜻이 있다. 정의역의 각 원소의 함숫값이 항상 자기 사진과 동일한 함수라는 의미로 identity function이라 하고, 이를 항상 같다는 뜻을 가진 한자어 항등(**恒等**)을 차용하여 항등함수라고 번역하는 것이다. 집합 X에서 X로의 항등함수는 보통 identity의 첫 글자 i를 이용하여

$$i : X \longrightarrow X, \quad i(x) = x$$

와 같이 나타낸다.

개념

항등함수는 어떤 함수인가요?

집합 X에서의 항등함수 $f: X \longrightarrow X$의 정의역, 공역, 치역을 살펴보면 다음과 같다.

1. **정의역**은 X이다. 모든 $x \in X$에 대하여 $f(x)$가 정의되어 있다.
2. **공역**도 X이다.
3. **치역** 역시 X이다. 임의의 $y \in X$에 대하여 $y = f(y)$가 되므로, X의 모든 원소가 실제로 어떤 $x \in X$의 함숫값으로 나타난다. 따라서 치역은 역시 X가 된다.

또한 항등함수 f는 다음과 같은 성질을 가진다.

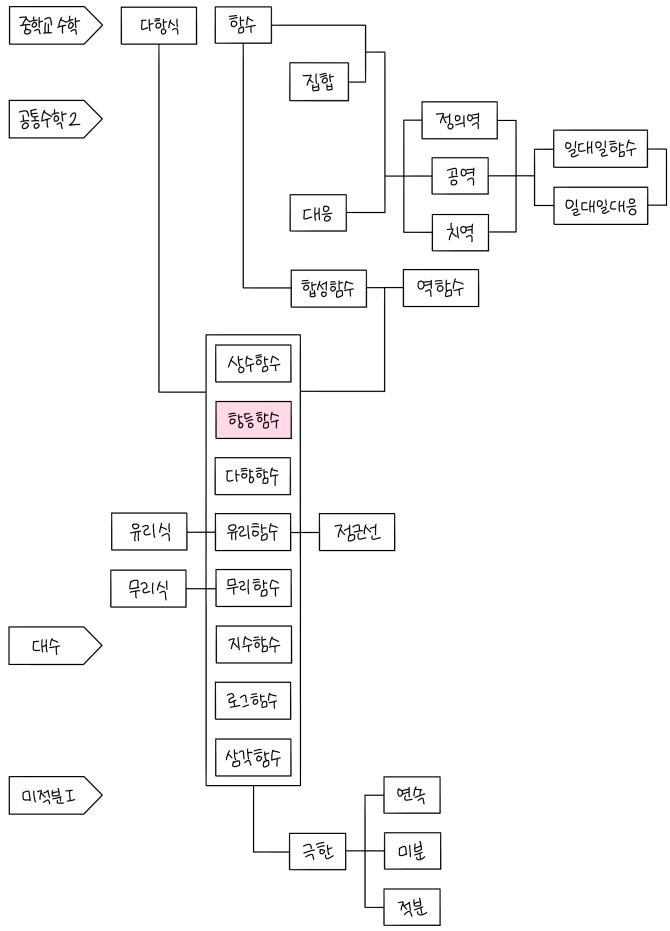
1. $f(x_1) = f(x_2)$이면 $x_1 = x_2$이므로 일대일함수이다.
2. 치역이 공역 X와 같으므로 전사함수이다.

이 두 성질을 모두 만족하므로, 항등함수는 일대일이면서 전사인 함수, 즉 일대일대응이다.

개념

항등함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

항등함수는 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 일대일대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩 짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라

한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y)=x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 **필요충분조건**은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 **항등함수**, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 **다항함수**, $f(x)$가 x에 대한 **유리식**인 함수를 **유리함수**, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 **무리식**인 함수를 **무리함수**라 한다. 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 **점근선**은 직선 $x=a$와 직선 $y=c$이다. 그 이외에도 **지수함수**, **로그함수**, **삼각함수**라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 **극한**, **연속**, **미분**, **적분** 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

상수함수常數函數; constant function

정의

상수함수는 무엇인가요?

함수 $f\colon X \longrightarrow Y$에 대하여 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소가 대응할 때, 즉

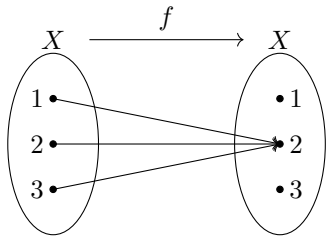
$$f(x) = c \quad (c\text{는 상수})$$

일 때, 이 함수 f를 **상수함수**라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

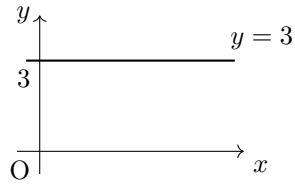
❶ 정의역과 공역을 $X = \{1, 2, 3\}$에 대하여 다음과 같이 정의된 상수함수를 생각해보자.



$f(x) = 2 \quad (x \in \{1, 2, 3\})$

치역은 $f(X) = \{2\}$이다. 정의역의 원소가 3개이지만 치역의 원소는 1개뿐이므로, 상수함수 f는 일대일함수가 아니다.

❷ 정의역과 공역 모두 실수 집합인 함수 $g(x) = 3$는 상수함수이다.



의미

상수함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

상수함수(常數函數)에서 상(常)에는 '늘 같은', '변하지 않는'이라는 뜻이 있고, 수(數)는 '수', '값'을 뜻하므로, 상수함수(常數函數)는 늘 같은 수 즉, 상수(數常)를 함숫값으로

갖는 함수(函數)을 의미한다. 다시 말해서, 정의역의 모든 원소의 함숫값이 하나의 상수로 일정한 함수를 의미한다.

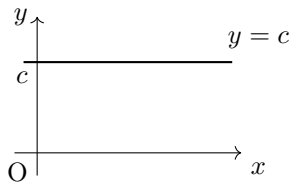
常	數	函	數
항상 상	셈(수) 수	상자 함	셈(수) 수

상수함수를 영어로는 constant function이라고 한다. constant에는 '변하지 않는, 일정한'이라는 뜻이 있다. 함숫값이 변하지 않고 일정한 함수라는 의미로 constant function이라 하고, 이를 변하지 않고 일정한 수라는 뜻을 가진 한자어 상수(常數)을 차용하여 상수함수라고 번역하는 것이다.

개념

상수함수의 그래프는 어떤 모양인가요?

정의역이 실수 집합인 상수함수 $f(x)=c$의 그래프는 $y=c$인 직선이다. 이 직선은 x축과 평행하며, x의 값이 어떻게 변하더라도 함숫값이 항상 일정하므로 모든 점의 y좌표가 c로 같다. 따라서 상수함수의 그래프는 수평선의 형태를 가진다.





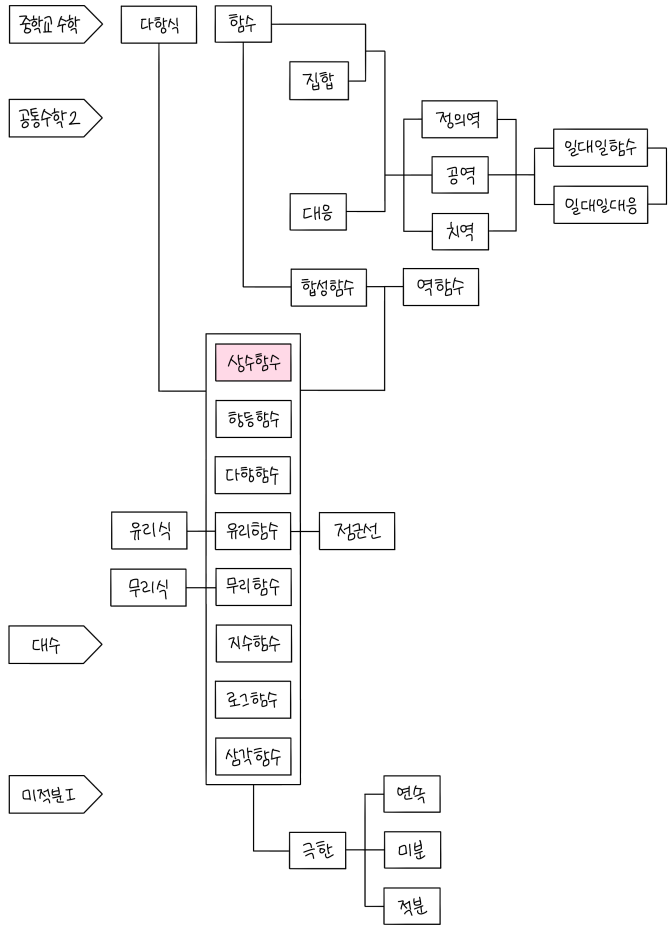
상수함수의 기울기는 무엇인가요? 왜 그렇게 되나요?

상수함수 $f(x)=c$의 기울기는 0이다. 이는 x가 증가하더라도 함숫값 $f(x)$가 전혀 변하지 않기 때문이다. 기울기는 x가 1만큼 증가할 때 y가 얼마나 변하는지를 나타내는 값인데, 상수함수에서는 항상 함숫값의 변화량이 0이므로 기울기는 0이 된다. 따라서 상수함수의 그래프는 수평선이고, 기울기가 0인 직선이다.

개념

상수함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

상수함수는 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩

짝지어주는 대응으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 부분집합으로서 모든 함숫값들의 집합을 그 함수의 치역이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 합성함수 $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 일대일함수라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 일대일대응이라 한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y = f(x)$가 일대일대응이면 그 역함수 즉, $f^{-1}(y) = x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 필요충분조건은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y = f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 항등함수, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 다항함수, $f(x)$가 x에 대한 유리식인 함수를 유리함수, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 무리식인 함수를 무리함수라 한다. 유리함수 $y = \dfrac{b}{x-a} + c$의 그래프의 점근선은 직선 $x = a$와 직선 $y = c$이다. 그 이외에도 지수함수, 로그함수, 삼각함수라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

합성함수合成函數; composite function

정의

합성함수는 무엇인가요?

공집합이 아닌 세 집합 X, Y, Z에 대하여 함수

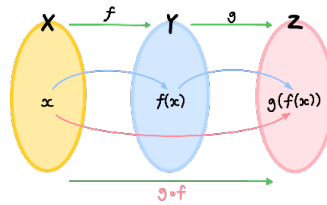
$$f: X \longrightarrow Y, \quad g: Y \longrightarrow Z$$

가 주어질 때, X의 각 원소 x에 Y의 원소 $f(x)$가 대응하고, 다시 이 $f(x)$에 Z의 원소 $g(f(x))$가 대응하면, X를 정의역으로 하고 Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.

이 함수를 f와 g의 **합성함수**라 하며, 이것을 기호로

$$g \circ f$$

와 같이 나타낸다.



또, 합성함수 $g \circ f: X \longrightarrow Z$에 대하여 x에서의 함숫값을 기호로

$$(g \circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다. 이때 X의 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$가 대응하므로 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$이다. 따라서 f와 g의 합성함수 $g \circ f$를

$$y = g(f(x))$$

와 같이 나타낼 수 있다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 두 함수 $f(x) = 2x + 1$와 $g(x) = x^2$의 합성함수 $g \circ f$는

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

로 정의되므로 대입하여 계산하면

$$(g \circ f)(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2$$

이다. 예를 들어 $x = 1$일 때

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \qquad g(f(1)) = g(3) = 3^2 = 9$$

이므로 $(g \circ f)(1) = 9$가 된다. 즉, x에 먼저 f를 적용하고 그 결과에 다시 g를 적용한 것이 합성함수 $g \circ f$이다.

❷ 두 함수

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x + 3$$

에 대하여 합성함수 $g \circ f$와 $f \circ g$를 각각 구해 보자. 먼저 $g \circ f$는

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$$

이고, $f \circ g$는

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2$$

이다. 예를 들어 $x = 1$일 때 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 4$이고 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 16$으로 두 함숫값이 서로 다름을 알 수 있다. 이처럼 같은 두 함수 f, g라도 합성하는 순서에 따라 합성함수가 서로 다른 함수가 됨을 알 수 있다.

의미 **합성함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.**

합성함수(合成函數)에서 합(合)은 '합치다', '함께 하다'를 뜻하고, 성(成)은 '완성하다', '만들어내다'를 뜻하므로, 합성함수(合成函數)는 둘 이상의 함수를 합(合)쳐 만들어낸(成) 새로운 함수(函數)를 의미한다.

合 成 函 數

합할 합 이룰 성 상자 함 셈(수) 수

합성함수를 영어로는 composite function이라고 한다. composite에 '합성의'라는 뜻이 있으므로, composite function은 글자 그대로 합성의 함수 즉, 합성함수라고 번역된다.

개념

합성함수 $f \circ g$를 정의할 수 있으려면 어떤 조건이 필요한가요?

합성함수 $f \circ g$가 정의되기 위해서는, 먼저 $g(x)$가 정의역에서 계산 가능해야 하고, 그 결과인 $g(x)$가 함수 f의 정의역에 속해야 한다. 즉,

$$x \in \text{정의역}(g), \quad \text{그리고} \quad g(x) \in \text{정의역}(f)$$

를 동시에 만족해야 한다. 따라서 $f \circ g$의 정의역은 함수 g의 정의역 중에서 $g(x)$가 f의 정의역에 포함되는 모든 x로 이루어진다.

개념

두 함수 f와 g가 주어졌을 때, 합성함수 $g \circ f$는 어떤 순서로 적용되나요?

합성함수 $g \circ f$는 x에 먼저 함수 f를 적용한 후, 그 결과값을 다시 함수 g에 넣어서 얻은 함수이다. 즉,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

이므로, 먼저 $f(x)$를 계산하고, 그 값을 g에 넣어서 $g(f(x))$를 계산한다. 따라서 함수 f와 g가 있을 때, 표기상으로는 g가 먼저 나오지만 실제 계산 순서는 f가 먼저이고, 그 다음이 g이다.

개념

합성함수 $f \circ g$와 $g \circ f$는 항상 같은 함수인가요?

일반적으로 합성함수 $f \circ g$와 $g \circ f$는 서로 같은 함수가 아니다. 정의에 따르면

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

이므로, 어느 함수를 먼저 적용하는지에 따라 주어진 x에 대응하는 함숫값이 달라질 수

있다.

예 2번에서 제시된 두 함수의 합성함수 $f \circ g$와 $g \circ f$를 비교해 보면

$$f \circ g \neq g \circ f$$

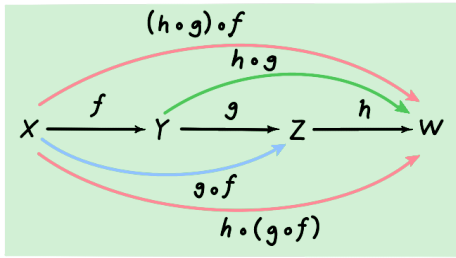
임을 확인할 수 있다. 이처럼 합성함수에서는 '어떤 함수를 먼저 적용하는지'가 함숫값을 결정하는 중요한 요소가 되므로, 합성의 순서를 항상 주의해서 다루어야 한다.

개념

세 함수 f, g, h가 주어졌을 때 $(f \circ g) \circ h$와 $f \circ (g \circ h)$는 항상 같은가요?

합성함수에서는 다음이 항상 성립한다.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$



이는 어느 쪽이든 간에 x에 h를 먼저 적용하고, 그 결과에 g를 적용한 뒤, 마지막으로 f를 적용하기 때문이다. 따라서

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

이므로, 양쪽 모두 결과적으로 같은 값을 가지며 함수로서도 같다. 따라서 합성의 결합법칙이 성립하므로 간단히 $f \circ g \circ h$라고 표기한다.

개념

항등함수와 합성했을 때 어떤 결과가 나오나요?

항등함수 id는 모든 x에 대해 $\mathrm{id}(x) = x$인 함수이다. 이때 어떤 함수 f에 대해 합성함수 $f \circ \mathrm{id}$ 또는 $\mathrm{id} \circ f$를 생각하면,

$$(f \circ \mathrm{id})(x) = f(\mathrm{id}(x)) = f(x), \quad (\mathrm{id} \circ f)(x) = \mathrm{id}(f(x)) = f(x)$$

이므로, 두 합성함수 모두 원래 함수 f와 같다. 즉, 항등함수와의 합성은 함수 f에 아무런 영향을 주지 않는다.

더 알아보기

합성함수도 덧셈이나 곱셈처럼 '연산'으로 생각할 수 있나요?

하나의 집합 X에서 다시 X로 가는 함수들을 모두 모아 놓고, 두 함수 f, g에 대하여

$$g \circ f : X \longrightarrow X, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

와 같이 정의하면, '함수 $\longrightarrow$ 함수'로 연결하는 한 가지 연산을 만든 셈이 된다. 이때 합성은 항상 같은 집합 X 안에서 다시 함수가 되므로 닫혀 있고, 항등함수와의 합성, 결합법칙 등의 성질도 만족한다.

그러나 위에서 본 것처럼 보통은

$$f \circ g \neq g \circ f$$

이므로, 합성함수의 연산에 대해서는 교환법칙이 성립하지 않는다. 따라서 함수들의 집합에서 정의된 합성 연산은 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는 연산이라고 이해할 수 있다.

개념

두 함수 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$가 모두 일대일대응일 때, 합성함수 $g \circ f$도 일대일대응이 되는 이유는 무엇인가요?

두 함수 f와 g가 모두 일대일대응이라고 하자. 이때 합성함수

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

가 일대일대응이 됨을 '일대일'과 '전사' 두 가지 관점에서 나누어 생각해 보자.

❶ $g \circ f$가 일대일함수임을 보이기

임의의 서로 다른 두 원소 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $x_1 \neq x_2$라고 하자. f가

일대일대응이므로 일대일함수이고, 따라서

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

이다.

또한 g도 일대일대응이므로 일대일함수이므로

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

가 성립한다.

이를 합성함수로 표현하면

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$$

이므로, 정의역의 서로 다른 두 원소가 서로 다른 함숫값에 대응한다. 따라서 $g \circ f$는 일대일함수이다.

❷ **$g \circ f$가 전사함수임을 보이기**

f가 일대일대응이므로 f의 치역은 공역 Y 전체이다. 즉, $\{f(x) \mid x \in X\} = Y$이다.

또한 g도 일대일대응이므로 g의 치역은 공역 Z 전체이다. 즉, $\{g(y) \mid y \in Y\} = Z$이다.

Z의 임의의 원소 z에 대하여, 함수 g가 전사이므로 Y의 어떤 원소 y가 존재하여 $g(y) = z$이다. 또한, 함수 f가 전사이므로 X의 어떤 원소 x가 존재하여 $f(x) = y$가 된다.

따라서

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

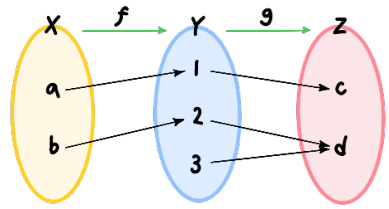
가 되는 x가 항상 존재하므로, $g \circ f$의 치역은 Z 전체이다. 즉, $g \circ f$는 전사함수이다.

위의 ❶, ❷를 종합하면, 합성함수 $g \circ f$는 일대일이면서 전사이므로 일대일대응이다.

더 알아보기

두 함수 f와 g는 각각 일대일대응이 아니지만, 합성함수 $g \circ f$는 일대일대응이 되도록 예를 들 수 있을까요?

집합 $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $Z = \{c, d\}$ 에 대하여 함수 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$를 다음과 같이 정의한다.



먼저 각 함수 f, g가 일대일대응이 아님을 살펴보자.

❶ 함수 f의 치역은

$$\{f(a), f(b)\} = \{1, 2\}$$

이므로 공역 $Y = \{1, 2, 3\}$의 원소 3은 어떤 원소의 함숫값으로도 나타나지 않는다. 따라서 f는 전사함수가 아니어서 일대일대응이 아니다. (단, a와 b가 서로 다른 값으로 대응되므로 f는 일대일함수이다.)

❷ 함수 g는

$$g(2) = d, \quad g(3) = d$$

와 같이 서로 다른 두 원소 2, 3이 같은 함숫값 d로 대응되므로 일대일함수가 아니다. 반면 치역은 $\{c, d\} = Z$이므로 전사함수이다. 따라서 g 역시 일대일대응이 아니다.

이제 합성함수 $g \circ f : X \longrightarrow Z$를 살펴보자.

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = c, \qquad (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = d$$

이므로 합성함수 $g \circ f$는 $a \mapsto c$, $b \mapsto d$ 대응을 가진다. 이때

- a와 b가 서로 다른 함숫값 c, d에 대응하므로 $g \circ f$는 일대일함수이고,

- 치역이 $\{c, d\}$로 공역 Z와 일치하므로 전사함수이다.

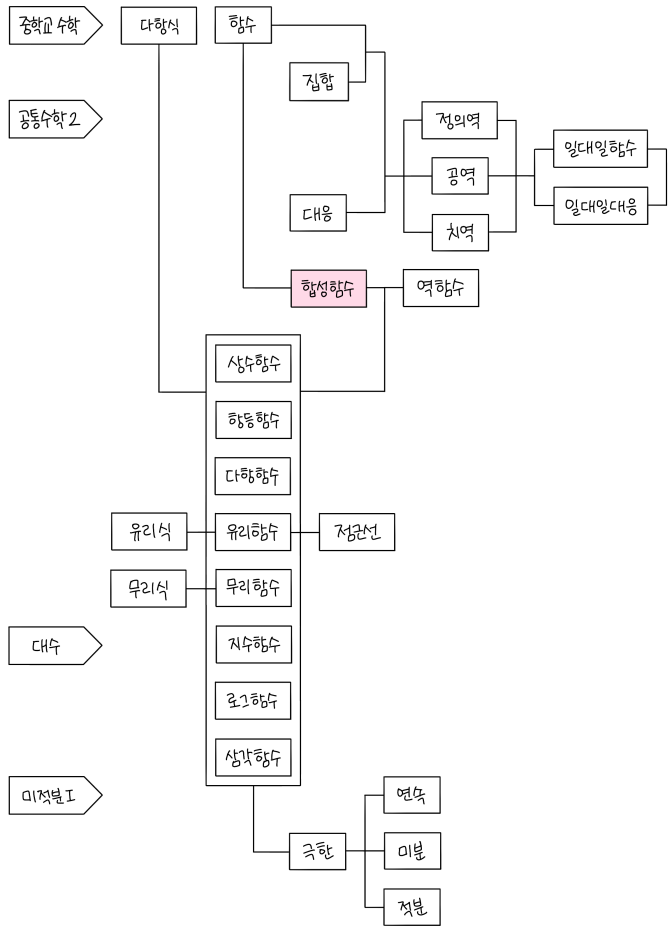
따라서 합성함수 $g \circ f$는 일대일이면서 전사인 함수, 즉 일대일대응이 된다.

이 예를 통해, 각각은 일대일대응이 아니더라도 합성함수 $g \circ f$가 일대일대응이 될 수 있음을 확인할 수 있다.

개념

합성함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

합성함수는 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩 짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라

한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y)=x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 **필요충분조건**은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 **항등함수**, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 **다항함수**, $f(x)$가 x에 대한 **유리식**인 함수를 **유리함수**, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 **무리식**인 함수를 **무리함수**라 한다. 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 **점근선**은 직선 $x=a$와 직선 $y=c$이다. 그 이외에도 **지수함수**, **로그함수**, **삼각함수**라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 **극한**, **연속**, **미분**, **적분** 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

심화(참고)

- **일대일대응을 모아 놓은 집합은 어떤 성질이 있나요?**

  정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합인 일대일대응 함수들을 모두 모은 집합을 생각해 보자. 이 집합에서 두 함수를 연산

  $$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

  와 같이 합성하여 새로운 함수를 만드는 연산을 정의하면, 이 집합은 합성함수에 대하여 군(群, group)을 이룬다. 즉, 다음 성질들이 모두 성립한다.

  ❶ **닫힘**

  두 일대일대응 f, g를 합성한 $g\circ f$도 여전히 정의역과 공역이 실수 전체인 일대일대응이 된다. 따라서 이 집합은 합성 연산에 대하여 닫혀 있다.

  ❷ **결합법칙**

  세 함수 f, g, h에 대하여, 임의의 실수 x에 대해

  $$(h\circ(g\circ f))(x)=h(g(f(x)))=(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$$

  이므로

  $$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

가 성립한다. 따라서 합성 연산에 대하여 결합법칙이 성립한다.

❸ **항등원(항등함수)의 존재**

모든 실수 x에 대하여 $e(x)=x$로 정의되는 항등함수 e를 생각하면, 임의의 일대일대응 f에 대하여

$$e \circ f = f, \qquad f \circ e = f$$

가 성립한다. 따라서 항등함수 e는 이 연산에 대한 항등원이다.

❹ **역원의 존재**

각 일대일대응 f에 대해서는 그 역함수 f^{-1}가 존재하고, 정의역과 공역이 모두 실수 전체인 일대일대응이 된다. 이때

$$f^{-1} \circ f = e, \qquad f \circ f^{-1} = e$$

가 성립하므로, f^{-1}는 f의 역원이다.

위 네 가지 조건이 모두 만족되므로, '실수 전체에서 실수 전체로 가는 일대일대응'의 집합은 합성함수의 연산에 대하여 군을 이룬다.



그렇다면 이 경우에 교환법칙도 성립하나요?

일반적으로 두 일대일대응 f, g에 대하여

$$f \circ g = g \circ f$$

가 항상 성립하는 것은 아니다. 즉, 보통은 합성 순서를 바꾸면 다른 함수가 되므로, 이 군은 대개 교환법칙이 성립하지 않는 군이다. 이런 군은 가환군(**可換群**, abelian group)이 아니라고 말한다.

역함수逆函數; inverse function

정의

역함수는 무엇인가요?

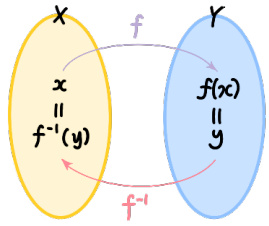
함수 $f\colon X \longrightarrow Y$가 일대일대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x)=y$인 X의 원소 x가 오직 하나씩 존재한다.

따라서 Y의 각 원소 y에 $f(x)=y$인 X의 원소 x를 대응시키면, Y를 정의역으로 하고 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.

이 함수를 f의 **역함수**라 하며, 이것을 기호로

$$f^{-1}$$

와 같이 나타낸다. 즉, $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X,\ x=f^{-1}(y)$이다.



예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

함수 $f(x)=2x+3$는 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1+3 \neq 2x_2+3$ 이므로 일대일함수이다. 또한, 치역과 공역이 실수 전체 집합으로 동일하므로 전사함수이다. 따라서 함수 f는 일대일대응이다.

역함수 f^{-1}를 구하기 위하여

$$y=2x+3$$

로 놓고, x와 y의 역할을 바꾸면

$$x=2y+3$$

이다. 이를 y에 대하여 풀면

$$y = \frac{x-3}{2}$$

이므로

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

가 된다. 실제로

$$f(f^{-1}(x)) = 2 \times \frac{x-3}{2} + 3 = x, \quad f^{-1}(f(x)) = \frac{(2x+3)-3}{2} = x$$

이 되어 f와 f^{-1}가 서로 역함수 관계임을 확인할 수 있다.

의미

역함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

역함수(逆函數)에서 역(逆)은 '거꾸로 하다', '반대로 하다'를 뜻하므로, 어떤 함수의 역함수(逆函數)는 원래 함수의 대응을 반대로(逆) 뒤집은 함수(函數)를 의미한다. 즉, 정의역 X에서 공역 Y로의 함수 f의 역함수 f^{-1}는 대응의 방향을 반대로 하여 Y를 정의역으로 하고 X를 공역으로 하는 함수로서 $y = f(x)$이면 $f^{-1}(y) = x$인 함수이다.

逆	函	數
거스를 역	상자 함	셈(수) 수

역함수를 영어로는 inverse function이라고 한다. inverse에 '역의, 반대의'라는 뜻이 있으므로, inverse function은 글자 그대로 역함수라고 번역된다.

개념

역함수가 존재하려면 원래 함수가 어떤 조건을 만족해야 하나요?

함수 $f : X \longrightarrow Y$에 대하여 Y에서 X로 가는 역함수 f^{-1}가 '함수'로 존재하려면, 먼저 f가 일대일대응여야 한다. 즉, 정의역 X의 서로 다른 두 원소가 같은 함숫값을 가질 수 없어야 한다.

수학적으로는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

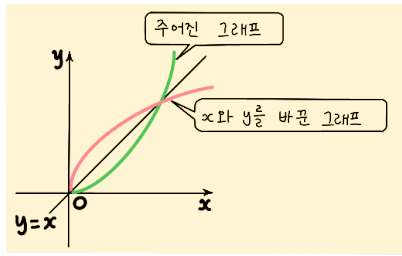
$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

이 조건은 각 $y \in Y$에 대하여 $f(x) = y$를 만족하는 $x \in X$가 최대 한 개만 존재함을 뜻한다. 따라서 일대일 조건이 만족되어야 y마다 그에 대응하는 x를 '거꾸로' 하나씩 정할 수 있고, 이때 비로소 f^{-1}를 함수로 정의할 수 있다.

개념

역함수의 그래프는 원래 함수의 그래프와 어떤 관계가 있나요?

역함수 f^{-1}의 그래프는 원래 함수 f의 그래프를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 것과 같다. 이는 역함수가 함수 f의 정의역과 공역을 바꾼 함수이기 때문이다. 즉, 함수 f의 그래프가 (a, b)라는 점을 포함한다면, 역함수 f^{-1}의 그래프는 (b, a)라는 점을 포함하게 된다.



개념

항등함수와 역함수는 어떤 관련이 있나요?

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대해 다음과 같은 항등함수와의 관계가 성립한다.

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = x(x \in X), \quad f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(y)) = y(y \in Y)$$

즉, 합성함수 $f^{-1} \circ f$는 X에서의 항등함수이고, 합성함수 $f \circ f^{-1}$는 Y에서의 항등함수이다. 이때 두 함수 $f^{-1} \circ f$와 $f \circ f^{-1}$는 모두 항등함수이지만 정의역이 다르기 때문에 일반적으로 서로 같지 않다.

개념

역함수는 항상 존재하나요? 존재하지 않는 경우는 언제인가요?

역함수는 모든 함수에 대해 항상 존재하는 것은 아니다. 함수 $f : X \longrightarrow Y$에 대하여 Y에서 X로 가는 역함수 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$가 '함수'로 존재하기 위한 필요충분조건은 f가 **일대일대응**이 되는 것이다.

먼저, f가 일대일대응이 아닐 때를 생각해 보자.

❶ f가 일대일이 아니면, 서로 다른 두 원소 $x_1, x_2 \in X$에 대하여

$$f(x_1) = f(x_2)$$

인 경우가 존재한다. 이때 같은 $y \in Y$에 대해 어떤 x를 $f^{-1}(y)$로 정해야 할지 하나로 결정할 수 없으므로, f^{-1}를 함수로 정의할 수 없다.

❷ f가 전사가 아니면, 공역 Y의 어떤 원소 y는 어느 $x \in X$의 함숫값도 되지 못한다. 이때 그런 y에 대해 $f^{-1}(y)$를 정의할 수 없으므로, f^{-1}는 Y 전체에서 정의된 함수가 될 수 없다.

따라서 $f : X \longrightarrow Y$의 역함수 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$가 존재하려면, f는 일대일이면서 전사인 함수, 즉 일대일대응이어야 한다.

한편, f가 일대일함수이지만 전사함수인지는 알 수 없는 경우라도, 공역을 적절히 조정하면 역함수를 생각할 수 있다. $f : X \longrightarrow Y$가 일대일함수일 때, X의 치역 $f(X)$을 생각해보자. 이때 f를

$$f : X \longrightarrow f(X)$$

로 보아 공역을 치역으로 '줄여서' 생각하면, 이 새로운 공역에서는

$$\{f(x) \mid x \in X\} = f(X)$$

가 성립하므로 f는 일대일이면서 전사인 함수, 즉 일대일대응이 된다.

따라서 일대일함수의 경우에는 '공역을 치역으로 제한하여' 역함수 $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$를 정의할 수 있다. 이 점을 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

역함수가 Y 전체에서 정의되려면 $f : X \longrightarrow Y$는 일대일대응이어야 한다.

역함수가 치역 위에서만 정의되는 것은, f가 일대일함수이면 항상 가능하다.

개념

역함수를 구하려면 어떤 절차를 따라야 하나요?

함수 $y=f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하기 위한 일반적인 절차는 다음과 같다.

❶ 주어진 함수식 $y=f(x)$에서 y와 x의 역할을 바꾸어 $x=f(y)$로 쓴다.

❷ y에 대해 풀어서 $y=f^{-1}(x)$ 형태로 정리한다.

예를 들어, $f(x)=2x+3$이면,

$$y=2x+3 \quad \Rightarrow \quad x=2y+3 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{x-3}{2}$$

따라서 역함수는 $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$가 된다.

더 알아보기

역함수에는 어떤 성질이 있나요?

함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$가 모두 일대일대응이라고 하자. 그러면 두 함수의 역함수 f^{-1}, g^{-1}가 존재하고, 이때 역함수에 대하여 다음 두 가지 중요한 성질이 성립한다.

❶ $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

❷ $(f^{-1})^{-1}=f$

이 성질들을 하나씩 왜 그런지 살펴보자.

❶ $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ **임을 보이기**

합성함수 $g\circ f: X \longrightarrow Z$의 역함수 $(g\circ f)^{-1}: Z \longrightarrow X$를 생각하자. 임의의 $z\in Z$에 대하여

$$(g\circ f)^{-1}(z)=x$$

라고 두면, 역함수의 정의에 의해

$$(g\circ f)(x)=z$$

이다. 합성함수의 정의를 풀어 쓰면

$$g(f(x)) = z$$

가 된다.

이제 g가 일대일대응이므로 양변에 g^{-1}를 적용하면

$$f(x) = g^{-1}(z)$$

이다. 다시 f의 역함수 f^{-1}를 적용하면

$$x = f^{-1}(g^{-1}(z))$$

가 된다. 처음에 $(g \circ f)^{-1}(z) = x$라고 두었으므로,

$$(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$$

가 임의의 $z \in Z$에 대해 성립한다. 따라서

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

임을 알 수 있다.

❷ **$(f^{-1})^{-1} = f$임을 보이기**

f가 일대일대응이므로 역함수 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$가 존재한다. 이제 f^{-1}의 역함수 $(f^{-1})^{-1}$를 생각하자.

임의의 $x \in X$에 대하여

$$y = f(x)$$

라고 두면, 역함수의 정의에 의해

$$x = f^{-1}(y)$$

가 성립한다.

이제 $(f^{-1})^{-1}(x)=k$라고 놓으면, 역함수의 정의에 의해

$$f^{-1}(k)=x$$

가 되어야 한다. 그런데 위에서 본 것처럼 $f^{-1}(y)=x$를 만족하는 y는 유일하게 $y=f(x)$뿐이다. 따라서

$$k=y=f(x)$$

가 되어야 하고, 결국

$$(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$$

가 된다. 이는 모든 $x\in X$에 대하여 성립하므로

$$(f^{-1})^{-1}=f$$

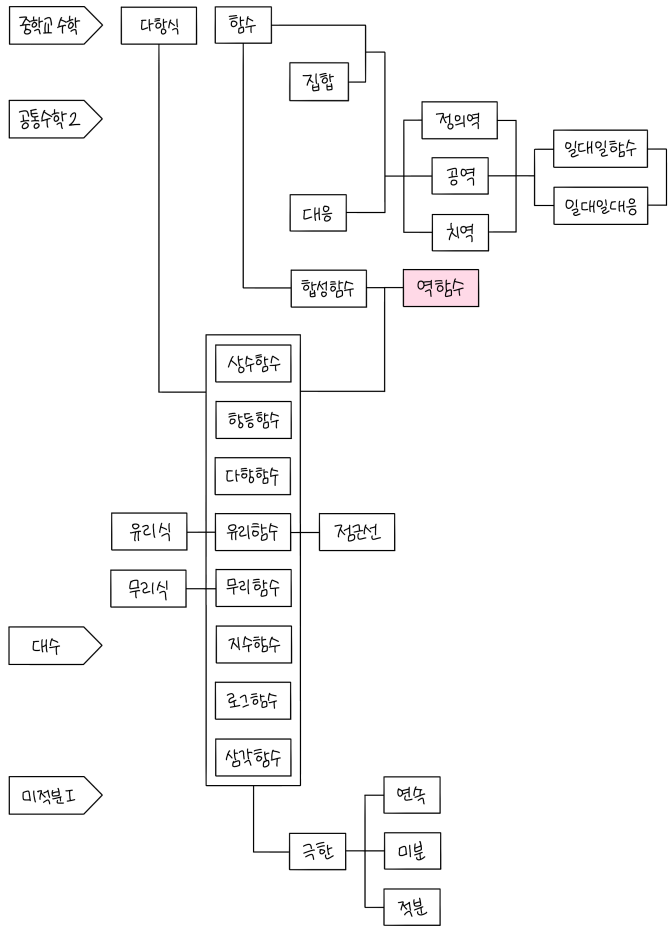
임을 알 수 있다.

이 두 성질은 역함수를 다룰 때 합성함수를 '역순으로 풀어 가는 과정'과, 역함수를 두 번 취하면 다시 처음 함수로 되돌아온다는 사실을 잘 보여 주는 중요한 결과이다.

개념

역함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

역함수는 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩 짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라

한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y)=x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 필요충분조건은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 상수함수, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 항등함수, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 다항함수, $f(x)$가 x에 대한 유리식인 함수를 유리함수, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 무리식인 함수를 무리함수라 한다. 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$와 직선 $y=c$이다. 그 이외에도 지수함수, 로그함수, 삼각함수라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

유리식有理式; rational expression

정의

유리식은 무엇인가요?

두 다항식 A와 B $(B \neq 0)$에 대하여 $\frac{A}{B}$의 꼴로 나타낸 식을 **유리식**이라고 한다. 특히, 다항식 A는 $\frac{A}{1}$로 나타낼 수 있으므로 다항식도 유리식이다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

$\frac{1}{x}$, $\frac{2x+1}{x-3}$, $\frac{x^2-4}{3}$은 모두 유리식이다.

$$\frac{1}{x}$$

은 상수 다항식 1을 일차식 x로 나눈 꼴의 유리식이다.

또한

$$\frac{2x+1}{x-3}$$

은 일차식 $2x+1$을 일차식 $x-3$으로 나눈 꼴의 유리식이다.

한편

$$\frac{x^2-4}{3}$$

은 $\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}$과 같이 쓸 수 있으므로, 이 유리식은 동시에 다항식이기도 하다.

의미

유리식이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

유리식(**有理式**)은 유리(**有理**)수와 같은 꼴의 식(**式**)을 의미한다. 즉, 유리수가 두 정수의 비로 나타낼 수 있는 수인 것처럼, 유리식은 두 다항식의 비의 꼴로 나타낼 수 있는 식을 의미한다.

有 理 式

있을 유 이치 리 식 식

유리식을 영어로는 rational expression이라고 한다. rational expression은 '유리수'를 의미하는 rational number와 관련이 있다. 즉, rational number를 유리수라고 번역하였으므로 rational expression은 유리식이라고 번역하는 것이다. 이때 rational에는 '이성적인'이라는 뜻도 있고 '비(ratio)의'라는 뜻도 있다. 고대 그리스에서 수는 무리수 발견 전까지는 자연수와 두 자연수의 비(ratio)로 나타내어지는 유리수를 의미했고, 무리수가 발견되었을 당시 무리수는 두 자연수의 비(ratio)로 나타낼 수 없는 비이성적이고 이치에 맞지 않은 수로 인식되었기에 rational의 반의어인 irrational을 사용하여 irrational number라고 한 것으로 보인다.

개념

유리식을 덧셈이나 뺄셈하려면 어떻게 해야 하나요?

유리식의 덧셈이나 뺄셈을 할 때에는 먼저 분모를 같게 하는 통분을 해야 한다. 두 유리식

$$\frac{A}{B},\quad \frac{C}{D}$$

에 대하여 분모를 BD로 통일하면

$$\frac{A}{B}=\frac{AD}{BD},\qquad \frac{C}{D}=\frac{BC}{BD}$$

가 되므로, 덧셈과 뺄셈은 각각

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD},\qquad \frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{AD-BC}{BD}$$

와 같이 계산할 수 있다.

예를 들어, 유리식

$$\frac{1}{x}\quad 과\quad \frac{2}{x+1}$$

의 덧셈은 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{(x+1)}{x(x+1)}+\frac{2x}{x(x+1)}=\frac{(x+1)+2x}{x(x+1)}=\frac{3x+1}{x(x+1)}$$

또한 같은 두 유리식의 뺄셈은

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{(x+1)}{x(x+1)}-\frac{2x}{x(x+1)}=\frac{(x+1)-2x}{x(x+1)}=\frac{1-x}{x(x+1)}$$

과 같이 분모를 먼저 같게 만든 뒤, 분자끼리 빼 주면 된다.

개념

유리식을 곱하거나 나눌 때는 어떤 규칙을 따라야 하나요?

유리식의 곱셈에서는 각각의 유리식의 분자끼리 곱하고, 분모끼리 곱한다. 두 유리식

$$\frac{A}{B},\quad \frac{C}{D}$$

에 대하여 곱셈은

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

와 같이 계산한다.

예를 들어,

$$\frac{x}{x+1}\times\frac{x+2}{x-2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)(x-2)}$$

와 같이 계산할 수 있다.

유리식의 나눗셈에서는 두 번째 유리식을 역수로 바꾸어 곱셈으로 고쳐 계산한다. 즉,

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

와 같이 계산할 수 있다.

예를 들어,

$$\frac{2x}{x-1}\div\frac{x+1}{x+2}=\frac{2x}{x-1}\times\frac{x+2}{x+1}=\frac{2x(x+2)}{(x+1)(x-1)}$$

와 같이 계산할 수 있다.

이와 같이 유리식의 곱셈과 나눗셈에서는 '분자와 분모를 곱한다'와 '역수로 바꾸어

곱한다'는 규칙을 사용한다.

개념

유리식을 기약분수로 만드는 방법은 무엇인가요?

기약분수란 분자와 분모가 공약수가 없는 상태의 유리식을 말한다. 유리식을 기약분수로 만들기 위해서는 분자와 분모를 각각 인수분해한 뒤, 공통된 인수를 약분한다.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

예를 들어,

$$\frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x} \quad (x \neq 0, x \neq 1)$$

여기서 $x-1$은 분자와 분모 모두에 있으므로 약분이 가능하다.

개념

유리식을 약분할 때 주의할 점은 무엇인가요?

유리식을 약분할 때는 반드시 인수분해를 통해 공약수를 찾아야 하며, 변수에 따라 약분한다. 예를 들어,

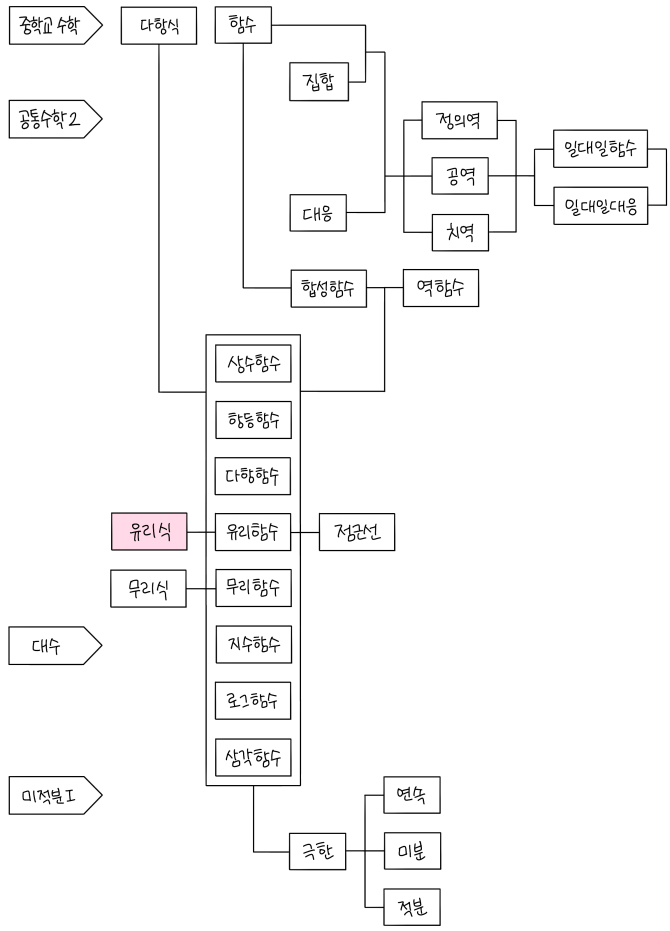
$$\frac{x^2-4}{x^2-x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-2}{x-3}$$

와 같이 계산할 수 있다.

개념

유리식과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

유리식은 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩 짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라

한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y)=x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 **필요충분조건**은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 **항등함수**, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 **다항함수**, $f(x)$가 x에 대한 **유리식**인 함수를 **유리함수**, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 **무리식**인 함수를 **무리함수**라 한다. 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 **점근선**은 직선 $x=a$와 직선 $y=c$이다. 그 이외에도 **지수함수**, **로그함수**, **삼각함수**라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 **극한**, **연속**, **미분**, **적분** 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

다항함수多項函數; polynomial function와 유리함수有理函數; rational function

정의

다항함수와 유리함수는 무엇인가요?

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 **유리함수**라고 한다.

특히, $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 **다항함수**라고 한다.

개념

다항함수와 유리함수의 정의역은 어떻게 구하나요?

유리함수는 일반적으로 다음과 같은 꼴로 주어진다.

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

여기서 $p(x)$와 $q(x)$는 다항식이다. 이때 분모인 $q(x)$가 0이 되면 $f(x)$는 정의되지 않으므로, 정의역이 주어져 있지 않은 경우에는 유리함수의 정의역은 $q(x)=0$이 되는 x의 값을 제외한 모든 실수이다. 즉, 정의역은

$$\{x \mid q(x) \neq 0\text{인 실수}\}$$

이다. 다항함수의 경우는 실수 전체의 집합이다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

함수 $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2x+1}{x-3}$, $y=\frac{x}{x^2+1}$, $y=\frac{x^2-4}{3}$은 모두 유리함수이고, 이 중에서 $y=\frac{x^2-4}{3}$는 다항함수이다.

❶ 유리함수 $y=\frac{1}{x}$의 정의역은 $\{x \mid x \neq 0\text{인 실수}\}$이다.

❷ 유리함수 $y=\frac{2x+1}{x-3}$의 정의역은 $\{x \mid x \neq 3\text{인 실수}\}$이다.

❸ 유리함수 $y=\frac{x}{x^2+1}$의 분모 x^2+1은 항상 양수이므로, 정의역은 실수 전체의 집합이다.

❹ 다항함수 $y=\frac{x^2-4}{3}$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

의미

다항함수, 유리함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

다항함수 다항함수(多項函數)는 글자 그대로 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 다항(多項)식인 함수(函數)를 의미한다.



다항함수를 영어로는 polynomial function이라고 한다. polynomial에 '다항식'이라는 뜻이 있으므로 polynomial function은 글자 그대로 다항식 함수 즉, 다항함수라고 번역된다.

유리함수 유리함수(有理函數)는 글자 그대로 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리(有理)식인 함수(函數)를 의미한다. 이때 유리식은, 유리수가 두 정수의 비의 꼴 즉, 분수의 꼴로 나타낼 수 있는 수인 것처럼, 분모와 분자가 모두 다항식인 분수식의 꼴로 나타낼 수 있는 식을 의미한다.



유리함수를 영어로는 rational function이라고 한다. rational에 '유리의'라는 뜻이 있으므로, rational number와 rational expression이 각각 유리수와 유리식으로 번역되는 것처럼, rational function은 글자 그대로 유리함수라고 번역된다.

이때 rational에는 '이성적인'이라는 뜻도 있고 '비(ratio)의'라는 뜻도 있다. 고대 그리스에서 수는 무리수 발견 전까지는 자연수와 두 자연수의 비(ratio)로 나타내어지는 유리수를 의미했고, 무리수가 발견되었을 당시 무리수는 두 자연수의 비(ratio)로 나타낼 수 없는 비이성적이고 이치에 맞지 않은 수로 인식되었기에 rational의 반의어인 irrational을 사용하여 irrational number라고 한 것으로 보인다.

더 알아보기

식이 같아 보이면 항상 같은 함수인가요? 유리함수에서는 무엇을 조심해야 하나요?

함수의 정의역이 따로 주어지지 않았을 때에는, 그 식으로부터 함숫값이 실제로 계산될 수 있는 실수들의 집합을 정의역으로 생각한다. 특히 유리함수의 경우에는 '분모가 0이 되지 않도록 하는 모든 실수의 집합'을 정의역으로 잡는다는 점이 중요하다.

예를 들어 다항함수

$$y = x + 1$$

과 유리함수

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

를 비교해 보자. 유리식 $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$은 분자를 인수분해하면

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1)$$

과 같이 정리되므로, 식만 보면 두 함수가 같은 함수라고 착각하기 쉽다.

그러나 함수의 정의역을 함께 생각하면 상황이 달라진다. 다항함수 $y = x + 1$은 분모에 문자가 없으므로 모든 실수 x에 대해 정의되며, 정의역은 '실수 전체의 집합'이다. 반면 유리함수 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$은 $x = 1$에서 분모가 0이 되어 식이 정의되지 않으므로, 정의역은 '1을 제외한 모든 실수의 집합'이다.

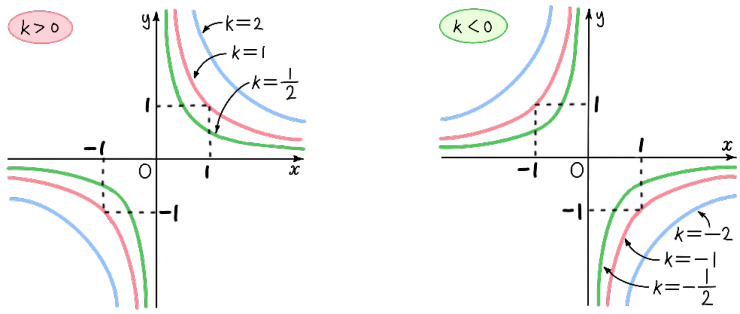
따라서 두 함수는1을 제외한 모든 x에서 같은 함숫값을 가지지만, 정의역이 서로 다르므로 서로 다른 함수이다. 이 예에서 알 수 있듯이, 유리함수를 다룰 때에는 식의 모양뿐 아니라 '정의역까지 포함하여' 함수의 같고 다름을 판단해야 함을 항상 유의해야 한다.

개념

유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프는 어떤 모양인가요?

함수 $y=\frac{k}{x}$에서 분모 x가 0이 될 수 없으므로, 정의역은 0을 제외한 모든 실수이다. 함숫값 y도 0이 될 수 없으므로 치역 역시 0을 제외한 모든 실수이다.

$k>0$일 때에는 그래프가 제1사분면과 제3사분면에 놓이고, $k<0$일 때에는 제2사분면과 제4사분면에 놓인다. k의 절댓값이 커질수록 그래프는 좌표축에서 더 멀리, 절댓값이 작아질수록 좌표축에 더 가까이 그려진다.



x가 0에 가까워질수록 $\frac{k}{x}$의 절댓값은 계속 커지므로, 그래프는 y축에 한없이 가까이 다가가지만 y축과 만나지는 않는다. 반대로 x의 크기가 점점 커질수록 $\frac{k}{x}$의 값은 0에 가까워지므로, 그래프는 x축에 점점 다가가지만 x축 위에 놓이지는 않는다. 이와 같이 곡선 위의 점이 이동할 때, 어떤 직선에 한없이 가까워지기만 하고 끝내 만나지 않는다면 그 직선을 그 곡선의 **점근선**이라고 한다. 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프에서는 x축과 y축이 점근선이 된다.

또한 x 대신 $-x$를 대입하면

$$y=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}$$

이므로, 이 함수는 원점을 중심으로 서로 대칭이 되는 점들을 가진다. 즉, $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 원점을 중심으로 대칭이다. 이러한 모양의 곡선을 **쌍곡선**이라고 한다.

더 알아보기

유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프에는 어떤 대칭성이 있나요?

유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 좌표평면에서 여러 가지 대칭성을 가진다. 곡선 위의 한 점 (x, y)를 이동시켜 얻은 점이 다시 곡선 위의 점이 되는지 살펴보면, 어떤 대칭이 성립하는지 알 수 있다.

먼저 곡선

$$y=\frac{k}{x}$$

위의 점 (x, y)를 생각하자. 이때 $y=\frac{k}{x}$를 만족한다.

❶ 원점에 대한 대칭성

점 (x, y)를 원점에 대하여 대칭이동하면 점 $(-x, -y)$를 얻는다. 이 점이 곡선 위에 있는지 확인해 보자.

$$-y=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}$$

이므로 양변에 -1을 곱하면

$$y=\frac{k}{x}$$

가 다시 얻어진다. 따라서 (x, y)가 곡선 위에 있으면 $(-x, -y)$도 곡선 위에 있으므로, 곡선 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

❷ 직선 $y=x$에 대한 대칭성

이번에는 점 (x, y)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 (y, x)가 된다. 이 점에 대해 식을 세우면

$$x=\frac{k}{y}$$

이다. 양변에서 x에 대하여 다시 정리하면

$$y=\frac{k}{x}$$

와 같은 관계를 얻는다. 즉, (y, x)도 곡선 $y = \frac{k}{x}$ 위의 점이 되므로, 이 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

❸ **직선 $y = -x$에 대한 대칭성**

점 (x, y)를 직선 $y = -x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(-y, -x)$를 얻는다. 이 점에 대해 계산해 보면

$$-x = \frac{k}{-y} = -\frac{k}{y}$$

이므로 양변에 -1을 곱하면

$$x = \frac{k}{y}$$

가 되고, 다시 정리하면

$$y = \frac{k}{x}$$

가 된다. 따라서 $(-y, -x)$도 원래 곡선 위의 점이므로, 곡선 $y = \frac{k}{x}$의 그래프는 직선 $y = -x$에 대해서도 대칭이다.

이와 같이 유리함수 $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$의 그래프는 원점을 중심으로 하는 점대칭도형이며, 직선 $y = x$와 직선 $y = -x$에 대해서도 대칭이 되는 특별한 대칭성을 가진다.

개념

함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ $(k \neq 0)$의 그래프는 어떻게 그릴 수 있나요?

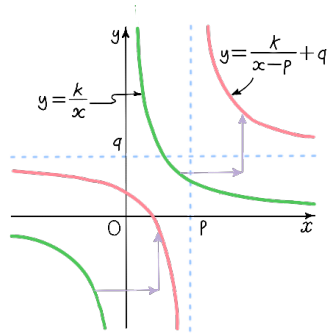
함수

$$y = \frac{k}{x} \ (k \neq 0)$$

의 그래프를 생각해 보자. 이 그래프를 이용하면

$$y = \frac{k}{x-p} + q$$

의 그래프도 쉽게 그릴 수 있다.



식에서 x 대신 $x-p$가 들어가 있으므로, $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 p만큼 평행이동한 것과 같은 모양이 된다. 여기에 다시 $+q$가 더해져 있으므로, 전체 그래프를 y축의 양의 방향으로 q만큼 위로 평행이동한 것과 같다.

따라서 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 오른쪽으로 p만큼, 위로 q만큼 평행이동한 그래프이다. 이때 분모가 0이 되어서는 안 되므로 $x=p$는 정의역에서 제외되고, 그래프는 직선 $x=p$와 $y=q$에 한없이 가까이 다가가지만 만나지는 않는다.

즉, 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 점근선은 수직선 $x=p$와 수평선 $y=q$이다.

개념

함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$의 그래프는 어떻게 그릴 수 있나요?

분자와 분모가 모두 일차식인 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$는 식을 적절히 변형하면 기본형 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 형태로 바꿀 수 있다. 이렇게 바꾼 뒤에는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 평행이동한 모습으로 이해하여 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.

실제로 식을 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(cx+d)+bc-ad}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

여기에서

$$\frac{bc-ad}{c(cx+d)}=\frac{k}{x-p}$$

의 꼴로 나타낼 수 있으므로, 전체 식은 결국

$$y=\frac{k}{x-p}+q$$

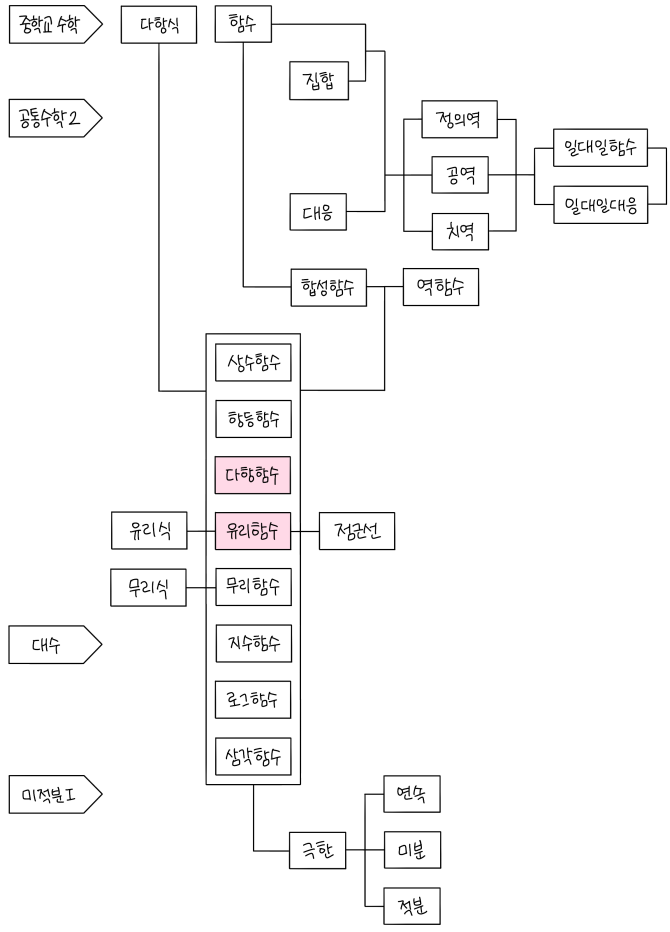
의 형태가 된다.

따라서 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 기준 그래프 $y=\frac{k}{x}$를 x방향으로 p만큼, y방향으로 q만큼 평행이동한 형태가 되며, 점근선은 $x=p$, $y=q$가 된다.

개념

다항함수, 유리함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

다항함수, 유리함수는 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩

짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

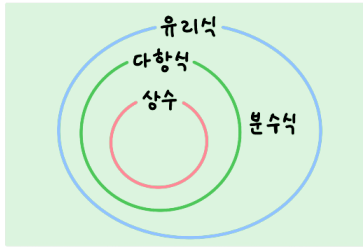
두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라 한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y = f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y) = x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 **필요충분조건**은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y = f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 **항등함수**, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 **다항함수**, $f(x)$가 x에 대한 **유리식**인 함수를 **유리함수**, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 **무리식**인 함수를 **무리함수**라 한다. 유리함수 $y = \dfrac{b}{x-a} + c$의 그래프의 **점근선**은 직선 $x = a$와 직선 $y = c$이다. 그 이외에도 **지수함수**, **로그함수**, **삼각함수**라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 **극한**, **연속**, **미분**, **적분** 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

심화(참고)

- **유리식, 다항식, 분수식의 개념은 어떻게 다른가요?**

  유리함수 단원을 이해하기 위해서는 먼저 '유리식'의 개념을 분명히 해 두는 것이 중요하다. 유리식, 다항식, 분수식의 관계는 다음과 같이 정리할 수 있다.



- 분수식이라는 용어는 교육과정에서 더 이상 사용하지 않지만, 전통적으로 분수 꼴로 나타난 식을 가리키던 개념은 그대로 남아 있다. 지도할 때에는 '분수식' 대신, 분모에 문자가 들어 있는 식을 '유리식'의 한 예로 소개하여 학생들이 자연스럽게 연결하도록 한다.
- 유리식은 '두 다항식의 비로 나타낼 수 있는 모든 식'을 뜻한다. 따라서 다항식 $p(x)$ 자체도

$$p(x)=\frac{p(x)}{1}$$

과 같이 볼 수 있으므로 유리식의 한 종류이다. 이때 상수만으로 이루어진 식은 다항식의 특수한 경우이고, 다항식은 다시 유리식의 특수한 경우가 된다.

- 분모에 문자가 있는 식(예: $\frac{1}{x}$, $\frac{x+1}{x-2}$ 등)은 과거에 '분수식'이라고 불렀던 대표적인 유리식이다.

분수식과 다항식이 모두 유리식에 포함되는 특수한 예라는 점을 그림이나 벤 다이어그램으로 제시하면,

$$\text{상수} \subset \text{다항식} \subset \text{유리식}, \qquad \text{분수식} \subset \text{유리식}$$

과 같은 포함 관계를 학생들이 시각적으로 이해하는 데 도움이 된다.

이와 같이 '유리식 전체 속에 다항식과 분수식이 함께 들어 있다'는 관점을 강조하면, 이후 '유리함수'를 다룰 때 분자와 분모가 모두 다항식이라는 정의를 자연스럽게 받아들이게 할 수 있다.

점근선漸近線; asymptotic line

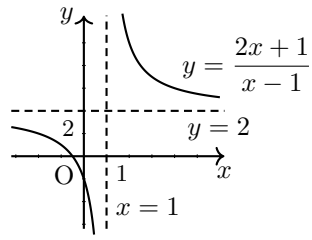
정의 점근선은 무엇인가요?

곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 **점근선**이라고 한다.

예 구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

유리함수 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$$



❶ x의 값이 1에 아주 가까운 수들로 다가갈수록 $\dfrac{3}{x-1}$의 절댓값은 끝없이 커진다. 그에 따라 $y=2+\dfrac{3}{x-1}$의 그래프는 직선 $x=1$에 한없이 가까이 다가가지만, $x=1$에서는 식이 정의되지 않으므로 그 직선과 만나지 않는다. 따라서 직선 $x=1$은 점근선이다.

❷ x의 절댓값이 매우 커질수록(아주 큰 양수이거나 아주 큰 음수인 경우) $\dfrac{3}{x-1}$은 0에 가까워진다. 그러면 $y=2+\dfrac{3}{x-1}$은 2에 가까워지므로, 그래프는 x의 절댓값이 커질수록 직선 $y=2$에 점점 가까워진다. 따라서 직선 $y=2$는 점근선이다.

따라서 점근선은 두 직선 $x=1$과 $y=2$이다.

의미 점근선이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

점근선(漸近線)에서 점(漸)에는 '점차', '점점'이라는 뜻이 있고, 근(近)은 '가깝다'를 뜻하므로, 점근선(漸近線)은 점(漸)차 가까워지는(近) 선(線)을 의미한다. 즉, 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때 이 직선을 주어진 곡선의 점근선이라고 하는 것이다.

漸 점차 점　近 가까울 근　線 줄(선) 선

점근선을 영어로는 asymptotic line이라고 한다. asymptotic에는 '함께 계속 가는, 그러나 만나지는 않는'이라는 뜻이 있다. 그러므로 asymptotic line은 함께 계속 가지만 만나지는 않는 선을 의미한다. 점차 가까워진다는 의미로 한자어 점근(漸近)을 차용하여 점근선이라 번역하는 것이다. 한편, asymptotic은 그리스어 asymptōtos에서 유래했는데, a는 부정 접두사이고, syn은 '함께', ptōtos는 '닿다'를 뜻하여 함께 닿지 않는 것 즉, 한없이 가까워지지만 결코 만나지 않는 선을 의미한다.

개념

점근선은 왜 생기나요?

점근선은 함수의 그래프가 무한히 가까워지지만 절대 닿지 않는 직선이다. 유리함수의 그래프에서 점근선은 두 가지 방식으로 나타난다.

❶ **수직점근선**: 분모가 0이 되는 $x=a$에서 함수의 그래프는 끊겨있고 $x=a$의 근방에서 그 수직선에 한없이 가까이만 가면, $x=a$는 수직 점근선이 된다.

❷ **수평점근선**: x가 한없이 커지거나 작아질 때 함숫값이 일정한 값으로 가까워지면 그 값을 y로 하는 직선이 수평 점근선이 된다.

점근선은 〈미적분I〉에서 다루는 함수의 극한(값)과 밀접한 관계가 있으며, 그래프의 전체적인 형태를 이해하는 데 중요한 역할을 한다.



유리함수의 그래프에서 수직점근선은 어떻게 결정되나요?

유리함수는 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ (여기서 $p(x)$, $q(x)$는 다항식)에서 수직점근선은 다음과 같이 판단한다.

❶ $q(x)$가 $x=a$에서 0이 되면, 직선 $x=a$를 후보로 본다.

❷ 분자 $p(x)$와 분모 $q(x)$에 $(x-a)$가 약분되지 않으면, $x=a$에서 그래프가 그 세로선에 한없이 가까워지므로 **수직점근선** $x=a$가 된다.

❸ 만약 $(x-a)$가 분자와 분모에 공통으로 들어 있어 약분된다면, $x=a$에서는 그래프에 '뚫린 점(제거점)'만 생기고 **수직점근선은 아니다.**

간단히 말해,

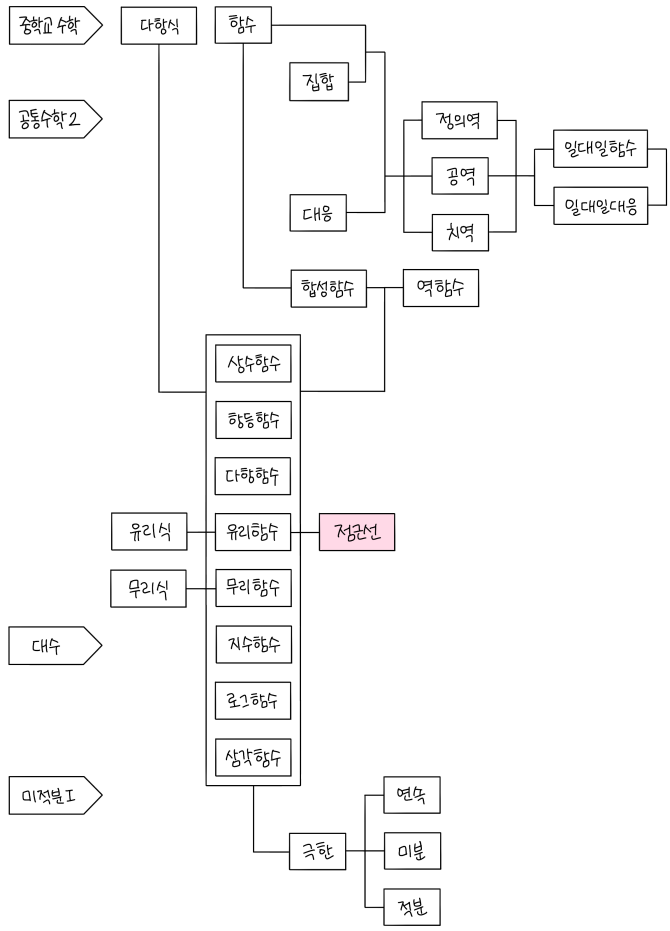
$$f(x)=\frac{p(x)}{(x-a)\,r(x)} \quad (\text{여기서 } (x-a)\text{가 } p(x)\text{와 약분되지 않음})$$

이면, 직선 $x=a$는 수직점근선이다. 반대로 $(x-a)$가 약분되면 $x=a$는 점 하나가 빠진 자리일 뿐, 수직점근선은 아니다.

개념

점근선과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

점근선은 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩 짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라

한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y)=x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 **필요충분조건**은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 **항등함수**, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 **다항함수**, $f(x)$가 x에 대한 **유리식**인 함수를 **유리함수**, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 **무리식**인 함수를 **무리함수**라 한다. 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 **점근선**은 직선 $x=a$와 직선 $y=c$이다. 그 이외에도 **지수함수**, **로그함수**, **삼각함수**라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 **극한**, **연속**, **미분**, **적분** 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

심화(참고)

- **유리함수의 점근선은 수직선과 수평선 뿐인가요?**

  유리함수 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$는 수직·수평 점근선뿐 아니라 사선점근선도 가질 수 있다. 사선점근선은 직선 $y=ax+b$에 대하여

  $$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$$

  이 되는 경우를 말한다. 고등학교 수준에서는 다음 절차로 판단한다.

  ❶ **차수 비교** 분자 다항식의 차수가 분모 다항식의 차수보다 1만큼 큰 경우이면 사선점근선이 존재한다.

  ❷ **나눗셈으로 직선 구하기** 다항식 나눗셈으로

  $$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=ax+b+\frac{r(x)}{q(x)}\quad(r(x)\text{의 차수}<q(x)\text{의 차수})$$

  처럼 나타내면, $y=ax+b$가 사선점근선이 된다. 실제로

  $$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{r(x)}{q(x)}=0.$$

  예를 들어, 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$에서 다항식 나눗셈을 하면

  $$x^2+1=(x-1)(x+1)+2\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}.$$

따라서

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x-1}=0,$$

즉 직선 $y=x+1$이 사선점근선이다. 한편 $x=1$에서는 분모가 0이 되므로 수직점근선 $x=1$을 갖는다.

따라서, 유리함수에서 '$p(x)$의 차수 $=q(x)$의 차수 $+1$'이면 다항식 나눗셈으로 얻은 직선 $y=ax+b$가 사선점근선이다. 수직·수평 점근선과 함께 그래프의 전반적 형태를 결정하는 핵심 정보가 된다.

무리식無理式; irrational expression

정의

무리식은 무엇인가요?

근호 안에 문자가 포함되어 있는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 **무리식**이라고 한다.

개념

무리식을 계산할 때, 어떤 범위에서 생각해야 하나요?

무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식이 0 이상이어야 한다. 따라서 근호가 포함된 식을 다룰 때에는 항상

$$(\text{근호 안의 식 값}) \geq 0$$

을 먼저 만족하는 x의 범위에서만 계산하고 해석한다.

예

무리식의 예를 들어 설명해 주세요.

식 $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+4}$, $x^2+\sqrt{x-3}$, $\sqrt{x^2+1}$은 모두 무리식이다. 반면 $\sqrt{x^2}$은 $|x|$로 간단히 나타낼 수 있으므로 무리식이 아니다.

무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식이 0 이상이어야 한다. 각 예에서 실수 값을 갖는 x의 범위는 다음과 같다.

❶ 무리식 $\sqrt{x}$는 $x \geq 0$에서 실수 값을 가진다.

❷ 무리식 $\sqrt{x+4}$는 $x+4 \geq 0$이므로 $x \geq -4$에서 실수 값을 가진다.

❸ 무리식 $x^2+\sqrt{x-3}$은 $x-3 \geq 0$이므로 $x \geq 3$에서 실수 값을 가진다.

❹ 무리식 $\sqrt{x^2+1}$은 $x^2+1>0$이므로 모든 실수 x에서 실수 값을 가지며, 값은 항상 1 이상이다.

의미

무리식이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

무리식(**無理式**)은 무리(**無理**)수가 두 정수의 비의 꼴 즉, 분수의 꼴로 나타낼 수 없는 수인 것처럼 근호 안에 수 이외의 문자를 포함하고 있는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 즉, 분모와 분자가 모두 다항식인 분수식의 꼴로 나타낼 수 없는 식(**式**)을 의미한다.

無	理	式
없을 무	이치 리	식 식

무리식을 영어로는 irrational expression이라고 한다. irrational expression은 '무리수'를 의미하는 irrational number와 관련이 있다. 즉, irrational number를 무리수라고 번역하였으므로 irrational expression은 무리식이라고 번역하는 것이다.

이때 irrational에는 '비이성적인'이라는 뜻도 있고 '비(ratio)로 나타낼 수 없는'이라는 뜻도 있다. 고대 그리스에서 수는 무리수 발견 전까지는 자연수와 두 자연수의 비(ratio)로 나타내어지는 유리수를 의미했고, 무리수가 발견되었을 당시 무리수는 두 자연수의 비(ratio)로 나타낼 수 없는 비이성적이고 이치에 맞지 않은 수로 인식되었기에 rational의 반의어인 irrational을 사용하여 irrational number라고 한 것으로 보인다.

개념

무리수와 무리식은 어떤 관계가 있나요?

무리수는 유리수가 아닌 실수(예: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π)를 말한다. 무리식은 근호 안에 문자가 들어 있는 식들 가운데, 근호를 없애 유리식으로 바꿀 수 없는 식을 말한다. 따라서 무리수와 무리식은 서로 다른 개념이다. 식에 무리수가 들어 있다고 해서 곧바로 무리식이 되는 것은 아니다.

예를 들어 $x+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}x$ 처럼 근호 안에 문자가 없고 단지 무리수가 계수나 상수로 포함된 식은 무리식이 아니다. 반면

$$\sqrt{x}, \qquad \sqrt{x+4}, \qquad \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \qquad \sqrt{x^2-4}$$

과 같이 근호 안에 문자가 들어 있으며 그 근호를 없애서 유리식으로 나타낼 수 없는 식들은 무리식이다.

개념

무리식을 계산할 때 어떤 제곱근의 성질을 쓰나요?

무리식의 계산은 제곱근의 기본 성질을 이용하여 진행한다. 아래 성질들은 모두 근호 안의 값이 0 이상이고, 분모에 있는 근호는 0이 되지 않도록 한다는 전제에서 사용한다.

❶ $\sqrt{a^2}=|a|, \qquad (\sqrt{a})^2=a$

❷ $a>0,\ b>0$일 때 곱셈과 나눗셈의 성질은 다음과 같다.

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}, \qquad \sqrt{a^2b}=a\sqrt{b},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}.$$

위 성질들을 이용하면 근호를 밖으로 꺼내거나, 분모의 근호를 없애는 등 무리식을 간단히 정리할 수 있다.

개념

분모에 근호가 있는 무리식은 어떻게 간단히 하나요?

무리식의 계산은 무리수의 계산과 같은 방법으로 한다. 특히, 분모에 근호가 있을 때는 유리화를 하여 분모의 근호를 없앤다. 유리화는 분모의 켤레식을 곱해 차의 제곱 공식

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a+b}\times\frac{a-b}{a-b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}$$

을 이용하는 방법이다.

예를 들어 무리식을 다음과 같이 유리화 할 수 있다.

예 1 분모가 $\sqrt{x}+1$인 경우

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1^2}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \quad (x\geq 0,\ x\neq 1).$$

예 2 분모가 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$인 경우

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\sqrt{x+2}-\sqrt{x} \quad (x\geq 0).$$

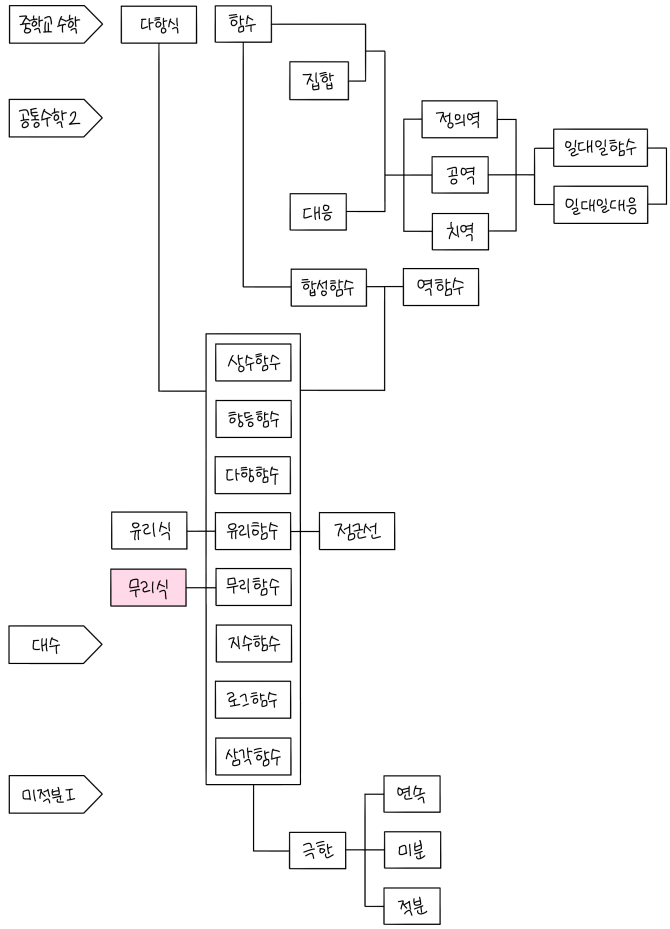
계산과정에서는 근호 안이 0 이상이 되도록 하고, 분모가 0이 되지 않는 범위를 함께 확인한다.

개념

무리식과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

무리식은 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 유리함수, 점근선, 무리함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값,

일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수, 로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩 짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라 한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y)=x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 **필요충분조건**은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 **항등함수**, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 **다항함수**, $f(x)$가 x에 대한 **유리식**인 함수를 **유리함수**, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 **무리식**인 함수를 **무리함수**라 한다. 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 **점근선**은 직선 $x=a$와 직선 $y=c$이다. 그 이외에도 **지수함수**, **로그함수**, **삼각함수**라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 **극한**, **연속**, **미분**, **적분** 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

무리함수無理函數; irrational function

정의

무리함수는 무엇인가요?

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 **무리함수**라고 한다.

무리함수에서 정의역이 주어져 있지 않은 경우에는 근호 안에 있는 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

개념

무리함수의 정의역은 어떻게 구하나요?

무리함수에서 정의역이 주어져 있지 않은 경우에는 근호 안에 있는 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다. 즉, $f(x)=\sqrt{g(x)}$와 같은 꼴이면 $g(x)\geq 0$을 만족하는 모든 실수가 정의역이다.

또한 근호 $\sqrt{g(x)}$가 분모에 있을 때는 분모가 0이 되어서는 안 되므로 $g(x)>0$이 되도록 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

함수 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x+4}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$는 모두 무리함수이다. 각 무리함수의 정의역을 살펴보자.

❶ 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 근호 안 x가 0 이상이어야 하므로 정의역은 $\{x \mid x\geq 0$인 실수$\}$이다.

❷ 무리함수 $y=\sqrt{x+4}$의 근호 안 $x+4$가 0 이상이어야 하므로 정의역은 $\{x \mid x\geq -4$인 실수$\}$이다.

❸ 무리함수 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$는 분모에 근호가 있으므로 $x-1$이 0보다 커야 한다. 따라서 정의역은 $\{x \mid x>1$인 실수$\}$이다.

의미

무리함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

무리함수(**無理函數**)는 글자 그대로 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리(**無理**)식인 함수(**函數**)를 의미한다. 이때 무리식은, 무리수가 두 정수의 비의 꼴 즉, 분수의 꼴로

나타낼 수 없는 수인 것처럼, 근호 안에 수 이외의 문자를 포함하고 있는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 즉, 분모와 분자가 모두 다항식인 분수식의 꼴로 나타낼 수 없는 식을 의미한다.

無	理	函	數
없을 무	이치 리	상자 함	셈(수) 수

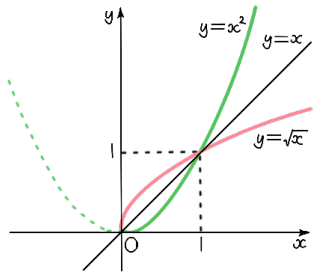
무리함수를 영어로는 irrational function이라고 한다. irrational에 '무리의'라는 뜻이 있으므로, irrational number와 irrational expression이 각각 무리수와 무리식으로 번역되는 것처럼, irrational function은 글자 그대로 무리함수라고 번역된다.

이때 irrational에는 '비이성적인'이라는 뜻도 있고 '비(ratio)로 나타낼 수 없는'이라는 뜻도 있다. 고대 그리스에서 수는 무리수 발견 전까지는 자연수와 두 자연수의 비(ratio)로 나타내어지는 유리수를 의미했고, 무리수가 발견되었을 당시 무리수는 두 자연수의 비(ratio)로 나타낼 수 없는 비이성적이고 이치에 맞지 않은 수로 인식되었기에 rational의 반의어인 irrational을 사용하여 irrational number라고 한 것으로 보인다.

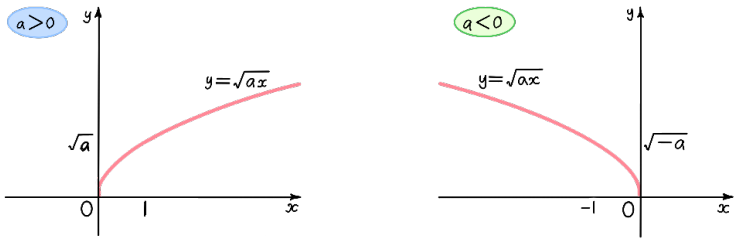
개념

함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq 0)$의 그래프는 어떻게 그릴 수 있나요?

무리함수 $y=\sqrt{x}$는 정의역을 $x\geq 0$으로 제한하면, 정의역의 서로 다른 원소가 치역의 서로 다른 원소에 대응한다. 즉, 이 함수는 정의역과 치역 사이에서 일대일대응을 이루므로 역함수가 존재한다. 실제로 식 $y=\sqrt{x}$에서 x와 y의 위치를 바꾸어 정리하면 $y=x^2\ (x\geq 0)$을 얻고, 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.



이 성질을 이용하면 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프도 쉽게 이해할 수 있다. 먼저 $a>0$일 때에는 $ax\geq 0$이 되어 정의역이 $x\geq 0$이고, $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 기본형 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축 방향으로 늘이거나 줄인 것과 같은 형태가 된다. 반대로 $a<0$이라면 $ax\geq 0$을 만족하기 위해 $x\leq 0$이어야 하므로, 정의역은 $x\leq 0$이 된다.



또한 양변을 제곱하여 x에 관해 정리하면

$$y^2=ax \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{a}y^2$$

이므로, 역함수는 $y=\frac{1}{a}x^2$의 형태로 나타난다. 따라서 $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 이 역함수의 그래프를 직선 $y=x$에 대칭이동한 곡선으로 이해할 수 있다.

개념

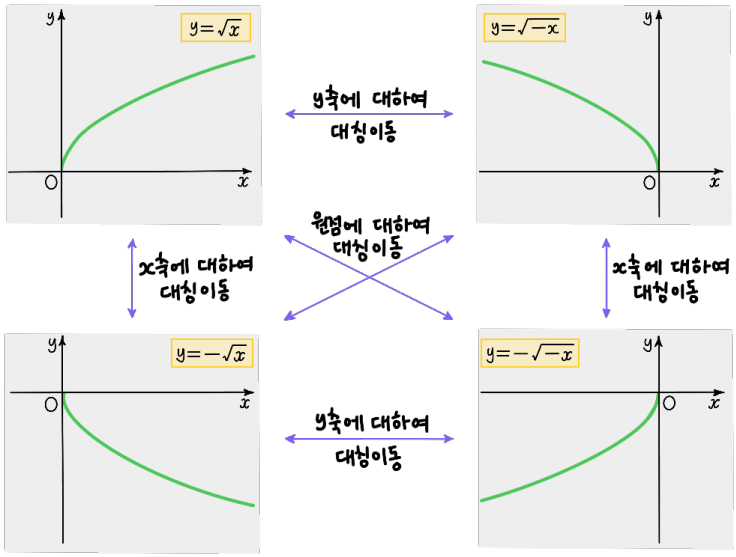
무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 어떤 대칭성을 가지나요?

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 $x\geq 0$에서 정의되며, 이 그래프를 기준으로 여러 가지 대칭이동을 생각할 수 있다. 이러한 대칭이동을 이용하면 $\sqrt{x}$에 음수가 붙거나, x의 부호가 바뀐 형태의 무리함수들의 그래프도 쉽게 얻을 수 있다.

먼저 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{-x}$의 그래프가 된다. 이 함수는 $-x\geq 0$, 즉 $x\leq 0$에서만 정의되므로, 그래프는 y축의 왼쪽 영역에 나타난다.

다음으로 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대칭이동하면 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 얻는다. 이 함수는 $x\geq 0$에서 정의되고, 그래프는 x축 아래쪽에 놓인다.

마찬가지로 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축에 다시 대칭이동하면 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프가 된다. 이 경우 정의역은 $x\leq 0$이며, 그래프는 x축 아래쪽에 나타난다.



이 네 그래프는 서로 x축, y축, 또는 원점에 대하여 대칭이 되는 관계를 이루며, 기본형 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 다양한 축에 대칭이동하여 얻을 수 있다. 이를 통해 $y=\pm\sqrt{x}$, $y=\pm\sqrt{-x}$와 같은 무리함수의 그래프를 손쉽게 그릴 수 있다.

개념

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq 0)$의 그래프는 어떻게 그릴 수 있나요?

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 알고 있으면, 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 평행이동과 내부식의 변화만으로 쉽게 얻을 수 있다.

먼저 무리식 $\sqrt{ax+b}$를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right)}+c.$$

따라서 $\sqrt{ax+b}$는 $\sqrt{ax}$의 그래프를 x축 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼 이동한 형태이며, 전체 식 $y=\sqrt{ax+b}+c$는 여기에 y축 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프임을 알 수 있다.

정의역과 치역

무리함수는 근호 안의 식이 0 이상이어야 하므로

$$ax+b\geq 0$$

를 만족하는 모든 실수가 정의역이 된다. 이때 a의 부호에 따라 정의역이 달라진다.

❶ $a>0$일 때

$$ax+b\geq 0 \iff x\geq -\frac{b}{a}.$$

따라서 정의역은 $\left\{x \middle| x\geq -\frac{b}{a}\right\}$이다. 근호의 값은 항상 0 이상이므로

$$y\geq c$$

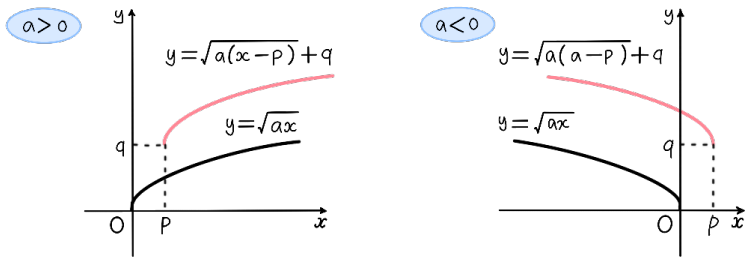
이 되어 치역은 $\{y \mid y\geq c\}$이다.

❷ $a<0$일 때

$$ax+b\geq 0 \iff x\leq -\frac{b}{a}.$$

따라서 정의역은 $\left\{x \middle| x\leq -\frac{b}{a}\right\}$이다. 근호의 값은 0 이상인 점은 동일하므로 치역은 마찬가지로 $\{y \mid y\geq c\}$이 된다.

즉, 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 기본형 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축 방향으로 c만큼 평행이동한 형태이며, 정의역과 치역은 위와 같이 a의 부호에 따라 결정된다.

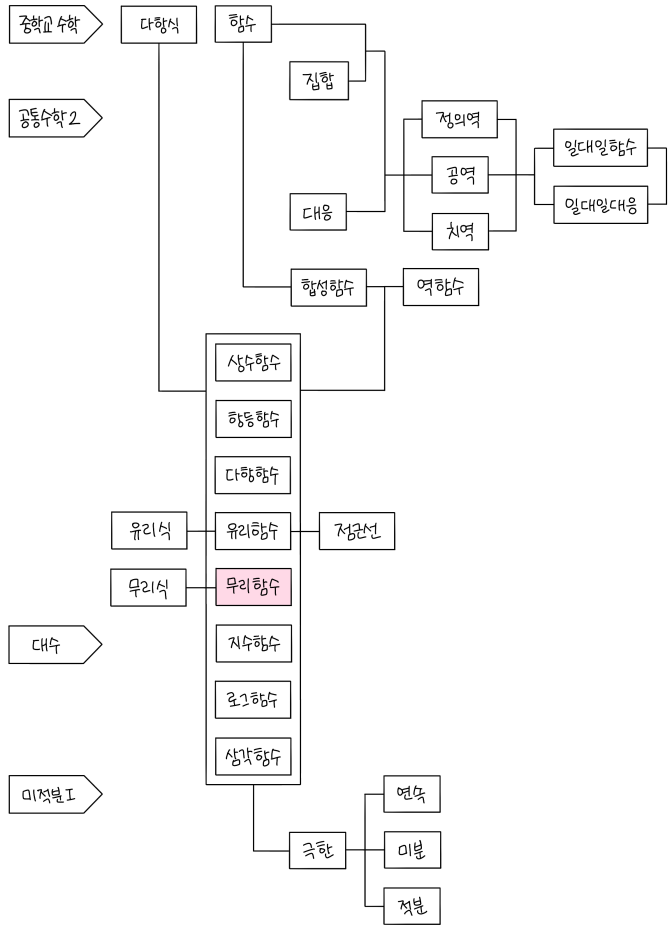


개념

무리함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

무리함수는 집합, 원소, 부분집합, 필요충분조건, 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리식, 무리식, 유리함수, 점근선 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 함수, 함숫값, 일차함수, 이차함수 뿐 아니라 〈대수〉, 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다루는 지수함수,

로그함수, 삼각함수 및 이들 함수의 극한, 연속, 미분, 적분 등 함수로 표현되는 거의 모든 수학 용어 및 개념과 관련이 있다.



〈중학교 수학〉에서 한 변수의 값이 변함에 따라 다른 변수의 값이 하나씩 정해지는 두 변수 사이의 관계로 정의한 바 있는 함수는 **정의역**의 각 **원소**에 **공역**의 원소를 꼭 하나씩 짝지어주는 **대응**으로 보다 형식적으로 다시 한 번 정의된다. 이때 공역의 **부분집합**으로서 모든 함숫값들의 **집합**을 그 함수의 **치역**이라 한다.

두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 f의 치역이 Y의 부분집합이면 이들 두 함수로 만든 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$를 생각할 수 있다.

한편 치역의 각 원소(함숫값)에 대하여 그 값을 함숫값으로 가지는 정의역의 원소가 꼭 하나 존재하는 함수 즉, 정의역의 임의의 서로 다른 원소에 서로 다른 함숫값을 대응시키는 함수를 **일대일함수**라 하고, 일대일함수 중에서 치역이 공역과 같은 함수를 **일대일대응**이라 한다. 일대일대응은 정의역의 각 원소에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응될 뿐 아니라 공역의 각 원소에 정의역의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 함수이다. X에서 Y로의 함수 $y=f(x)$가 일대일대응이면 그 **역함수** 즉, $f^{-1}(y)=x$인 Y에서 X로의 함수가 존재한다. 어떤 함수가 역함수를 갖기 위한 **필요충분조건**은 그 함수가 일대일대응인 것이다. 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 하나의 상수인 함수를 **상수함수**, $f(x)$가 x 그 자신인 함수를 **항등함수**, $f(x)$가 x에 대한 다항식인 함수를 **다항함수**, $f(x)$가 x에 대한 **유리식**인 함수를 **유리함수**, $f(x)$가 근호 안에 x에 대한 식을 포함하고 있는 x에 대한 **무리식**인 함수를 **무리함수**라 한다. 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 **점근선**은 직선 $x=a$와 직선 $y=c$이다. 그 이외에도 **지수함수**, **로그함수**, **삼각함수**라 불리는 다양한 함수들이 존재한다. 이들 함수 그 자체뿐 아니라 이들 함수의 **극한**, **연속**, **미분**, **적분** 등을 활용하면 다양한 현상에서 나타나는 여러 문제들을 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다. 이에 대한 내용은 〈대수〉와 〈미적분I〉, 〈미적분II〉에서 다룬다.

대수

머 리 말

이 자료는 2022 개정 교육과정의 〈대수〉에서 다루는 다음의 수학 용어들을 설명하고 안내하기 위해 마련되었습니다.

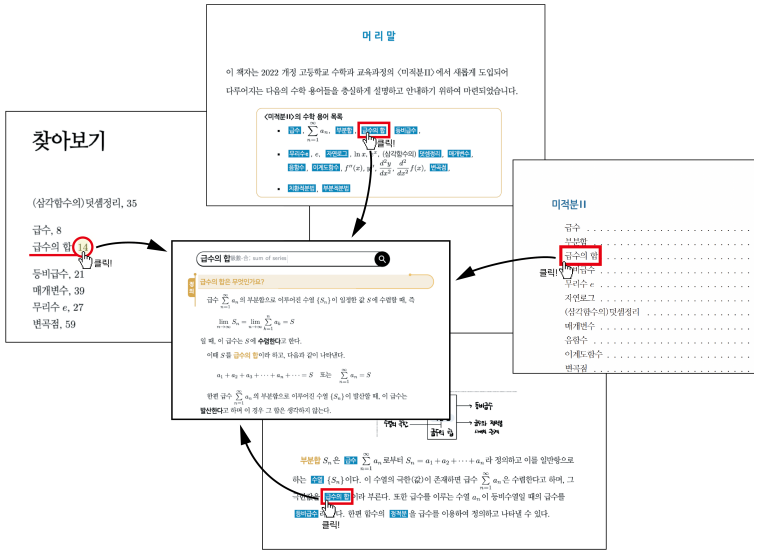
〈대수〉의 수학 용어 목록

- 거듭제곱근, 지수, 로그, (로그의) 밑, 진수, 상용로그, 지수함수, 로그함수,
- 시초선, 동경, 일반각, 호도법, 라디안, 주기, 주기함수, 삼각함수, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 사인법칙, 코사인법칙,
- 수열, 항, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법

각 수학 용어에 대한 설명/안내 자료를 찾아가는 방법은 다음과 같습니다.

용어 설명 찾아가는 방법

(방법1) 위 목록의 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법2) [차례]에 있는 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법3) 맨 뒤 [찾아보기]에 있는 용어 옆 숫자(쪽수)를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법4) 자료 본문에서 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.



고등학생이 각 수학 용어를 이해하는 과정에서 자연스럽게 제기할 수 있는 질문 및 교사가 고등학생의 수학적 사고를 유도하기 위해 제기할 수 있는 질문을 중심으로 묻고 답하는 문답 방식으로 자료를 구성하였습니다. 이 자료가 고등학교 수학 용어 및 관련 학습 내용에 대하여 학생 스스로 질문을 던지고 질문에 대한 답을 탐색하는 습관을 형성하는데 기여하고, 수학 교사가 학생의 이런 습관 형성과 의미 있는 수학적 사고 활동을 안내하는 데 활용되기를 바랍니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점

이 자료는 고등학생이 각 수학 용어를 정확하고 명료하게 이해하기 위해 필요한 용어의 뜻(정의), 표현, 구체적인 예 등의 기본적인 내용 뿐 아니라 더 알아보기 질문을 통해 그 용어에 대한 고등학생의 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용, 더 나아가 용어 관련 다양한 참고 자료와 대학 수준의 보다 심화 확장된 내용까지 심화(참고)를 통해 폭넓게 다루고자 하였습니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점을 살펴보면 다음과 같습니다.

[자료의 짜임새]

	기본	더 알아보기	심화(참고)
내용	고등학생의 수학 용어에 대한 정확하고 명료한 이해에 필요한 정의, 의미, 예 등의 기본 내용으로 구성	고등학생의 수학 용어에 대한 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용으로 구성	대학 수준의 심화 학습을 원하는 고등학생, 수업을 준비하는 교사(혹은 예비교사)를 위한 [기본]과 [더 알아보기]의 내용을 더욱 심화한 내용 및 참고 자료로 활용 가능한 내용으로 구성
특징	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 모든 내용이 용어가 도입되는 과목 교육과정의 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 범위를 벗어날 수 있음. 단, 설명에 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙은 해당 과목 교육과정 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용 및 이때 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어날 수 있음

[자료의 활용]

고등학생	수학 용어에 대한 교과서 중심의 기본적이고 핵심적인 의미와 내용을 이해를 원하는 학생은 기본에 해당하는 내용을 읽고 공부하면 됩니다. 기본에 해당하는 내용을 토대로 좀 더 깊이 있는 이해를 원하는 학생은 더 알아보기의 내용을 읽으면 도움이 될 수 있습니다. 심화(참고)의 내용은 참고 자료로서 "아, 이런 내용도 있구나." 정도로 이해하거나, 읽지 않아도 됩니다.
(예비)교사	기본에 해당하는 내용은 모든 학생에게 가르쳐야 할 내용입니다. 더 알아보기와 심화(참고)의 내용은 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정 범위를 벗어난 학생의 질문에 답하거나 심화 탐구 활동 자료로 활용 가능합니다.

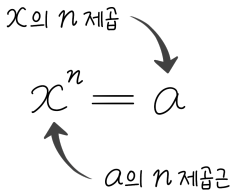
[활용 시 유의점]

더 알아보기와 심화(참고)의 내용 중에는 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어나는 내용이 포함되어 있습니다. 특히 심화(참고)의 내용은 대학 학부 수준의 내용을 포함하기도 합니다. 그러므로 고등학교 수학 교사가 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용할 때는 신중한 주의가 필요합니다. 특히 평가에 교육과정의 범위를 벗어나는 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용하지 않도록 유의할 필요가 있습니다.

거듭제곱근 거듭제곱根; radical root

정의

거듭제곱근이 무엇인가요?



실수 a와 자연수 $n(n \geq 2)$에 대하여 n 제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n = a$$

의 근 x를 a의 n제곱근이라 한다. 이 때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, ...을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라고 한다.

0이 아닌 실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 있음이 알려져 있다. 이중 실수인 것은 기호 $\sqrt[n]{\ }$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

a의 실수인 n제곱근

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

1 8의 세제곱근

8의 세제곱근은 세제곱하여 8이 되는 수로서, 복소수 범위에서 3개가 있다. 8의 세제곱근을 x라 하면, $x^3 = 8$이므로

$$x^3 - 8 = 0, \quad (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

이다. 이로부터 복소수 범위에서 3개의 8의 세제곱근

$$2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$$

를 얻는다. 이 중 실수인 8의 세제곱근은

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

이다.

❷ -8의 세제곱근

-8의 세제곱근은 세제곱하여 8이 되는 수로서, 복소수 범위에서 3개가 있다. -8의 세제곱근을 x라 하면, $x^3 = -8$이므로

$$x^3 + 8 = 0, \quad (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

이다. 이로부터 복소수 범위에서 3개의 -8의 세제곱근

$$-2, \quad 1 + \sqrt{3}i, \quad 1 - \sqrt{3}i$$

를 얻는다. 이 중 실수인 -8의 세제곱근은

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

이다.

❸ 81의 네제곱근

81의 네제곱근은 네제곱하여 81이 되는 수로서, 복소수 범위에서 4개가 있다. 81의 네제곱근을 x라 하면, $x^4 = 81$이므로

$$x^4 - 81 = 0, \quad (x^2+9)(x^2-9) = 0, \quad (x+3)(x-3)(x^2+9) = 0$$

이다. 이로부터 복소수 범위에서 4개의 81의 네제곱근

$$3, \quad -3, \quad 3i, \quad -3i$$

를 얻는다. 이 중 실수인 81의 세제곱근은

$$\sqrt[4]{81} = 3, \quad -\sqrt[4]{81} = -3$$

이다.

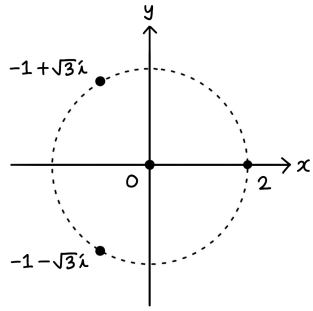
더 알아보기

거듭제곱근을 시각적으로 나타낼 수도 있나요?

거듭제곱근은 좌표평면에서 중심이 원점인 원 위의 점들로 나타낼 수 있다.

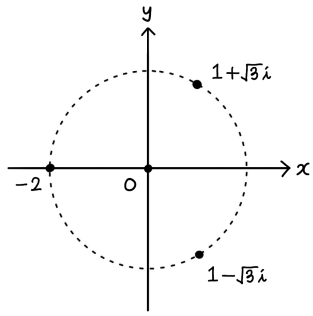
❶ 8의 세제곱근

8의 세제곱근은 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 세 개의 점으로 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이들 세 개의 점을 선분으로 차례로 이으면 원에 내접하는 정삼각형이 된다.



❷ −8의 세제곱근

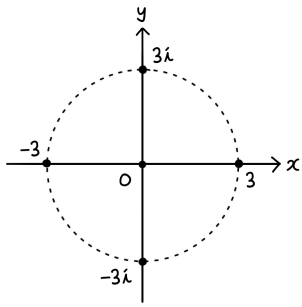
−8의 세제곱근도 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 세 개의 점으로 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이들 세 개의 점을 선분으로 차례로 이으면 원에 내접하는 정삼각형이 된다.



❸ 81의 네제곱근

81의 네제곱근은 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 네

개의 점으로 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이들 네 개의 점을 선분으로 차례로 이으면 원에 내접하는 정사각형이 된다.



이처럼 일반적으로 실수 a의 n제곱근은 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt[n]{|a|}$인 원 위의 n개의 점으로 나타낼 수 있고, 이때 n개의 점들을 선분으로 차례로 이으면 원에 내접하는 정n각형이 된다.

의미

거듭제곱근이라는 용어의 뜻과 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

'거듭제곱'은 '자기자신을 거듭(반복)해서 곱한다'는 뜻을 지닌 순우리말 용어이다. 그러므로 a의 거듭제곱근은 자기자신을 거듭(반복)하여 곱한 결과가 a가 되게 하는 수를 의미한다. 거듭제곱근을 영어로 radical root라 하고, n제곱근은 nth root라 한다. 이때 root는 거듭제곱의 결과를 만들어 내는 근원 또는 뿌리라는 의미를 지닌다.

의미

거듭제곱근의 기호는 누가 처음 사용하였나요?

제곱근을 나타내는 근호 $\sqrt{}$는 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)가 처음으로 사용하였고, 거듭제곱근을 나타내는 기호 $\sqrt[n]{}$는 1690년 롤(Rolle, M., 1652~1719)이 사용하기 시작하였다.

개념

거듭제곱근의 성질에는 어떤 것이 있나요?

양수의 거듭제곱근 중 양의 실수인 거듭제곱근에 대하여 다음 성질이 성립한다. 즉, $a>0$, $b>0$이고 m, n이 자연수일 때

❶ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ❷ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

❸ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ ❹ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

이 성립한다.

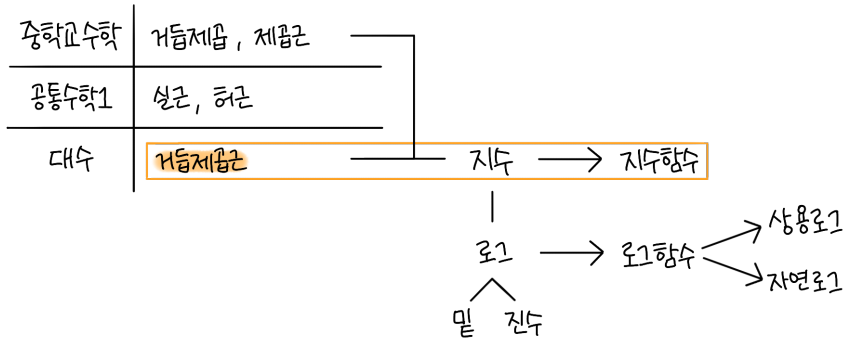
다시 말해서 두 양의 실수 a, b와 자연수 m, n에 대하여 다음이 성립한다. 첫째로 a와 b의 양의 n제곱근을 각각 구한 뒤 그 둘을 곱하거나 나눈 결과는, a와 b를 먼저 곱하거나 나눈 뒤 그 수의 양의 n제곱근을 구한 결과와 각각 같다. 또한, 어떤 양의 실수 a의 양의 n제곱근을 m제곱한 결과는, a를 먼저 m제곱한 뒤 그 수의 양의 n제곱근을 구한 결과와 같다. 마지막으로 어떤 양의 실수 a에 대하여, a의 양의 n제곱근의 양의 m제곱근은 a의 양의 m제곱근의 양의 n제곱근과 같다.

이것은 양의 실수의 거듭제곱근을 찾는 연산과 두 양의 실수를 곱하는 연산, 거듭제곱근을 찾는 연산과 나누는 연산, 거듭제곱근을 찾는 연산과 거듭제곱 연산은 각각 서로 순서를 바꾸어도 무방하고, 잇달은 여러 번의 거듭제곱근 연산 역시 순서를 바꾸어도 무방함을 의미한다.

개념

거듭제곱근과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

거듭제곱근은 〈중학교 수학〉에서 다루는 거듭제곱과 지수(자연수) 및 제곱근, 〈공통수학1〉에서 다루는 방정식의 실근과 허근 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 정수 이상인 지수(정수, 유리수, 실수), 지수함수, 로그함수 등의 용어 및 개념과도 밀접한 관련이 있다.



실제로 어떤 양의 실수 a의 거듭제곱근은 **거듭제곱**하여 그 수 a가 되게 하는 수로서 중학교 수학에서 다루는 **제곱근**을 포함하여 세제곱근, 네제곱근, ..., n제곱근, ...이 있다. 이때 a의 n제곱근은 방정식 $x^n = a$의 근으로서 **실근**과 **허근**을 포함하여 n개가 있음이

알려져 있다. 한편 어떤 수 a 자신을 여러(n) 개 곱한 거듭제곱 a^n은 **지수** n이 자연수인 경우로부터 시작하여 정수(0과 음의 정수 포함)인 경우, 유리수(정수가 아닌 유리수 포함)인 경우, 실수(무리수 포함)인 경우로 확장되며, 이를 통해 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 **지수함수** $y=a^x$를 실수인 지수 x에 a^x의 값을 대응시키는 함수로 정의하고, 그 역함수로 **로그함수**를 정의할 수 있게 된다. 특히 지수가 유리수인 경우 즉, $a^{\frac{m}{n}}$(m은 정수, n은 양의 정수)은 a^m의 n제곱근인 $\sqrt[n]{a^m}$이나 a의 n제곱근의 m제곱인 $\sqrt[n]{a}^m$으로 정의한다.

심화(참고)

● 0이 아닌 실수의 n제곱근 n개는 어떤 수이고 어떻게 찾나요?

양의 실수 1의 n제곱근을 찾아보자. 1의 n제곱근을 x라 하면 $x^n=1$이 성립한다. 이 방정식의 한 복소수의 근은 $\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$인데, 실제로 드무아브르 정리 $[(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx]$에 의해

$$\alpha^n=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

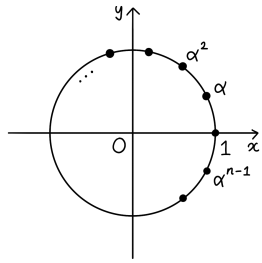
이다. 또, $1\le k\le n-1$이면

$$(\alpha^k)^n=(\alpha^n)^k=1^k=1$$

이므로 $x^n=1$의 근 즉, 1의 n제곱근은

$$1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1}$$

이다. 이 수들은 점 $(1,0)$을 포함하여 중심이 원점인 단위원을 n등분하는 점들로 나타내어진다.



이때 n이 짝수이면 -1 역시 방정식 $x^n=1$의 근이므로 이들 점 중에는 점 $(-1,0)$이 포함된다. 그러나 n이 홀수이면 점 $(1,0)$ 이외에 y좌표가 0인 점은 없다. 결국 1의 n제곱근 중에서 실수인 것은 n이 짝수일 때는 $1,-1$의 두 개이고, n이 홀수일 때는 1 한 개뿐이다.

지수指數; index

정의

지수가 무엇인가요?

n이 자연수일 때, n개의 실수 a를 서로 곱한 것을 a의 n제곱이라 하고

$$a^n$$

으로 나타낸다. $n=1$일 때는 $a^1=a$로 나타낸다. 이때 a, a^2(a의 제곱), a^3(a의 세제곱), ..., a^n(a의 n제곱), ...을 통틀어 a의 거듭제곱이라 하고, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 **지수**라고 한다.

a^n은 지수 n이 자연수인 경우로부터 시작하여 정수(0과 음의 정수 포함)인 경우, 유리수(정수가 아닌 유리수 포함)인 경우, 실수인 경우(무리수 포함)로 확장된다.

❶ 지수가 정수인 경우,

지수가 0인 경우와 음의 정수인 경우에는 거듭제곱의 역수를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

0 또는 음의 정수 지수

$a\neq 0$이고 n이 자연수일 때

$$a^0=1,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

❷ 지수가 유리수인 경우,

지수가 유리수인 경우에는 거듭제곱의 거듭제곱근을 이용하여 다음과 같이 정의한다.

유리수 지수

$a>0$이고 m이 정수, n이 2 이상의 자연수일 때

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad \text{특히}\quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

❸ 지수가 실수인 경우,

지수가 유리수가 아닌 실수 즉, 무리수인 경우에는 그 무리수에 한없이 가까워지는 유리수를 이용하여 정의한다. 예를 들어 무리수 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ 에 한없이 가까워지는 유리수

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \ldots$$

을 각각 지수로 하는 3의 거듭제곱

$$3^{1},\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \ldots$$

은 어떤 일정한 수에 한없이 가까워진다는 것이 알려져 있다. 이 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$ 으로 정의한다. 이와 같은 방법을 이용하면 $a>0$ 일 때 임의의 무리수 x 에 대해서도 a^{x} 을 정의할 수 있다.

예 구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 지수가 정수인 경우

$$2^{0}=1,\qquad (-2)^{0}=1,$$

$$2^{-3}=\frac{1}{2^{3}}=\frac{1}{8},\qquad (-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^{3}}=-\frac{1}{8}$$

❷ 지수가 유리수인 경우

$$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2,\qquad 8^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}=\frac{1}{4}$$

❸ 지수가 실수인 경우

$\sqrt{2}=1.4142\cdots$ 이므로, $3^{\sqrt{2}}$ 는

$$3^{1}<3^{1.4}<3^{1.41}<3^{1.414}<\cdots<3^{\sqrt{2}}<\cdots<3^{1.415}<3^{1.42}<3^{1.5}<3^{2}$$

을 만족하며, 그 값은 약 $4.728\cdots$ 이다.

의미

지수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

지수(指數)에서 지(指)는 '가리키다', 수(數)는 '수'를 뜻하므로, 지수(指數)는 곱해진 수의 개수를 가리키는(指) 수(數)라는 의미를 지닌다.



영어 exponent는 '밖에 놓다(위치시킨다)'를 뜻하는 라틴어 exponere가 어원으로서, 곱해진 수의 개수를 나타내는 숫자를 곱하는 수의 밖(오른쪽 위)에 위치시킨다는 것으로 해석할 수 있다.

개념

지수의 성질에는 어떤 것이 있나요?

지수가 자연수일 때, 임의의 실수의 거듭제곱에 대하여 다음의 지수법칙이 성립한다.

a, b가 임의의 실수이고 m, n이 양의 정수일 때

❶ $a^m a^n = a^{m+n}$

❷ $(a^m)^n = a^{mn}$

❸ $(ab)^n = a^n b^n$

❹ $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ $(a \neq 0)$

위 지수법칙은 지수가 정수인 경우, 유리수인 경우, 실수인 경우에도 거의 유사하게 성립한다.

❶ 지수가 정수인 경우,

$a \neq 0$, $b \neq 0$이고 m, n이 정수일 때

❶ $a^m a^n = a^{m+n}$ ❷ $(a^m)^n = a^{mn}$

❸ $(ab)^n = a^n b^n$ ❹ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

❷ 지수가 유리수인 경우,

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 유리수일 때

❶ $a^m a^n = a^{m+n}$ ❷ $(a^m)^n = a^{mn}$

❸ $(ab)^n = a^n b^n$ ❹ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

❸ 지수가 실수인 경우,

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 실수일 때

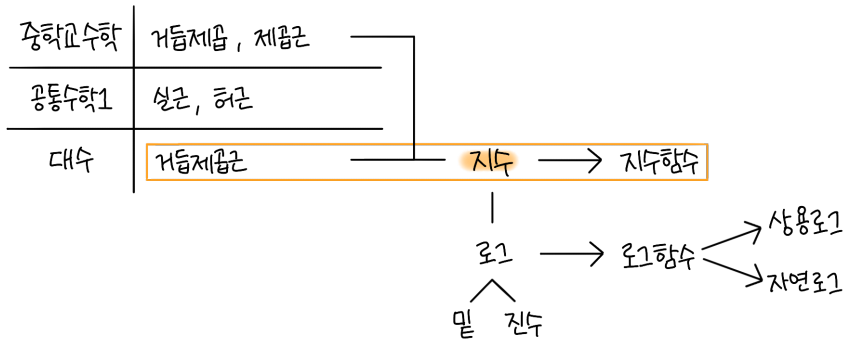
❶ $a^m a^n = a^{m+n}$ ❷ $(a^m)^n = a^{mn}$

❸ $(ab)^n = a^n b^n$ ❹ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

개념

지수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

지수는 〈중학교 수학〉에서 다루는 거듭제곱과 그때의 지수, 〈공통수학1〉에서 다루는 방정식의 실근과 허근 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 지수함수, 로그함수 등의 용어 및 개념과도 밀접한 관련이 있다.



실수 a 자신을 여러(n) 개 곱한 거듭제곱 a^n은 **지수** n이 자연수인 경우로부터 시작하여 정수(0과 음의 정수 포함)인 경우, 유리수(정수가 아닌 유리수 포함)인 경우, 실수(무리수 포함)인 경우로 확장되며, 이를 통해 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 **지수함수** $y=a^x$를 실수인 지수 x에 a^x의 값을 대응시키는 함수로 정의하고, 그 역함수로 **로그함수**를 정의한다. 특히 지수가 유리수인 경우는 **거듭제곱근**을 이용하여 정의하는데, 실제로 $a^{\frac{m}{n}}$(m은 정수, n은 양의 정수)은 a^m의 n제곱근인 $\sqrt[n]{a^m}$이나 a의 n제곱근의 m제곱인 $\sqrt[n]{a}^m$

으로 정의한다. 이때 양의 실수 a의 거듭제곱근은 **거듭제곱**하여 그 수 a가 되게 하는 수로서 중학교 수학에서 다루는 **제곱근**을 포함하여 세제곱근, 네제곱근, ..., n제곱근, ...이 있다. 실수 a의 n제곱근은 방정식 $x^n = a$의 근으로서, a가 0이 아닌 경우 실근과 허근을 포함하여 n개가 있음이 알려져 있다.

심화(참고)

- **$a \neq 0$일 때 $a^0 = 1$입니다. 그럼 0^0의 값도 1인가요?**

  수학에서 0^0은 통상 정의하지 않는다. 왜 0^0을 하나의 실수로 정하지 않는지 지수법칙을 통해 살펴보자.

  $a \neq 0$일 때 임의의 두 정수 n과 m에 대하여 지수법칙

  $$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

  이 성립한다. 이를테면,

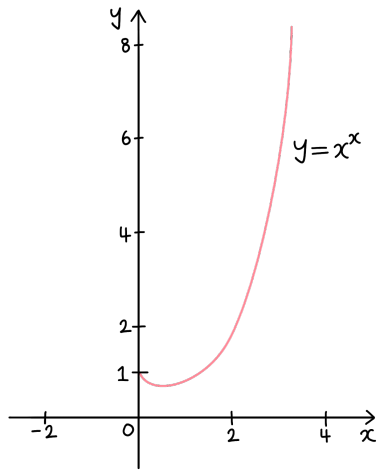
  $$1 = a^0 = a^{1-1} = a^1 a^{-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$$

  이다.

  그런데 여기서 만약 $a = 0$이고 0^0의 값을 하나의 실수로 정하게 되면,

  $$0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0}$$

  과 같은 무의미한 식을 얻게 된다. 이처럼 0^0을 정의하게 되면 그 순간 지수법칙을 잃게 된다. 즉, 0^0의 정의와 지수법칙은 양립할 수 없다. 그럼에도 불구하고 $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$이라는 점에서 컴퓨터나 공학에서는 $0^0 = 1$로 정하는 경우도 있지만, 수학에서는 통상 0^0을 정의하지 않는다.



로그로그; logarithm , **밑**밑; base , **진수**眞數; antilogarithm

정의

로그(밑, 진수)는 무엇인가요?

$a > 0$, $a \neq 1$일 때, 양수 N에 대하여

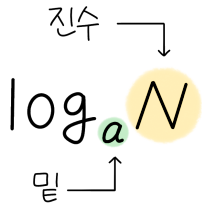
$$a^x = N$$

을 만족하는 실수 x는 단 하나 존재한다. 이 수 x를

$$x = \log_a N$$

으로 나타내고, a를 **밑**으로 하는 N의 **로그**라고 한다.

이 때 N을 $\log_a N$의 **진수**라고 한다.



예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

1 $\log_{10} 1000$

$10^3 = 1000$이므로, $3 = \log_{10} 1000$이다.

즉, 10을 밑으로 하는 1000의 로그는 3이고, $\log_{10} 1000$의 진수는 1000이다.

2 $\log_3 \frac{1}{9}$

$3^{-2} = \frac{1}{9}$이므로, $-2 = \log_3 \frac{1}{9}$이다.

즉, 3를 밑으로 하는 $\frac{1}{9}$의 로그는 -2이고, $\log_3 \frac{1}{9}$의 진수는 $\frac{1}{9}$이다.

3 $\log_a 1$ (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

0이 아닌 임의의 실수 a에 대하여 $a^0 = 1$이므로, $0 = \log_a 1$이다.

즉, 진수가 1인 모든 로그의 값은 0이다.

개념

로그에는 어떤 성질이 있나요?

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$일 때 다음이 성립한다.

(1) $\log_a 1=0, \qquad \log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

또 $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1$일 때 다음이 성립한다.

(5) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

성질 (1)의 첫 번째 경우는 위의 예 3에서 확인했다. 성질 (1)의 두 번째 경우는 $a^1=a$로부터 곧바로 알 수 있고, 성질 (2), (3), (4)는 각각 지수법칙 $a^m a^n=a^{m+n}$, $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, $(a^m)^k=a^{mk}$을 이용하여 보일 수 있다. 그리고 성질 (5)는 다음과 같이 보이면 된다.

$\log_a b=x,\ \log_c a=y$라 하면, 로그의 정의에 의해

$$a^x=b, \qquad c^y=a$$

이므로,

$$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$$

이다. 다시 로그의 정의에 의해

$$xy=\log_c b$$

이므로

$$\log_a b\times\log_c a=\log_c b$$

이다. 따라서 양변을 $\log_c a$로 나누면 다음을 얻는다.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

이 때, $a \neq 1$이므로 $\log_c a \neq 0$이다. 따라서 주어진 등식은 성립한다.

개념

$\log_a N$에서 조건 $a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0$은 왜 필요한가요?



$\log_a N$에서 조건 $a > 0$이 왜 필요한가요?

만약 $a = 0$이라면, $\log_0 N = x$ 즉, $N = 0^x$이다. $N = 0$이면 x의 값이 무수히 많고, $N \neq 0$이면 x의 값이 존재하지 않게 되어, 그 어떤 경우도 x의 값 즉, $\log_0 N$의 값이 하나로 정해지지 않는다. 그러므로 $\log_a N$이 정의되려면 $a \neq 0$이어야 한다.

만약 $a < 0$이라면, 실수 x에 대하여 실수 $N = a^x$가 존재하지 않을 수 있다. 예를 들어 $a = -4,\ x = \frac{1}{2}$라고 하면, $N = (-4)^{\frac{1}{2}}$ 즉, $N^2 = -4$를 만족시키는 실수 N은 존재하지 않는다. 그러므로 $\log_a N$이 정의되려면 $a \geq 0$이어야 한다.

따라서 $\log_a N$이 정의되려면 $a \neq 0$인 동시에 $a \geq 0$이어야 하므로, 조건 $a > 0$이 반드시 필요함을 알 수 있다.



$\log_a N$에서 조건 $a \neq 1$이 왜 필요한가요?

만약 $a = 1$이라면, $\log_1 N = x$, $N = 1^x$이다. 여기서 $N = 2$이면 $2 = 1^x$인데, 이를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다. 더 나아가 $|N| \neq 1$인 임의의 실수 N에 대하여 $\log_1 N$의 값은 실수 중에 존재하지 않는다. 따라서 $\log_a N$이 정의되려면 $a \neq 1$이어야 한다.



$\log_a N$에서 조건 $N > 0$이 왜 필요한가요?

$a > 0,\ a \neq 1$일 때, $\log_a N = x$ 즉, $a^x = N$에서 N의 값은 임의의 실수에 대하여 항상 양수이다. 따라서 $\log_a N$이 정의되려면 조건 $N > 0$이 반드시 필요하다.

의미

로그, 밑, 진수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

(로그) 로그는 영어로 logarithm이라 한다. '계산, 비율'을 뜻하는 그리스어 logos와 '산술'을 뜻하는 arithmos의 합성어이다. 즉, 로그는 어떤 수에 일정한 수가 곱해진 비율을 나타낸다는 의미이다.

(밑) 또 로그 $\log_a b$에서 밑 a를 영어로 base라고 하는데, '디딤·받침·기초' 라는 의미의 그리스어 básis에서 출발하여 라틴어 basis를 거쳐 프랑스어 base로 전해진 뒤 영어 base로 정착하였다. 즉, 어떤 구조를 떠받치는 기초라는 의미로 수학적 연산에서 값들을 생성하는 기준(바탕) 수라는 의미이다.

(진수) 한편 진수(眞數)에서 진(眞)은 '원래', 수(數)는 '수, 셀수 있음'을 뜻한다. 즉 한자어 진수(眞數)는 원래의(眞) 수(數)라는 의미를 지닌다.



진수를 영어로는 antilogarithm이라 하는데, 이는 '대응하다' 는 의미의 접두사 anti와 '로그' 라는 의미의 logarithm의 결합어이다. 즉, 주어진 로그값에 대응하는 수를 의미한다.

개념

로그는 어디에 사용되나요?

로그는 은행에서 이자를 계산할 때, 지진의 규모를 나타낼 때, 소리의 세기를 나타낼 때, 별의 등급을 나타낼 때 등 다양한 곳에 사용된다. 예를 들어 두 개의 별의 등급과 밝기 사이에는

$$0.4 \times (\text{등급의 차}) = \log_{10}(\text{밝기의 비})$$

인 관계가 성립한다. 이에 따르면 등급의 차가 1일 때

$$0.4 \times 1 = \log_{10}(\text{밝기의 비})$$

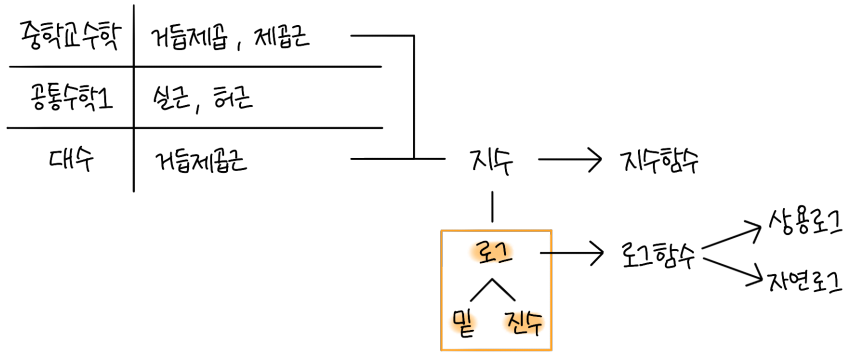
이므로 $(\text{밝기의 비}) = 10^{0.4} = 2.51\cdots$ 이다. 따라서 별의 등급이 1등급 작아질 때마다

별의 밝기는 약 2.5배 증가한다.

개념

로그(밑, 진수)와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

로그(밑, 진수)는 지수, 상용로그, 지수함수, 로그함수, 무리수 e, 자연로그 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 $a>0$, $a\neq 1$일 때, a를 **밑**으로 하는 **진수** N의 **로그** $\log_a N$은 $a^x=N$를 만족시키는 실수인 **지수** x의 값으로 정의된다. 즉, $a^x=N$이면 $\log_a N=x$이고 그 역 또한 참이다. 이런 이유로 로그의 성질은 지수의 성질로부터 자연스럽게 유도된다. 이와 마찬가지로 임의의 양의 실수 x에 대하여 실수 $\log_a x$를 대응시키는 **로그함수** $y=\log_a x$는 임의의 실수 x에 대하여 양의 실수 a^x를 대응시키는 **지수함수** $y=a^x$의 역함수로 정의된다. 한편 로그 중에서 10을 밑으로 하는 로그와 **무리수e**를 밑으로 하는 로그를 생각할 수 있는데, 이들을 각각 **상용로그**와 **자연로그**라고 부른다. 무리수 e와 자연로그는 〈미적분II〉에서 다룬다.

심화(참고)

- **로그는 누가 만들었나요?**

  로그는 네이피어(Napier, J., 1550 1617)에 만들어졌고, '로그(logarithmorum)'라는 명칭 역시 1614년에 출판한 그의 저서 『경이로운 로그 법칙의 기술(Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio)』에서 제시되었다. 이처럼 로그는 네이피어에 의해 만들어졌으나 그 기본 발상은 네이피어 이전에도 있었다. 슈티펠은 『산술총서(Arithmetica Integra(1544))』에서 다음과 같은 등차수열과 등비수열을 제시하고 등차수열에서의 덧셈이 등비수열에서의 곱셈에 대응한다는 것을 지적하였다.

등차수열	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
등비수열	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	$\cdots$

예를 들어 $3+5=8$은 $8\times 32=256$에 대응한다. 그 당시에는 지수 표시가 없었기 때문에 슈티펠은 $2^3\times 2^5=2^8$이라고 쓰지 않았지만, 위의 수를 아래의 수의 지수라고 불렀고, 수를 곱할 때 지수를 더한다는 식으로 표현하였다. 이것은 두 수의 곱의 로그는 각 수의 로그의 합과 같다는 로그의 기본 성질에 해당하는 것이다.

상용로그常用로그; common logarithm

정의

상용로그란 무엇인가요?

10을 밑으로 하는 로그를 **상용로그**라 하고, 양수 N에 대하여 상용로그 $\log_{10} N$을 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

으로 나타낸다.

우리는 일상에서 수를 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리, ... 와 같이 10의 거듭제곱을 자릿수로 사용하여 나타내는데, 이런 수의 계산에서는 10을 밑으로 하는 상용로그가 편리하다. 이런 이유로 1.00부터 9.99까지의 상용로그의 값으로 이루어진 상용로그표가 계산기나 컴퓨터 등의 공학 도구가 널리 사용되기 전까지 수치 계산의 주요 도구로 널리 사용되었으며, 현재도 여전히 사용되고 있다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$, $\log 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

❷ $\log 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$, $\log 0.01 = \log_{10} 10^{-2} = -2$

이처럼 10의 거듭제곱인 수의 상용로그의 값은 다음과 같이 쉽게 찾을 수 있다.

N	10^{-n}	$\cdots$	0.01	0.1	1	10	100	1000	$\cdots$	10^n
$\log N$	$-n$	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	n

❸ $\log \sqrt[3]{10^5} = \log 10^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$

❹ 상용로그표를 이용하면 정수 부분이 한 자리인 양수의 상용로그의 값을 구할 수 있다. 예를 들어 다음 상용로그표에서 $\log 2.18$의 값은 2.1의 가로줄과 8의 세로줄이 만나는 곳의 수인 0.3385이다. 즉,

$$\log 2.18 = 0.3385$$

이다.

상용로그표(일부)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	**.3365**	**.3385**	.3404

5 위 상용로그표에서 $\log 2.18 = 0.3385$ 임을 알았다. 이를 이용하여 $\log 21.8$ 의 값을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\log 21.8 &= \log(2.18 \times 10) \\ &= \log 2.18 + \log 10 \\ &= 0.3385 + 1 \\ &= 1.3385.\end{aligned}$$

마찬가지 방법으로 $\log 218$ 의 값을 계산하면 다음과 같다.

$$\log 218 = \log 2.18 + \log 100 = 2.3385$$

의미 **상용로그라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.**

상용(常用)로그에서 상(常)은 '항상', 용(用)은 '사용'을 뜻하므로, 상용(常用)로그는 일상적으로 항상(常) 사용(用)하는 로그라는 의미를 지닌다.



상용로그를 영어로는 common logarithm이라 한다. common에는 '보통의'라는 뜻이 있다. 즉, 일상적으로(흔히) 사용하는 보통의 로그를 의미한다.

개념 **상용로그는 어디에 쓰이나요?**

상용로그 $\log N$ 은 N 이 증가함에 따라 그 값도 증가하며

$$a \le \log N < b \iff 10^a \le N < 10^b$$

이 성립한다. 이 사실을 이용하면 지수가 큰 거듭제곱으로 나타내어진 수의 크기를

대략적으로 파악할 수 있다. 실제로 자연수 N이

$$10^n \le N < 10^{n+1}$$

이면, N은 $(n+1)$자리 자연수이다. 예를 들어 $\log 2 = 0.3010$임을 이용하여 2^{100}이 몇 자리 자연수인지 알아보면,

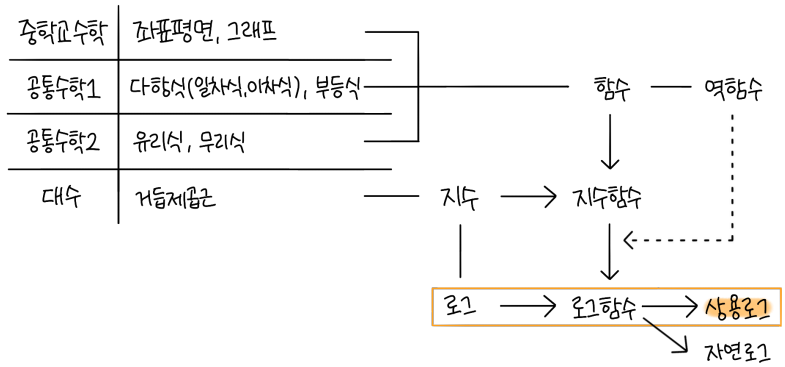
$$\log 2^{100} = 100 \log 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$$

이므로, 2^{100}은 31자리 자연수임을 알 수 있다.

개념

상용로그와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

상용로그는 지수, 로그, 지수함수, 로그함수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **상용로그**는 10을 밑으로 하는 로그로서 $10^x = N$을 만족시키는 실수인 지수 x가 바로 상용로그 $\log N$이다. 즉, $x = \log N$이다. 한편 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수로서 각 양의 실수 x에 x의 상용로그 $\log x$를 대응시키는 함수를 생각할 수 있는데, 이 함수가 바로 로그함수 $y = \log x$이다. 로그함수 $y = \log x$는 실수 전체의 집합에서 정의된 지수함수 $y = 10^x$의 역함수이다.

지수함수指數函數; exponential function

정의

지수함수란 무엇인가요?

실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$을 a를 밑으로 하는 **지수함수**라고 한다.

의미

지수함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

지수함수(**指數函數**)는 글자 그대로 지수(**指數**)가 있는 함수(**函數**)를 의미한다.

指	數	函	數
가리킬 지	셈(수) 수	상자 함	셈(수) 수

지수함수를 영어로는 exponential function이라 하는데, exponential은 '지수의'를 의미하고, function은 '함수'를 의미한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ $y = 2^x$는 2를 밑으로 하는 지수함수이다.

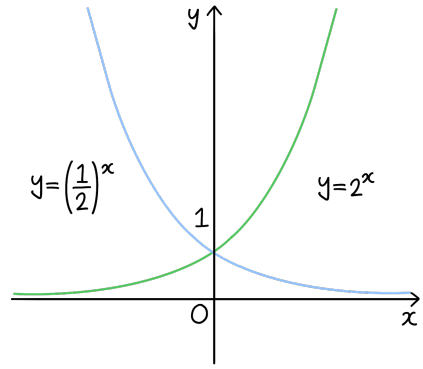
❷ $y = 2^{-x}$는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$로 바꿀 수 있으므로 $\frac{1}{2}$을 밑으로 하는 지수함수로 생각 할 수 있다.

❸ $y = (-2)^x$는 밑이 음수이므로 지수함수가 아니다. 또 $y = 1^x$는 밑이 1이므로 지수함수가 아니다.

개념

지수함수를 시각적으로 나타낼 수 있나요?

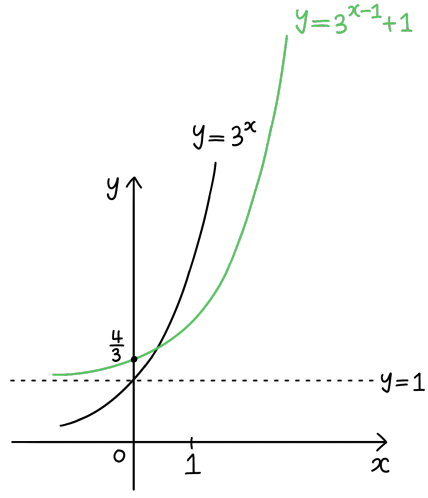
❶ 지수함수 $y = 2^x$의 그래프와 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 그 그래프는 다음과 같이 그려진다.



위 그래프에서 보듯이, 지수함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 $(0,\ 1)$ 을 지나고 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고, x 의 값이 감소함에 따라 y 의 값은 0 에 한없이 가까워진다는 것 즉, 점근선이 x 축이라는 것을 확인할 수 있다.

한편 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것으로 점 $(0,\ 1)$ 을 지나고 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하고, x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값은 0 에 한없이 가까워진다는 것 즉, 점근선이 x 축이라는 것을 확인할 수 있다.

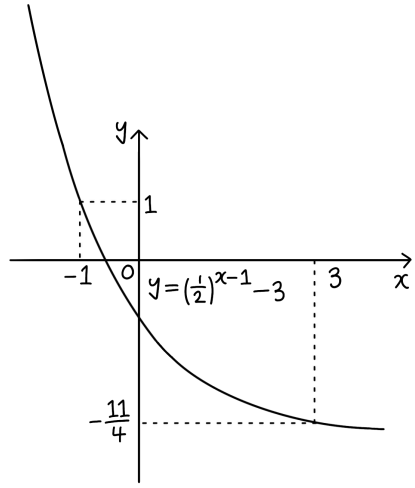
2 함수 $y=3^{x-1}+1$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $y=3^{x-1}+1$ 의 그래프는 다음과 같고, 점근선은 직선 $y=1$ 이다.



❸ 마찬가지로 함수

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-3$$

의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 의 그래프를 평행이동하여 다음과 같이 그릴 수 있다.



❹ 일반적으로 지수함수 $y=a^{x}\ (a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를

(i) x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 다음 함수의 그래프가 된다.

$$y-n=a^{x-m} \quad \text{즉,} \quad y=a^{x-m}+n$$

(ii) x축에 대하여 대칭이동하면 다음 함수의 그래프가 된다.

$$-y=a^{x} \quad \text{즉,} \quad y=-a^{x}$$

(iii) y축에 대하여 대칭이동하면 다음 함수의 그래프가 된다.

$$y=a^{-x} \quad \text{즉,} \quad y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x}$$

(iv) 원점에 대하여 대칭이동하면 다음 함수의 그래프가 된다.

$$-y=a^{-x} \quad \text{즉,} \quad y=-\left(\frac{1}{a}\right)^{x}$$

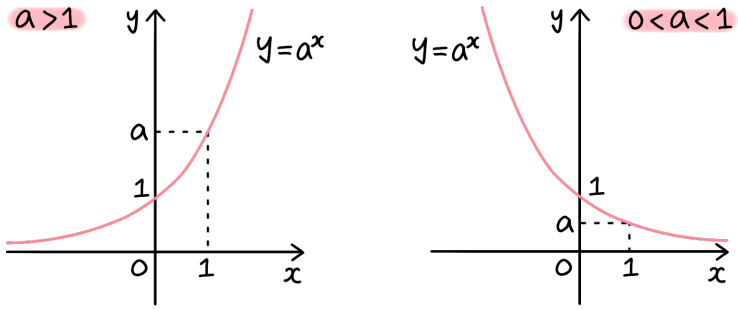
개념

지수함수에는 어떤 성질이 있나요?

일반적으로 지수함수 $y = a^x (a > 0,\ a \neq 0)$에는 다음과 같은 성질이 있다.

1. 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합인 연속함수이다.
2. 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.
3. 그래프의 점근선은 x축이다.
4. $a > 1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

   $0 < a < 1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



더 알아보기

지수함수의 다른 성질은 없나요?

지수함수 $f(x) = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$에는 다음과 같은 성질도 있다.

1. $f(x+y) = f(x)\,f(y)$
2. $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$
3. $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$
4. $f(nx) = \big(f(x)\big)^n$ (n은 자연수)

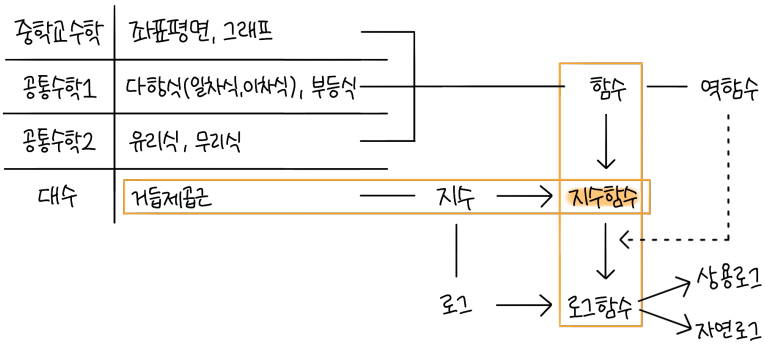
예를 들어 $f(x) = 3^x$이라 하면

1. $f(x+y) = 3^{x+y} = 3^x \times 3^y = f(x)\,f(y)$
2. $f(x-y) = 3^{x-y} = 3^x \times 3^{-y} = \dfrac{3^x}{3^y} = \dfrac{f(x)}{f(y)}$
3. $f(-x) = 3^{-x} = \dfrac{1}{3^x} = \dfrac{1}{f(x)}$
4. $f(nx) = 3^{nx} = (3^x)^n = \big(f(x)\big)^n$

개념

지수함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

지수함수는 지수, 로그, 상용로그, 로그함수, 무리수 e, 자연로그 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 실수 전체의 집합에서 정의되는 **지수함수** $y=a^x\,(a>0,\ a\neq 1)$는 각 실수 x에 대하여 x를 실수인 **지수**로 가지는 a^x를 대응시키는 함수이고, 그 **역함수**인 **로그함수** $y=\log_a x$는 각 양의 실수 x에 a를 밑으로 가지는 x의 **로그**를 대응시키는 함수이다. 지수함수 중에서 10밑으로 하는 지수함수 $y=10^x$의 역함수는 x의 **상용로그**를 함숫값으로 하는 로그함수 $y=\log x$이고, 〈미적분II〉에서 다루는 **무리수e**를 밑으로 하는 지수함수 $y=e^x$의 역함수는 x의 **자연로그**를 함숫값으로 갖는 로그함수 $y=\ln x$이다. 특히 지수함수 $y=e^x$는 그 **도함수**가 자기 자신인 매우 독특한 함수이다.

심화(참고)

● **지수함수는 어디에 사용되나요?**

지수함수는 자연 현상이나 사회 현상의 수학적 모델로 종종 사용된다. 예를 들어 매시간 두 배로 그 개체수가 증가하는 박테리아가 있다고 하자. 이 박테리아의 처음 개체수가 k이면 x시간 후의 박테리아의 수 $f(x)$는

$$f(x)=k2^x$$

로 나타내어진다.

지수함수는 방사능 물질의 붕괴에 대한 연구에도 사용된다. 예를 들어 스트론튬 $^{99}\mathrm{Sr}$의 반감기는 25년인데, 이는 25년 후에 $^{90}\mathrm{Sr}$의 주어진 양의 절반이 붕괴됨을 뜻한다. 즉, k mg의 시료에서 t년 후에

남는 $^{90}\mathrm{Sr}$의 질량을 $m(t)$라 하면

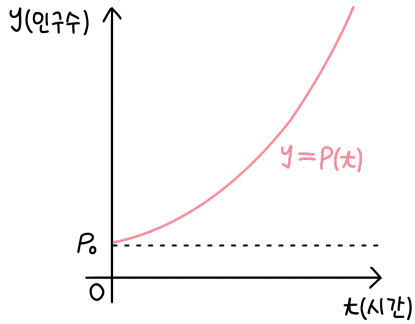
$$m(t) = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$$

인데, 이 함수는 $\frac{1}{2}$를 밑으로 하는 지수함수이다.

한편 영국의 경제학자 맬서스(Malthus, T. R., 1766~1834)는 현재의 인구를 P_0, 인구 증가율을 r이라 할 때, 어느 한 시점 t에서의 인구수 $P(t)$를

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

와 같이 나타내었는데, 이것은 〈미적분II〉에서 배우는 무리수 e를 밑으로 하는 지수함수이다. 이 인구 증가 모델을 지수 성장 모델이라 하며, 그 그래프는 다음과 같다.



로그함수로그函數; logarithmic function

정의

로그함수란 무엇인가요?

지수함수 $y = a^x (a > 0,\ a \neq 0)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 그 역함수가 존재한다.

$y = a^x$에서 로그의 정의에 의하여

$$x = \log_a y$$

이고, 이 등식에서 x와 y를 서로 바꾸면 지수함수 $y = a^x$의 역함수

$$y = \log_a x \quad (x > 0,\ a \neq 1)$$

를 얻는다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 **로그함수**라고 한다.

로그함수와 지수함수의 관계

❶ $y = \log_a x \iff x = a^y \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

❷ 로그함수 $y = \log_a x$는 지수함수 $y = a^x$의 역함수이다.

의미

로그함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

로그함수(函數)는 글자 그대로 로그가 있는 함수(函數)를 의미한다.

로 그 函 상자 함 數 셈(수) 수

로그함수를 영어로는 logarithmic function이라 하는데, logarithmic은 '로그의'를 의미하고, function은 '함수'를 의미한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ $y=\log_3 x$는 3을 밑으로 하는 로그함수로서, 지수함수 $y=3^x$의 역함수이다.

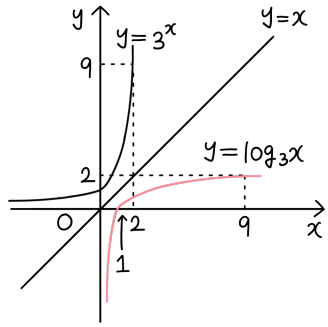
❷ $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 $\frac{1}{3}$을 밑으로 하는 로그함수로서, 지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 역함수이다.

❸ $y=\ln x$로 나타내는 로그함수가 있는데, 이 함수는 무리수 e를 밑으로 하는 로그함수 $y=\log_e x$로서 x의 자연로그를 함숫값으로 갖는 함수이다.

개념

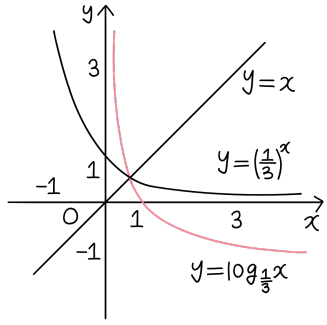
로그함수는 시각적으로 어떻게 나타내나요?

❶ 로그함수 $y=\log_3 x$의 그래프는 그 역함수 $y=3^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 다음과 같이 그릴 수 있다.



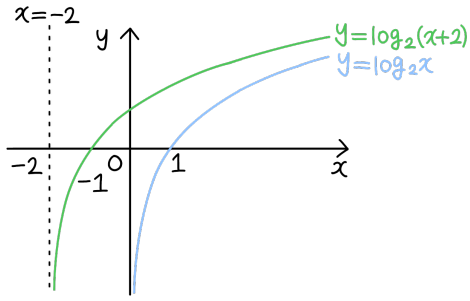
위 그래프에서 보듯이, 로그함수 $y=\log_3 x$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하며, x의 값이 0에 한없이 가까워짐에 따라 y의 값은 한없이 작아진다는 것 즉, 점근선이 y축이라는 것을 확인할 수 있다.

❷ 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프 역시 그 역함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 다음과 같이 그릴 수 있다.

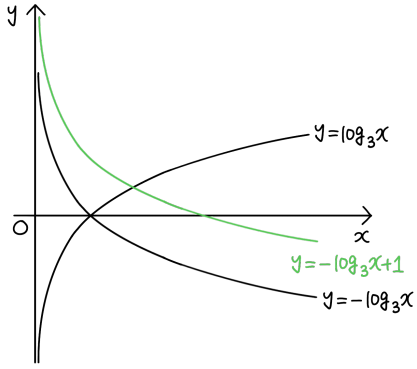


위에서 보듯이, $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하며, x의 값이 0에 한없이 가까워짐에 따라 y의 값은 한없이 커진다는 것 즉, 점근선이 y축이라는 것을 확인할 수 있다.

❸ 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $y=\log_2(x+2)$의 그래프는 다음과 같고, 점근선은 직선 $x=-2$이다.



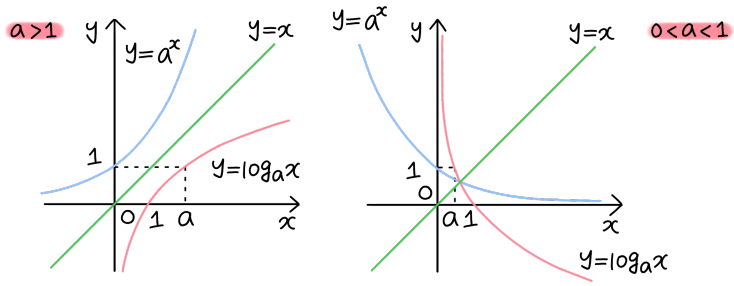
❹ 함수 $y=-\log_3 x+1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $y=-\log_3 x+1$의 그래프는 다음과 같고, 점근선은 직선 $x=0$ 즉, y축이다.



개념

로그함수에는 어떤 성질이 있나요?

일반적으로 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 0)$에는 다음과 같은 성질이 있다.



더 알아보기

로그함수의 다른 성질은 없나요?

로그함수 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$에는 다음과 같은도 성질이 있다.

❶ $f(xy)=f(x)+f(y)$

❷ $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

❸ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$

❹ $f(x^k)=k\,f(x)$

예를 들어 $f(x)=\log x$라 하면

❶ $f(xy)=\log(xy)=\log x+\log y=f(x)+f(y)$

❷ $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log x-\log y=f(x)-f(y)$

❸ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\log x=-f(x)$

❹ $f(x^k)=\log(x^k)=k\log x=k\,f(x)$

개념

로그함수는 어디에 사용되나요?

로그는 예금 이자를 계산할 때 유용하게 사용된다. 예를 들어 원금 100만 원을 연이율 3%, 1년마다 복리로 10년간 예금하였을 때의 원리합계를 S원이라 하면,

$$S=10^6(1+0.03)^{10}=10^6\times 1.03^{10}$$

이다. 여기서 $1.03^{10}=X$로 놓으면,

$$\log X=10\log 1.03$$

이다. 상용로그표를 이용하여

$$\log 1.03 = 0.0128$$

을 얻고, 이로부터

$$\log X = 10 \log 1.03 = 10 \times 0.0128 = 0.128$$

을 얻는다. 그런데 상용로그표에서

$$0.128 = \log 1.343$$

임을 알 수 있으므로, 이로부터

$$X = 1.343$$

을 얻는다. 따라서 원리합계 S는

$$S = 10^6 \times 1.03^{10} = 10^6 \times 1,343 = 1,343,000(\text{원})$$

이고, 예금 이자는 $343,000$원이다.

그 이외에도 로그는 별의 밝기, 소리의 크기, 수소 이온 지수, 지진의 강도와 같이 시각, 청각, 미각, 촉각 등 우리가 자극을 느끼는 정도의 크기를 정할 때 유용하게 사용된다. 예를 들어

- 별의 밝기를 I라 할 때 별의 등급 m은 다음과 같은 로그함수로 나타난다.

  $$m = -2.5 \log I + C \ (C\text{는 거리에 관련된 상수})$$

- $N\,\mathrm{W/m^2}$인 소리의 크기를 D데시벨이라 하면, D는 다음과 같은 로그함수의 형태로 나타난다.

  $$D = 10 \log \frac{N}{10^{-12}} (10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}\text{은 표준음의 크기})$$

- 1L의 용액에 포함되어 있는 수소 이온의 몰 수가 $[\mathrm{H_3O^+}]$일 때, 수소 이온 지수 pH

는 다음와 같은 로그함수로 나타난다.

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H_3O^+}]$$

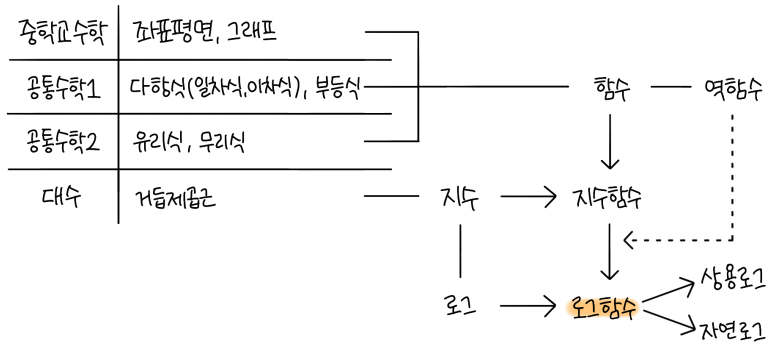
- 최대 진폭이 $A\,\mu\mathrm{m}$인 지진의 리히터 규모 M은 다음과 같은 로그함수로 나타난다.

$$M = \log A$$

개념

로그함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

로그함수는 지수, 로그, 상용로그, 지수함수, 무리수 e, 자연로그 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



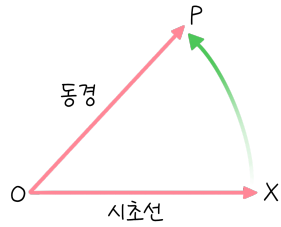
실제로 양의 실수 전체의 집합에서 정의되는 **로그함수** $y = \log_a x (a > 0,\ a \neq 0)$는 각 양의 실수 x에 대하여 a를 밑으로 하는 x의 **로그**를 대응시키는 함수로서, 실수인 **지수** x에 대하여 a^x를 함숫값으로 갖는 **지수함수** $y = a^x$의 **역함수**이다. 로그함수 중에서 10을 밑으로 하는 로그인 **상용로그**를 함숫값으로 하는 로그함수 $y = \log x$는 지수함수 $y = 10^x$의 역함수이고, 〈미적분II〉에서 다루는 x의 **자연로그**를 함숫값으로 갖는 로그함수 $y = \ln x$는 **무리수 e**를 밑으로 하는 지수함수 $y = e^x$의 역함수이다. 특히 로그함수 $y = \ln x$는 그 도함수가 $\dfrac{1}{x}$인 함수로서, 그 도함수가 자기 자신인 지수함수 $y = e^x$의 역함수이다. 이에 대한 내용은 〈미적분II〉에서 다룬다.

일반각一般角; general angle , **시초선**始初線; initial line , **동경**動徑; radius vector

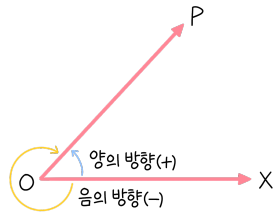
정의

시초선과 동경 및 일반각은 무엇인가요?

아래 그림과 같이 평면 위의 두 반직선 OX와 OP에 의하여 $\angle XOP$가 정해질 때, $\angle XOP$의 크기는 고정된 반직선 OX의 위치에서 점 O를 중심으로 반직선 OP가 회전한 양으로 정한다. 이때 반직선 OX를 **시초선**, 반직선 OP를 **동경**이라고 한다.



동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 회전하는 방향이 **반시계방향**이면 양의 방향, **시계방향**이면 음의 방향이라고 한다. 각의 크기는 회전 방향이 양의 방향이면 양의 부호 $+$를, 음의 방향이면 음의 부호 $-$를 붙여서 나타낸다.



시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 α°라 하면, $\angle XOP$의 크기는

$$360^\circ \times n + \alpha^\circ \qquad (n\text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 이것을 동경 OP가 나타내는 **일반각**이라 한다. 이때 α°는 보통

$$0^\circ \le \alpha^\circ < 360^\circ$$

인 것을 택한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ $30°$의 동경이 나타내는 일반각은 $360° \times n + 30°$이다.

❷ $-30°$의 동경이 나타내는 일반각은 $360° \times n + 330°$이다.

❸ $-330°$의 동경이 나타내는 일반각은 $360° \times n + 30°$이다.



동경과 일반각의 관계를 다시 한 번 설명해주세요.

$\angle XOP$에서 시초선 OX는 고정되어 있으므로 $\angle XOP$의 크기가 정해지면 동경 OP의 위치는 하나로 정해진다. 그러나 동경 OP의 위치가 정해지더라도 동경 OP가 양의 방향 또는 음의 방향으로 한 바퀴 이상 회전할 수 있으므로 $\angle XOP$의 크기는 하나로 정해지지 않는다. 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 $\alpha°$라고 하면 일반각은

$$360° \times n + \alpha° \quad (n \in \mathbb{Z})$$

이다. 보통 $\alpha°$는 $0° \le \alpha° < 360°$인 것을 택한다. 이때 $360° \times n$의 의미는 동경 OP가 시계방향이든 반시계방향이든 그 방향으로 $|n|$바퀴 회전한다는 것이다.

의미

시초선, 동경, 일반각이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

시초선 시(始)는 '처음, 시작'을 뜻하고, 초(初)는 '맨 처음'을 의미하며, 선(線)은 '줄, 직선'을 뜻한다. 즉, 시초선(始初線)은 각이나 방향을 정할 때 기준이 되는 '맨 처음의 선'을 의미한다.

始 먼저 시　初 처음 초　線 줄 선

또한 영어로는 initial line라 하며, initial은 '처음의'라는 뜻을 가진 영어 단어이고, line은 '선'을 의미한다. 이 용어들은 각의 크기나 방향을 정할 때 출발 기준이 되는 선을 가리키며, 이러한 의미를 살려 번역한 것이 바로 '시초선'이다.

동경 동(動)은 '움직이다'를 뜻하고, 경(徑)은 '지나는 길', '직선 거리'를 의미한다.

따라서 동경(動徑)은 '움직이는 경로', 즉 한 점에서 다른 점까지의 방향과 거리를 나타내는 선을 뜻한다.

動 움직일 동　徑 지름 경

영어로는 radius vector라 하며, radius는 '반지름', vector는 '크기와 방향을 가진 양'을 의미한다. 이 용어는 기준점(주로 원점)에서 시작하여 한 점을 향하는 반직선을 가르킨다.

일반각 일(一)은 '하나', 반(般)은 '두루 통함' 또는 '보편적'이라는 뜻을 가진다. 따라서 일반(一般)은 '두루 통하는 하나의 경우', 즉 특별한 제한 없이 모든 경우를 포함하는 것을 의미한다. 여기에 각(角)은 '두 직선이 만나는 지점에서 생기는 벌어진 정도'를 뜻하므로, 일반각(一般角)은 특정 범위(예: 0° 부터 360°)에 국한되지 않고, 회전 방향과 회전 횟수를 고려한 모든 각을 포함하는 개념이다.

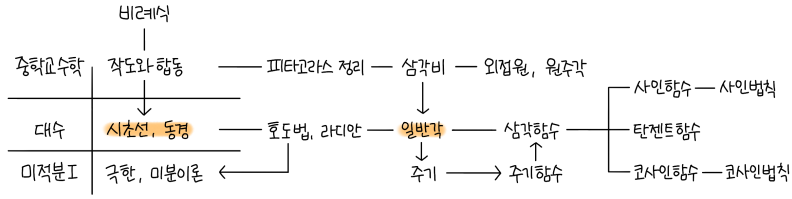
一 일 일　般 일반 반　角 각 각

영어로는 general angle이라 한다. general은 '일반적인, 포괄적인'을 뜻하므로 general angle은 한 각이 여러 바퀴 회전하거나 음의 방향으로 회전한 경우까지 포함하는 확장된 각의 개념을 나타낸다.

개념

시초선, 동경, 일반각과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

시초선, 동경, 일반각은 호도법, 라디안, 삼각함수 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



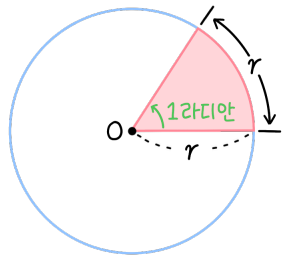
실제로 **시초선**과 **동경**은 **일반각**이 무엇인지 그 개념을 정의하고 설명하는 과정에서 필요한 용어이다. 삼각형 특히, 직각삼각형에서 $0°$ 에서 $90°$ 까지의 각도에 대하여 정의되는 삼각비를 실수 전체의 집합에서 정의되는 삼각함수로 일반화하려면 일반각의 개념이 필수적이다. 특히 각의 크기를 나타내는 방법으로 호도법과 라디안은 삼각함수의 개념과 〈미적분I〉에서 다루는 극한 및 미분 이론을 전개하는데 필수적인 용어이자 개념이다.

호도법弧度法; circular measure , **라디안**라디안; radian

정의

호도법과 라디안은 무엇인가요?

반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기는 반지름의 길이에 관계없이 일정하다. 이와 같이 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 일정한 중심각의 크기를 1**라디안**이라 하고, 라디안을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라 한다.



호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$r : 2\pi r = 1\text{라디안} : 360^\circ, \qquad 1\text{라디안} = \frac{180^\circ}{\pi}, \qquad 180^\circ = \pi\text{라디안}$$

이다. 이로부터 호도법과 육십분법 사이에는 다음 관계가 성립함을 알 수 있다.

라디안과 도(°)의 관계

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{라디안}, \quad 1\text{라디안} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

호도법으로 각의 크기를 나타낼 때는 보통 단위인 라디안을 생략하여 1, π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ 등과 같이 나타낸다.



그런데 육십분법은 무엇인가요?

도(°)를 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 육십분법이라고 한다. 고대 바빌로니아인들은 1년을 360일로 생각하여 원주를 360등분 한 것 중의 하나를 1일, 그것의 중심각의 크기를 1°의 단위로 하여 각의 크기를 나타내었다고 한다. 또, 360이 60의

배수인 것에 주목하여 $1°$를 60등분 한 것을 1분($'$), 다시 1분을 60등분 한 것을 1초($''$)라고 하였는데 이것은 오늘날에도 시간의 단위로 이용되고 있다.

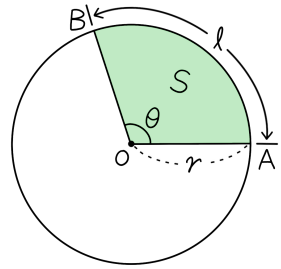
예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 자주 이용하는 각의 크기를 육십분법과 호도법으로 나타내면 다음과 같다.

육십분법	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
호도법	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

❷ 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l, 부채꼴 OAB의 넓이를 S라 하자.



호의 길이와 부채꼴의 넓이는 각각 중심각의 크기에 비례하므로 다음이 성립한다.

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi\,, \quad S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

따라서 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S는 각각 다음과 같다.

$$l = r\theta\,, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

❸ 예를 들어, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S는 각각 다음과 같다.

$$l = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi, \quad S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

의미 호도법, 라디안이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

라디안 영어 단어 radian은 radius angle 또는 radial angle이 어원인데, 이는 반지름(radius)과 각(angle)의 합성어로서 호의 길이가 반지름, 즉 radius의 길이만큼 되는 각을 의미한다.

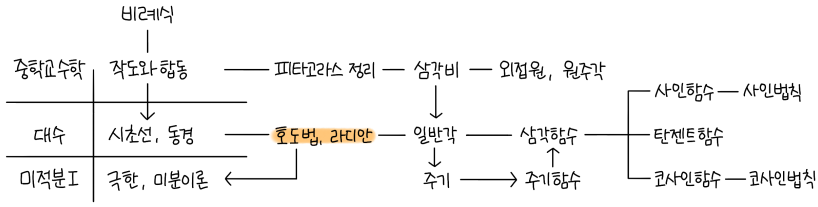
호도법 호도법(弧度法)은 호(弧)의 길이로 각의 크기(度)를 정하는 방법(法)이라는 뜻이다.

弧	度	法
활 호	법도 도	법 법

호도법을 영어로는 circular measure라고 한다. circular에는 '원의', measure에는 '측정한다' 라는 뜻이 있는데, 원의 둘레를 따라 각의 크기를 측정하기에 circular measure라고 하는 것이다.

개념 호도법, 라디안과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

호도법, 라디안은 일반각, 삼각함수와 밀접한 관련이 있다.



실제로 **라디안**을 단위로 하는 **호도법**은 도(°)를 단위로 하는 육십분법과 함께 각의 크기 즉, 각도를 나타내는 대표적인 방법이다. 두 방법 모두 임의의 실수를 값으로 갖는 **일반각**을 표현할 수 있지만, 라디안을 단위로 하여 **삼각함수**를 다루면 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$이 되고, $\sin x$의 **도함수**가 $\cos x$가 된다는 점에서 수학에서는 육십분법보다는 호도법이 각의 크기를 나타내는 방법으로 널리 사용된다. 호도법을 이용하면 부채꼴의 호의 길이와 넓이 공식 역시 간단하게 표현된다.

각의 크기를 표현하는 다른 방법은 없나요?

각의 크기를 표현하는 방법에는 여러 가지가 있다. 일반적으로 가장 널리 사용되는 것은 육십분법과 호도법이며, 그 외에도 그라드법, 회전수와 같은 방법이 있다.

- 육십분법

  육십분법은 우리가 일상생활에서 가장 많이 사용하는 방법으로, 원 한 바퀴를 360도(°)로 정하고 이를 이용하여 각의 크기를 나타낸다. 또 1도(°)는 60분(′), 1분은 60초(″)로 세분된다.

- 호도법

  호도법은 주로 수학이나 물리학에서 사용되며, 원의 반지름과 같은 길이의 호를 갖는 부채꼴의 중심각의 크기를 1라디안으로 정한다. $180°$는 π 라디안에 해당한다.

- 그라드법

  그라드법은 측량이나 공학 분야에서 사용되는 단위로, 원 한 바퀴를 400그라드(grad)로 정하고 이를 이용하여 각의 크기를 나타낸다. 직각은 100그라드(grad)이며, 1그라드(grad)는 $0.9°$에 해당한다.

- 회전수

  회전수는 주로 공학 분야에서 사용되는 단위로, 원 한 바퀴의 회전을 1회전(rev)으로 나타낸다. 1회전(rev)은 $360°$ 즉, 2π 라디안에 해당하며, 0.25회전(rev) $= 90° = \frac{\pi}{2}$ 라디안이다.

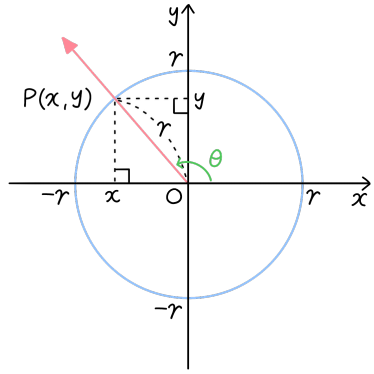
이처럼 각의 크기는 사용하는 목적과 분야에 따라 여러 가지 단위로 표현될 수 있으며, 서로 변환이 가능하다.

삼각함수三角函數; trigonometric function ,
주기週期; period , **주기함수**週期函數; periodic function

정의

삼각(사인, 코사인, 탄젠트)함수란 무엇인가요?

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 일반각을 θ라 하자.



반지름의 길이 r의 값에 관계없이 다음 세 비의 값

$$\frac{y}{r}\ ,\quad \frac{x}{r}\ ,\quad \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

은 θ의 값에 따라 각각 하나씩 정해진다. 이때 θ의 값에 이들 세 비의 값을 대응시키는 함수를 각각

$$\sin\theta\ ,\quad \cos\theta\ ,\quad \tan\theta$$

로 나타내고, 각각 **사인함수**, **코사인함수**, **탄젠트함수**라고 한다. 즉,

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\quad \cos\theta=\frac{x}{r}\ ,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

이다. 그리고 이들 세 함수를 통틀어 **삼각함수**라고 한다.

특히 $r=1$인 경우,

$$\sin\theta=y\ ,\quad \cos\theta=x\ ,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

이므로, 실제 삼각함수의 값을 찾을 때는 단위원 위의 점의 좌표만 찾으면 된다.

예 구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ $\theta=\frac{\pi}{3}$(제1사분면의 각)인 동경이 단위원과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로,

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

❷ $\theta=\frac{2}{3}\pi$(제2사분면의 각)인 동경이 단위원과 만나는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로,

$\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$, $\tan\frac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}$

❸ $\theta=\frac{4}{3}\pi$(제3사분면의 각)인 동경이 단위원과 만나는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로,

$\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}$, $\tan\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}$

❹ $\theta=\frac{5}{3}\pi$(제4사분면의 각)인 동경이 단위원과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로,

$\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}$, $\tan\frac{5}{3}\pi=\sqrt{3}$

개념 삼각함수에는 어떤 성질이 있나요?

❶ 삼각함수의 값의 부호에 대한 성질

각 θ가 나타내는 동경이 원과 만나는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면, 삼각함수의 값의 부호는 x와 y의 값의 부호에 따라 정해지고, 이것은 각 θ가 제 몇 사분면의 각인지에 따라 결정된다. 이로부터 삼각함수의 값의 부호가 다음과 같음을 알 수 있다.

삼각함수 값 (단위원)	θ의 동경의 위치			
	제1사분면	제2사분면	제3사분면	제4사분면
$\sin\theta=y$	⊕	⊕	−	−
$\cos\theta=x$	⊕	−	−	⊕
$\tan\theta=\frac{y}{x}$	⊕	−	⊕	−

❷ 삼각함수 사이의 관계에 대한 성질

세 삼각함수 $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (피타고라스의 정리)

개념

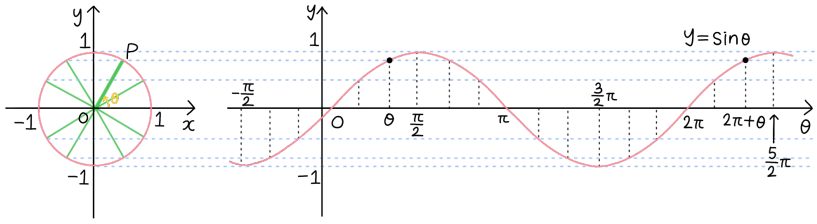
삼각함수의 그래프는 어떤 모양이고 어떤 성질이 있나요?

삼각함수의 그래프를 좌표평면에 그리면 다음과 같다.

1 사인함수 $y = \sin\theta$의 그래프

$\sin\theta$의 값은 θ가 0부터 $\dfrac{\pi}{2}$까지 증가함에 따라 0에서 1까지 증가하고, θ가 $\dfrac{\pi}{2}$부터 $\dfrac{3}{2}\pi$까지 증가함에 따라 1에서 -1까지 감소하며, θ가 $\dfrac{3}{2}\pi$부터 2π까지 증가함에 따라 -1에서 0까지 다시 증가한다. 그리고 이 과정이 반복된다.

$y = \sin\theta$의 그래프의 모양과 성질은 다음과 같다.



$y = \sin\theta$의 그래프의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

(2) $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$ (n은 정수) 즉, 주기가 2π인 주기함수이다.

(3) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 즉, 원점에 대하여 대칭인 곡선이다.

(4) $\sin\theta = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ 즉, $y = \cos\theta$의 그래프를 θ축 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.



그런데 주기는 무엇이고 주기함수는 또 무엇인가요?

$y = \sin\theta$의 그래프를 살펴보면 2π의 일정한 간격으로 그 모양이 반복되는 것을 알 수 있다. 즉, 임의의 정수 n에 대하여 $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$가 성립한다. 이처럼 그 그래프의 모양이 일정한 각격으로 계속 반복되는 함수가 있다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 정의역의 임의의 원소 x에 대하여

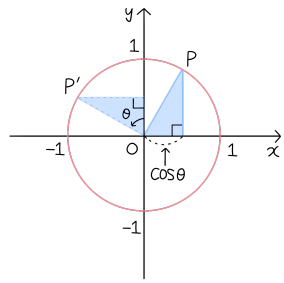
$$f(x+p)=f(x)$$

가 성립하는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때 함수 $f(x)$를 **주기함수**라 하고, 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 **주기**라고 한다.

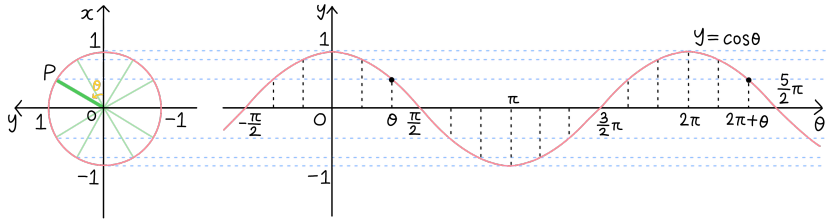
이를테면 $y=\sin\theta$와 $y=\cos\theta$는 주기가 2π인 주기함수이다. 또 $y=\tan\theta$는 주기가 π인 주기함수이다.

2 코사인함수 $y=\cos\theta$의 그래프

$y=\cos\theta$의 그래프를 그리려면 단위원 위에 있는 점의 x좌표인 $\cos\theta$를 y값으로 해야 하므로, 단위원을 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전하여 $\cos\theta$의 값을 세로축에 나타내어 그래프를 그리면 된다.



$y=\cos\theta$의 그래프의 모양과 성질은 다음과 같다.



$y=\cos\theta$의 그래프의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

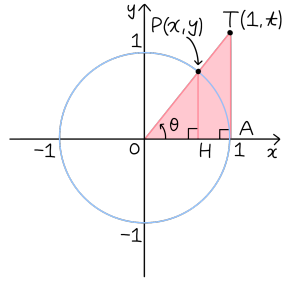
(2) $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$ (n은 정수) 즉, 주기가 2π인 주기함수이다.

(3) $\cos(-\theta)=\cos\theta$ 즉, y축에 대하여 대칭인 곡선이다.

(4) $\cos\theta=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ 즉, $y=\sin\theta$의 그래프를 θ축 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

3 탄젠트함수 $y=\tan\theta$의 그래프

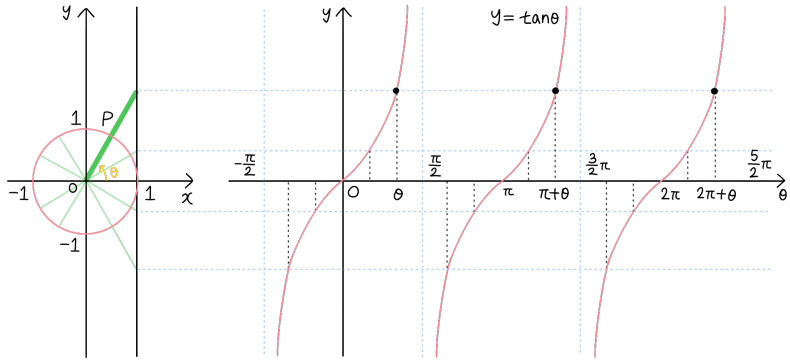
다음 그림에서



$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{t}{1}=t$$

이므로, $y=\tan\theta$의 그래프는 θ의 값을 가로축, 그에 대응하는 $\tan\theta$ 즉, t의 값을 세로축에 나타내어 그리면 된다.

$y=\tan\theta$의 그래프의 모양과 성질은 다음과 같다.



$y=\tan\theta$의 그래프의 성질

(1) 정의역은 $\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $\tan(n\pi+\theta)=\tan\theta$ (n은 정수) 즉, 주기가 π인 주기함수이다.

(3) $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ 즉, 원점에 대하여 대칭인 곡선이다.

(4) 직선 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)가 점근선이다.

더 알아보기

삼각함수는 이게 전부인가요?

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 이외에도 이들의 역수로 정의되는 함수도 있다. 각 θ에 대하여 이들 세 삼각함수의 값의 역수 $\frac{1}{\sin\theta}$, $\frac{1}{\cos\theta}$, $\frac{1}{\tan\theta}$를 대응시키는 함수를 각각 코시컨트함수, 시컨트 함수, 코탄젠트함수라 하고, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$로 나타낸다. 즉,

$$\csc\theta=\frac{1}{\sec\theta}, \quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}, \quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

이다. 그리고 다음이 성립한다.

(1) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ (2) $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

의미

삼각함수, 주기함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

삼각함수 삼각함수(三角函數)는 삼각(三角)형에서의 삼각(三角)비를 일반화한 함수(函數)를 의미한다.

三	角	函	數
셋 삼	모서리 각	상자 함	셈(수) 수

삼각함수를 영어로는 trigonometric function이라 한다. trigonometric은 '삼각법의'를 뜻하는데, 여기서 trigon은 '삼각형', metry는 '측정'을 의미한다. 즉, trigonometry는 '삼각형의 측정' 곧 '삼각법'을 의미한다. 결국 trigonometric function은 삼각법과 관련된 함수 또는 삼각법을 일반화한 함수라는 의미를 지닌다.

주기함수 주기함수(周期函數)는 주기(周期)를 가진 함수(函數)를 의미한다. 여기서 주(周)에는 '돌다, 반복되다'는 뜻이 있고 기(期)에는 '기간, 간격'이라는 뜻이 있다. 그러므로 주기(周期)는 일정간 기간이나 간격을 의미한다.

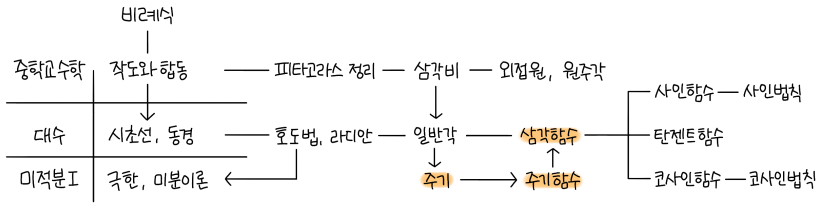
週	期	函	數
두루 주	기약할 기	상자 함	셈(수) 수

주기함수를 영어로는 periodic function이라 한다. periodic은 '주기적인, 일정한 간격으로 반복되는'를 뜻한다. 그러므로 periodic function은 일정한 간격으로 반복되는 즉, 주기가 있는 함수라는 의미를 지닌다.

개념

삼각함수, 주기함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

삼각함수, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 주기, 주기함수는 일반각, 호도법, 라디안, 사인법칙, 코사인법칙 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있고, 중학교 수학에서 다루는 삼각비와도 밀접한 관련이 있다.



사인함수, **코사인함수**, **탄젠트함수**는 〈중학교 수학〉에서 0° 에서 90° 까지의 각에 대하여 정의하여 다룬 삼각비를 **일반각**으로 확장하여 만든 함수로서, 이들 세 **삼각함수**는 각각 **주기**가 2π, 2π, π 인 **주기함수**이다. 삼각함수에서 정의역의 원소인 일반각은 보통 **호도법**으로 나타내고, 이때 각도의 단위인 **라디안**은 생략하여 나타낸다. 삼각함수의 활용으로 삼각형의 세 변의 길이와 세 내각의 크기 사이의 관계를 나타내는 성질로 **사인법칙**과 **코사인법칙**이 있다. 이들 두 법칙을 통해 삼각형의 변의 길이나 각의 크기를 구할 수 있고 다양한 삼각형의 넓이 공식을 얻을 수 있다. 한편 코사인법칙은 피타고라스의 정리의 일반화로서 직각삼각형에 적용하면 피타고라스의 정리가 된다.

삼각함수는 어디에 사용되나요?

삼각함수를 이용하면 직접 재기 어려운 건물이나 산의 높이를 구할수 있다. 예를 들어 지면의 어느 지점에서 건물까지의 시선이 이루는 각의 크기가 θ이고 그 지점에서 건물까지의 거리가 d라 하면, 건물의 높이 h는

$$h = d\tan\theta$$

로 구할 수 있다.

또 삼각함수를 이용하면 원 운동을 간단하게 나타낼 수 있는데, 원 운동을 하는 물체는 원이 한 바퀴 돌 때마다 같은 위치를 반복해서 지나가는 주기 운동을 하기 때문이다. 예를 들어 반지름의 길이가 r인 원 위를 등각속도 ω로 움직이는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면,

$$x = r\cos(\omega t + a)\ , \qquad y = r\sin(\omega t + a)$$

로 나타내어진다. 이 때 t는 시간, ω는 각속도, a는 $t = 0$일 때의 초기각도를 나타내는 상수이다. 이것은 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 두 좌표가

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta$$

임을 이용한 것이다.

한편 삼각함수는 다음과 같은 무한급수의 형태로 나타낼 수도 있다.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

이들 급수는 각각 $\sin x$와 $\cos x$의 정의로 사용되기도 하며 삼각함수의 폭넓은 응용의 시발점이 되기도 하는데, 급수 이론은 실수 체계에 바탕을 두고 있기 때문에 기하학적 관점과는 독립적으로 발달할 수 있었기 때문이다. 실제로 이들 두 함수의 연속성과 미분가능성도 위의 급수 정의로부터 유도할 수 있다.

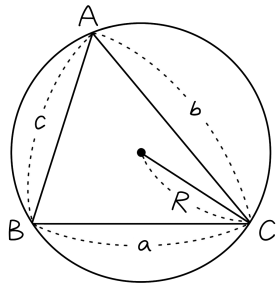
사인법칙사인法則; Law of Sines

정의

사인법칙이란 무엇인가요?

△ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내자.

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면,



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

이 성립한다. 삼각형의 세 변의 길이와 세 내각의 크기(및 외접원의 반지름의 길이) 사이에 성립하는 이 관계를 **사인법칙**이라 한다.



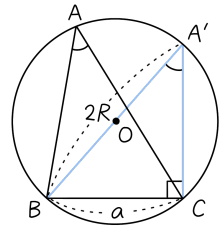
사인법칙이 성립하는 이유를 설명해주세요.

△ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R이라 할 때, 다음 등식이 성립함을 증명해 보자.

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

이 등식의 증명은 ∠A의 크기에 따라 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있는데, 여기서는 $0^\circ < A < 90^\circ$인 경우를 살펴보자.

점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면



$A = A'$ 이므로

$$\sin A = \sin A'$$

이다. $\triangle A'BC$ 에서 $\angle A'CB = 90°$ 이므로

$$\sin A' = \frac{a}{2R}$$

이다. 따라서, $\sin A = \frac{a}{2R}$ 즉,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

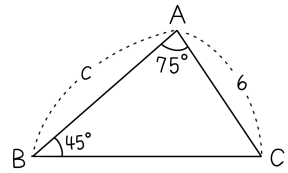
이 성립한다. 마찬가지 방법으로 다음을 얻는다.

$$\frac{b}{\sin B} = 2R\,, \quad \frac{c}{\sin B} = 2R$$

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

1 $\triangle ABC$에서 $b = 6,\ A = 75°,\ B = 45°$ 일 때, c와 외접원의 반지름의 길이 R를 구해보자.



$\triangle ABC$에서

$$C = 180° - (75° + 45°) = 60°$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 60°} = 2R$$

이다. 따라서

$$c = \sin 60° \times \frac{6}{\sin 45°} = 3\sqrt{6},\ R = \frac{1}{2} \times \frac{6}{\sin 45°} = 3\sqrt{2}$$

이다.

2 $\triangle ABC$에서 $A = 45°,\ B = 30°$일 때, 두 변의 길이의 비 $a : b$를 구해보자.

사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},\quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

이고, $A = 45°,\ B = 30°$이므로

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 45°}{\sin 30°}$$

이다. $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 30° = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

이다. 따라서 $a : b = \sqrt{2} : 1$이다.

더 알아보기

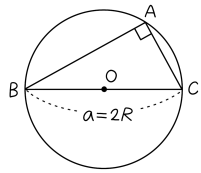
$0° < A < 90°$가 아닌 경우의 사인법칙 증명은 어떻게 하나요?

$\triangle ABC$의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R이라 할 때, $0° < A < 90°$이 아닌 나머지 다른 두 경우

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

이 성립함을 보이면 다음과 같다.

(i) $A = 90°$일 때



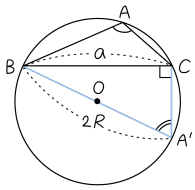
$\sin A = \sin 90^\circ = 1, \quad a = 2R$ 이므로,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2R}{1} = 2R$$

이 성립한다.

(ii) $90^\circ < A < 180^\circ$ 일 때

점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면,



$A + A' = 180^\circ$, $A = 180^\circ - A'$ 이므로

$$\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A'$$

이다. △A′BC에서 $\angle A'CB = 90^\circ$ 이므로

$$\sin A' = \frac{a}{2R}$$

이고, 따라서 $\sin A = \frac{a}{2R}$, 즉

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

이 성립한다. 마찬가지 방법으로 다음을 얻는다.

$$\frac{b}{\sin B} = 2R\,, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

개념

사인법칙은 어디에 사용되나요?

사인법칙을 이용하면

- 삼각형의 두 변의 길이와 그 두 변 중 한 변의 대각의 크기가 주어졌을 때 다른 한 변의 대각의 크기,

- 삼각형의 한 변의 길이와 두 내각의 크기가 주어졌을 때 다른 한 변의 길이,
- 삼각형의 한 내각의 크기와 그 대변의 길이가 주어졌을 때 주어진 삼각형의 외접원의 반지름의 길이,
- 삼각형의 한 변의 길이와 외접원의 반지름의 길이가 주어졌을 때 그 변의 대각의 크기,
- 삼각형의 한 내각의 크기와 외접원의 반지름의 길이가 주어졌을 때 그 내각의 대변의 길이

등을 구할 수 있고, 이를 통해 직접 측정하기 어려운 두 지점 사이의 거리, 높이 등을 계산하는데 활용될 수 있다.

이와 더불어 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ (R\text{은 외접원의 반지름})$$

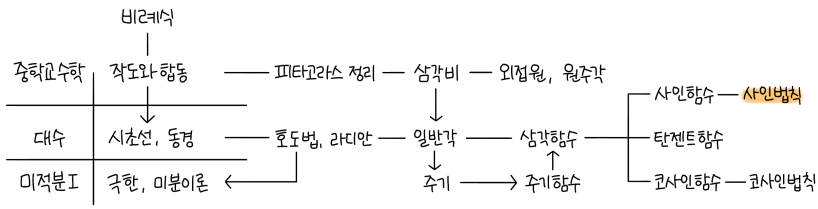
의 변형과 대입을 통해 다음과 같은 삼각형의 넓이 공식들을 유도할 수 있다.

- $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$
- $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$
- $S=\frac{abc}{4R}$

개념

사인법칙과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

사인법칙은 삼각함수, 사인함수, 코사인법칙 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 삼각비, 외접원, 원주각 등의 용어 및 개념과도 관련이 있다.



실제로 **사인법칙**은 **삼각함수** 중에서도 특히 **사인함수**를 이용하여 삼각형의 세 변의 길이와 세 내각의 크기 사이의 관계를 나타내는 법칙이다. 사인법칙은 〈중학교 수학〉에서

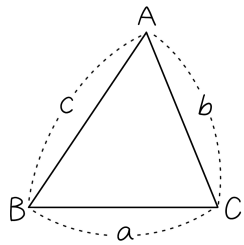
다룬 삼각비, 삼각형의 외접원과 그 반지름, 원주각의 성질을 바탕으로 삼각형에서 두 내각의 크기와 한 변의 길이가 주어졌을 때 다른 한 변의 길이가 얼마인지 찾는데 활용될 뿐 아니라 삼각형의 넓이를 찾는 방법 역시 제공한다. 삼각형의 세 변의 길이와 세 내각의 크기 사이의 관계를 나타내는 성질로 사인법칙 이외에 코사인법칙도 있다. 사인법칙과 코사인법칙을 활용하면 삼각형의 변의 길이나 각의 크기를 구할 수 있고 삼각형의 다양한 넓이 공식을 얻을 수 있다. 특히 코사인법칙은 피타고라스의 정리의 일반화로서 직각삼각형에 적용하면 피타고라스의 정리가 된다.

코사인법칙 코사인法則; Law of Cosines

정의

코사인법칙이란 무엇인가요?

△ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타낼 때 다음이 성립한다.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

삼각형의 세 변의 길이와 세 내각의 크기 사이의 관계를 나타내는 이 공식을 **코사인법칙**이라 한다. 코사인법칙을 다음과 같이 쓰기도 한다.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



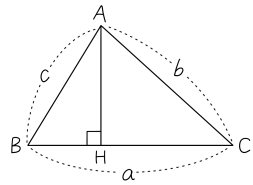
코사인법칙이 성립하는 이유를 설명해주세요.

△ABC에서 다음 등식이 성립함을 증명해 보자.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

이 등식의 증명은 ∠C의 크기에 따라 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있는데, 여기서는 $0° < C < 90°$인 경우를 살펴보자.

꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면,



$\overline{\mathrm{AH}} = b\sin C$, $\overline{\mathrm{CH}} = b\cos C$, $\overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{CH}} = a - b\cos C$ 이다.

따라서 피타고라스 정리에 의해

$$\begin{aligned} c^2 &= \overline{\mathrm{BH}}^2 + \overline{\mathrm{AH}}^2 \\ &= (a - b\cos C)^2 + (b\sin C)^2 \\ &= a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

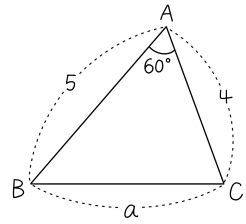
이 성립한다. 마찬가지 방법으로 다음을 보일 수 있다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

1 $\triangle ABC$에서 $b = 4,\ c = 5,\ A = 60°$ 일 때, a의 값을 구해보자.

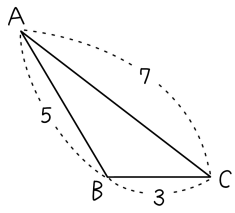


코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60° = 21$$

이고, $a > 0$이므로 $a = \sqrt{21}$이다.

2 $\triangle ABC$에서 $a = 3,\ b = 7,\ c = 5$일 때, $\angle B$의 크기를 구해보자.



코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

이고, $0° < B < 180°$ 이므로 $\angle \mathrm{B} = 120°$ 이다.

더 알아보기

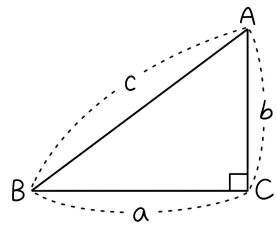
$0° < C < 90°$ 가 아닌 경우의 코사인법칙 증명은 어떻게 하나요?

$0° < C < 90°$ 이 아닌 나머지 다른 두 경우에

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

이 성립함을 보이면 다음과 같다.

(i) $C = 90°$ 일 때



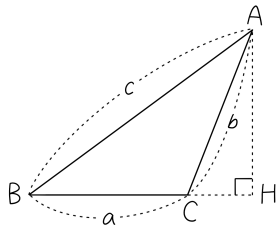
$\cos C = \cos 90° = 0$ 이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

이 성립한다.

(ii) $90° < C < 180°$ 일 때

$\triangle \mathrm{ABC}$ 의 꼭짓점 A 에서 변 BC 의 연장선에 내린 수선의 발을 H 라 하면,



$$\overline{\mathrm{AH}} = b\sin(180^\circ - C) = b\sin C,$$

$$\overline{\mathrm{CH}} = b\cos(180^\circ - C) = -b\cos C,$$

$$\overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CH}} = a - b\cos C$$

따라서 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} c^2 &= \overline{\mathrm{BH}}^2 + \overline{\mathrm{AH}}^2 \\ &= (a - b\cos C)^2 + (b\sin C)^2 \\ &= a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

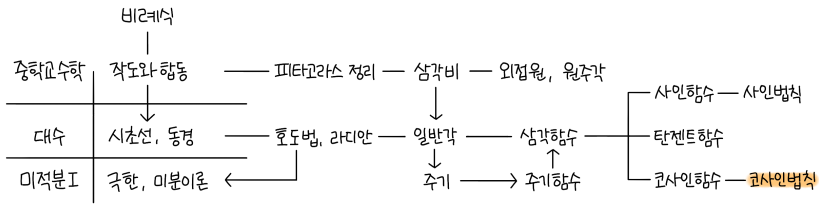
이 성립한다. 마찬가지 방법으로 다음을 보일 수 있다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

개념

코사인법칙과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

코사인법칙은 삼각함수, 코사인함수, 사인법칙 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 피타고라스 정리, 삼각비 등의 용어 및 개념과도 관련이 있다.



실제로 **코사인법칙**은 삼각함수 중에서도 특히 코사인함수를 이용하여 삼각형의 세 변의 길이와 세 내각의 크기 사이의 관계를 나타내는 법칙이다. 코사인법칙은 〈중학교 수학〉에서

다룬 피타고라스 정리와 삼각비의 성질을 바탕으로 삼각형에서 두 변의 길이와 그 끼인각이 주어졌을 때 나머지 한 변의 길이를 계산하거나 세 변의 길이가 주어졌을 때 세 내각의 크기가 얼마인지 찾는데 활용될 뿐 아니라 삼각형의 넓이를 찾는 방법 역시 제공한다. 코사인법칙은 피타고라스의 정리의 일반화로서 직각삼각형에 적용하면 피타고라스의 정리가 된다. 삼각형의 세 변의 길이와 세 내각의 크기 사이의 관계를 나타내는 성질로 코사인법칙 이외에 **사인법칙**도 있다. 사인법칙과 코사인법칙을 활용하면 삼각형의 변의 길이나 각의 크기를 구할 수 있고 삼각형의 다양한 넓이 공식을 얻을 수 있다.

심화(참고)

● **코사인법칙은 어디에 사용되나요?**

코사인법칙을 이용하면 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c만으로 이루어진 다음의 삼각형 넓이 공식을 유도할 수 있다.

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}$$

이 넓이 공식을 '헤론의 공식'이라 부른다. 헤론의 공식은 다음과 같이 유도할 수 있다.

△ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C \qquad \cdots(1)$$

이다. $\sin C$를 구하기 위해 코사인법칙

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

을 이용하면

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}=\frac{1}{2ab}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

이다. 이것을 식 (1)에 대입하면

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}ab\times\frac{1}{2ab}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}\end{aligned}$$

이다. 이때 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ 이므로

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2s \times 2(s-c) \times 2(s-b) \times 2(s-a)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

이 성립한다.

수열數列; sequence, progression , **항**項; term , **일반항**一般項; general term

정의

수열(항, 일반항)이 무엇인가요?

규칙이 있든 없든 수들을 차례로 나열할 수 있다. 이와 같이 차례로 나열한 수의 열을 **수열**이라 하고, 수열을 이루고 있는 각 수를 그 수열의 **항**이라고 한다.

또, 수열의 각 항을 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$ 이라고 한다.

일반적으로 수열을 나타낼 때에는 각 항에 차례로 번호를 붙여

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

과 같이 나타낸다. 이때 수열의 제n항 a_n을 이 수열의 **일반항**이라고 한다. 수열을 간단히 나타낼 때에는 일반항 a_n을 사용하여

$$\{a_n\}$$

과 같이 나타낸다.

또 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

을 S_n을 사용하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$$

으로 나타내거나,

기호 $\sum$를 사용하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

와 같이 나타낸다.

이때, 기호 $\sum$는 영어 sum의 첫 글자 S에 해당하는 그리스 문자이고, '시그마(sigma)'라고 읽는다. $\sum_{k=1}^{n}a_k$는 a_k의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 얻은 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$을 모두 더한다는 뜻이다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 수열

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

은 일반항이 $a_n = 2n - 1$인 수열이고, 첫째항부터 제n항까지의 합

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

은 다음과 같이 나타낸다.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

또는

$$\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

❷ 일반항이 $a_n = 2^{n-1}$인 수열은

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$$

이고, 이 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}$$

은 다음과 같이 나타낸다.

$$S_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}$$

또는

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}$$

❸ 수열

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

은 두 개의 항 1, 1로 시작하여 서로 이웃하는 두 항을 더하면 그 다음 항이 나오는

규칙이 있는 즉, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ 인 수열이다. 이 수열을 피보나치수열이라고 부른다.

❹ 수열

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \cdots$$

은 소수를 크기 순서대로 나열한 수열이다. 이처럼 일반항을 n에 대한 식이나 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 나타낼 수 없는 수열도 있다.

개념

'차례로 나열한 수의 열' 말고 수열에 대한 다른 정의는 없나요?

위에서 수열을 '차례로 나열한 수의 열'이라고 정의했는데, 수열을 수학적으로 좀더 엄밀하게 '자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수'로 정의할 수 있다. 즉, 자연수 전체의 집합을 $\mathbb{N}$, 실수 전체의의 집합을 $\mathbb{R}$이라 할 때

$$f(n)=a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 되는 함수

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

을 수열이라고 정의할 수 있다. 이때 함숫값

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots$$

은 각각

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

과 같다. 예를 들어, 수열

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

은 각각의 자연수 n에 $2n-1$을 대응시키는 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에서 실수 전체의 집합

$\mathbb{R}$로의 함수

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = 2n - 1$$

이다.

의미

수열, 일반항이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

수열 수열(**數列**)에서 수(**數**)는 말 그대로 '수' 혹은 '숫자'를 뜻하고, 열(**列**)은 '늘어놓다', '펼쳐 놓다' 는 뜻을 가지며 사람이나 물건이 죽 늘어선 줄을 의미하기도 한다. 결국 수열(**數列**)은 수(**數**)의 열(**列**)로서 수(**數**)들을 나열(**列**)해 놓은 것을 의미한다.



수열을 영어로는 sequence 또는 progression이라고 한다. sequence에는 '연달아 일어남, 연쇄'라는 뜻이 있고 progression에는 '연속'이라는 뜻이 있다. 이런 점에서 수열(sequence, progression)은 수가 연달아 나오는 것 또는 연속된 것을 의미한다고 볼 수 있다.

일반항 일반항(**一般項**)은 말 그대로 일반(**一般**)적인 형태의 항(**項**)을 뜻하며, 수열의 각 항을 나타낼 수 있는 일반적인 식을 의미한다. 보통 n번째 항을 나타내는 식 a_n을 말한다.

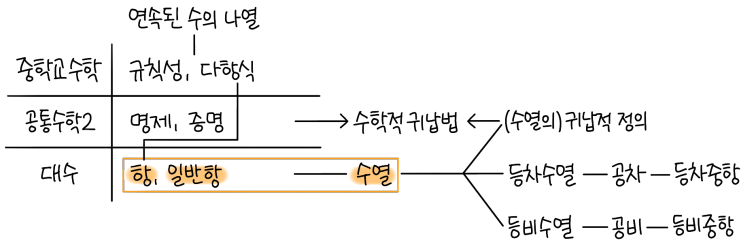


일반항을 영어로는 general term이라고 한다. general에는 '일반적인'이라는 뜻이 있고 term은 '항'을 뜻한다. 이런 점에서 general term은 '일반적인 항'을 뜻하고, 이것을 간단히 줄여 '일반항'이라 한 것으로 보인다. 제n항이 수열의 각 항을 일반적으로 나타내기 때문에 일반항이라 하는 것이다.

개념

수열, 항, 일반항과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

수열, 항, 일반항은 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 수열의 귀납적 정의, 수학적 귀납법 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **수열**, **항**, **일반항**은 수열의 개념과 성질을 다루기 위한 기초 용어이자 개념으로서 수열과 관련된 모든 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다. 이웃하는 두 항 사이의 일정한 차인 **공차**로 특징지어지는 **등차수열**은 첫째항부터 차례대로 일정한 수 즉, 공차를 더하여 만든 수열이고, 이웃하는 두 항 사이의 일정한 비인 **공비**로 특징지어지는 **등비수열**은 첫째항부터 차례대로 일정한 수 즉, 공비를 곱하여 만든 수열이다. 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 b를 a와 c의 **등차중항**이라 부르고, 등비수열을 이루면 **등비중항**이라고 부른다. 즉, 등차중항은 그 앞과 뒤의 두 수의 산술평균이고, 등비중항은 기하평균인 것이다. 등차수열과 등비수열은 둘 다 일반항을 n에 대한 식으로 나타내고 그 일반항으로 정의할 수도 있고, 첫째항과 이웃하는 두 항 사이의 관계를 이용하여 정의할 수도 있다. 이처럼 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계를 이용하여 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다. 수열 혹은 수열의 합은 여러 성질을 지니는데, 이들 성질은 자연수 n에 대한 명제의 형태로 나타난다. 이처럼 자연수에 대한 어떤 명제에 대하여 그 명제가 참임을 증명하는 방법으로 **수학적 귀납법**이 있다. 수학적 귀납법은 첫 번째 도미도가 넘어지고, 그 다음 도미노도 넘어지면, 모든 도미노가 다 넘어진다는 아이디어와 유사한 아이디어의 증명법이라 할 수 있다.

심화(참고)

- 피보나치 수열은 어떤 수열인가요?

피보나치 수열

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

은 19세기 프랑스의 수학자 루카스(Lucas, F. E. A. ; 1842 1891)가 다음 문제의 풀이에 피보나치라는 이름을 사용함으로써 널리 알려지게 되었다.

> 갓 태어난 한 쌍의 토끼가 있다. 이 토끼 한 쌍은 두 달 후부터 매달 새로운 한 쌍의 토끼를 낳으며, 새끼 토끼 한 쌍은 출생 후 두 달이 지나면 역시 매달 새로운 한 쌍의 토끼를 낳는다고 한다. n달 후 토끼는 모두 몇 쌍인가?

피보나치수열은 중요한 성질을 많이 가지고 있는데, 예를 들어 이웃하는 두 항은 모두 서로소이고, 이웃한 두 항의 비의 극한

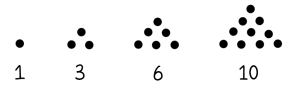
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\cdots\left(a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}},\ \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

은 황금비라 불리는 비인 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\cdots$ 이다. 또 이 수열은 나뭇잎의 배열이나 생물의 성장 등과도 관련이 있는 것으로 알려져 있다.

● 피보나치 수열 이외에 특별한 이름이 붙은 수열은 더 없나요?

피보나치수열 이외에도 특별한 이름이 붙은 수열들이 있다. 대표적인 예로 '삼각수', '사각수', '오각수', ... 라는 이름이 붙은 수열이 있다.

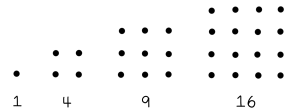
삼각수는



에서 보듯이, 점을 정삼각형 모양으로 배열할 때 필요한 점의 개수로 이루어진 수열로서 일반항이 다음과 같다.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

사각수는

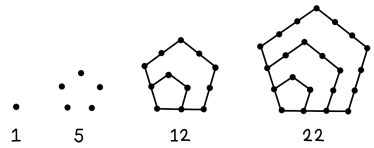


에서 보듯이, 점을 정정사각형 모양으로 배열할 때 필요한 점의 개수로 이루어진 수열로서 일반항이

다음과 같다.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

오각수는



에서 보듯이, 점을 정오각형 모양으로 배열할 때 필요한 점의 개수로 이루어진 수열로서 일반항이 다음과 같다.

$$1+(1+4)+(1+4+7)+\cdots+(1+4+7+\cdots+(3n-2))=\frac{3n^2-1}{2}$$

등차수열等差數列; arithmetic sequence , 공차公差; common difference

정의

등차수열, 공차는 무엇인가요?

수열 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$이 첫째항 a_1에서 시작하여 차례로 일정한 수 d를 더하여 얻은 수열일 때, 즉

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

일 때, 이 수열 $\{a_n\}$을 **등차수열**이라 하고, 일정한 수 d를 이 수열의 **공차**라고 한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차 d는 이웃하는 두 항의 차 $a_{n+1} - a_n$이다. 그러므로 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은 다음과 같다.

등차수열의 일반항

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 수열

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이고 일반항은 $2n-1$이다.

❷ 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열은

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots$$

이고, 일반항은 $3n-1$이다.

❸ 첫째항이 1이고 공차가 -2인 등차수열의 일반항은 $-2n+3$이다.

개념

등차수열을 시각적으로 나타낼 수도 있나요?

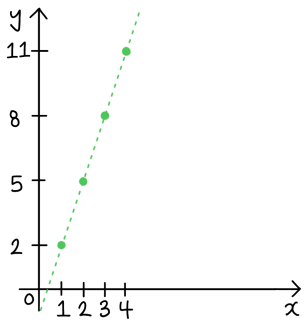
첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열은 일반항이

$$a_n = a + (n-1)d = dn + (a-d) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

이므로 일차함수 $y = dx + (a-d)$의 그래프 위에 일정한 간격으로 점을 찍어 나타낼 수 있다. 예를 들어 일반항이 $a_n = 3n - 1$인 등차수열은 일차함수 $y = 3x - 1$의 그래프 위의 점들

$$(1, 2),\ (2, 5),\ (3, 8),\ \cdots$$

으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.



개념

등차수열의 합은 어떻게 구하나요?

첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

즉,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

은 다음의 공식을 이용하여 구할 수 있다.

등차수열의 합

1. 첫째항이 a, 제 n 항이 l 일 때
$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

2. 첫째항이 a, 공차가 d 일 때
$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

예를 들어, 첫째항이 1 이고 공차가 2 인 등차수열 $\{2n-1\}$ 의 첫째항부터 제50 항까지의 합 S_{50} 을 두 가지 방법으로 구하면 다음과 같다.

❶ 첫째항이 1, 제50 항이 99 이므로

$$\begin{aligned} S_{50} = \sum_{n=1}^{50}(2n-1) &= 1+3+5+\cdots+99 \\ &= \frac{50\times(1+99)}{2} \\ &= 2500 \end{aligned}$$

❷ 첫째항이 1, 공차가 2 이므로

$$\begin{aligned} S_{50} = \sum_{n=1}^{50}(2n-1) &= 1+3+5+\cdots+99 \\ &= \frac{50\times(2\times1+(50-1)\times2)}{2} \\ &= 2500 \end{aligned}$$

개념

등차수열의 합 공식은 어떻게 만드나요?

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 공식을 만들어보자.

이 등차수열의 제 n 항을 l, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l \qquad \cdots(1)$$

이다. (1)의 우변에서 더하는 순서를 거꾸로 하면

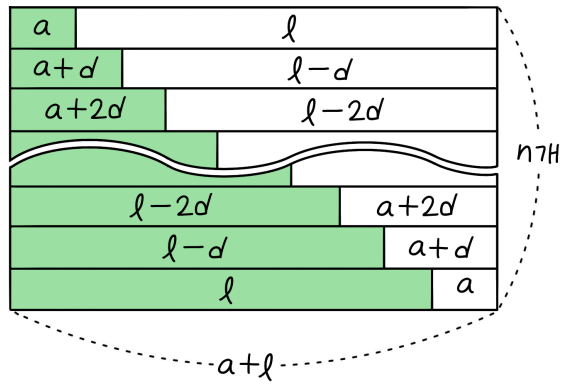
$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+d) + a \qquad \cdots (2)$$

을 얻는다. (1), (2)를 변끼리 더하면

$$2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) = n(a+l)$$

이다. 이로부터 첫번째 공식을 얻는다.

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$$



그리고 $l = a + (n-1)d$를 위 공식에 대입하면, 두번째 공식을 얻는다.

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

의미

등차수열이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

등차수열(等差數列)에서 등(等)은 '같은', 차(差)는 '차이', '수(數)는 '수' 혹은 '숫자', 열(列)은 '늘어놓다' , '펼쳐 놓다' 는 뜻이 있다. 이런 점에서 등차수열(等差數列)은 같은 차이가 있는 수들의 나열을 의미한다.

等	差	數	列
같을 등	차이 차	셈(수) 수	늘어놓을 열

등차수열을 영어로는 arithmetic sequence라고 한다. arithmetic에는 '산술적인'이라는 뜻이 있고, sequence는 '수열'을 의미한다. 이웃한 두 항 사이의 차가 일정한 등차수열에서는 임의의 이웃한 세 항에 대하여 가운데 있는 항이 항상 세 항의 산술평균이 되고, 그 역 또한 성립한다. 이런 이유로 등차수열을 arithmetic sequence이라 한 것으로 보인다.

개념

등차수열은 어디에 사용되나요?

등차수열은 일정한 양만큼 계속해서 커지거나 작아지는 현상을 설명하는데 활용된다. 예를 들어 은행 예금에서의 원금과 이자의 합계인 원리합계를 계산할 때 등차수열이 사용된다.

원금 a원을 연이율 r로 예금할 때, n년 후의 원리합계를 단리법으로 계산해보자.

단리법에 따라 n년 후의 원리합계 S_n을 계산하면

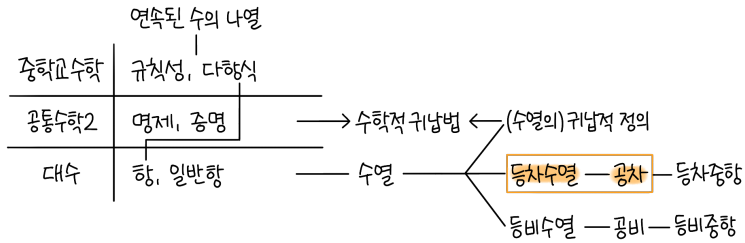
$$\begin{aligned}
&1\text{년 후의 원리합계:} && S_1 = a + ar = a(1+r)\\
&2\text{년 후의 원리합계:} && S_2 = a + ar + ar = a(1+2r)\\
&3\text{년 후의 원리합계:} && S_3 = a + ar + ar + ar = a(1+3r)\\
&&& \vdots\\
&n\text{년 후의 원리합계:} && S_n = a + ar + \cdots + ar = a(1+nr)
\end{aligned}$$

와 같이 되어 S_n은 등차수열을 이룬다는 것을 알 수 있다.

개념

등차수열, 공차와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

등차수열, 공차는 수열, 항, 일반항, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 수열의 귀납적 정의, 수학적 귀납법 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **등차수열**은 첫째 **항**부터 차례대로 일정한 수 즉, **공차**를 더하여 만든 **수열**로서

이웃하는 두 사이의 일정한 차인 공차로 특징지어지는 수열이다. 첫째 항이 a_1이고 공차가 d인 등차수열의 제n항인 **일반항**은 $a_n = dn + a_1 - d$이다. 등차수열의 임의의 이웃한 세 항을 택하면 가운데 항은 항상 세 항의 산술평균이 된다. 이때 가운데 항을 나머지 두 항의 **등차중항**이라 부른다. 한편 이웃하는 두 항 사이의 차가 일정한 등차수열과는 달리 이웃하는 두 항 사이의 비가 일정한 수열을 **등비수열**이라 한다. 이때 일정한 비를 **공비**라고 한다. 등비수열은 첫째항부터 차례대로 일정한 수 즉, 공비를 곱하여 만든 수열이다. 등비수열에서 임의의 이웃하는 세 항을 택하면 가운데 항은 항상 세 항의 기하평균이 된다. 이때 가운데 항을 나머지 두 항의 **등비중항**이라고 부른다. 즉, 등차중항은 그 앞과 뒤의 두 수의 산술평균이고, 등비중항은 기하평균인 것이다. 등차수열은 일반항을 이용하여 $\{dn + a_1 - d\}$와 같이 정의할 수도 있고, 첫째항 a_1과 이웃하는 두 항 사이의 관계 즉, $a_{n+1} - a_n = d$를 이용하여 정의할 수도 있다. 이는 등비수열도 마찬가지이다. 이처럼 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계를 이용하여 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다. 등차수열과 등비수열을 포함한 여러 수열과 수열의 합은 여러 성질을 지니는데, 이들 성질은 자연수 n에 대한 명제의 형태로 나타난다. 이처럼 자연수에 대한 어떤 명제에 대하여 그 명제가 참임을 증명하는 방법으로 **수학적 귀납법**이 있다. 수학적 귀납법은 첫 번째 도미도가 넘어지고, 그 다음 도미노도 넘어지면, 모든 도미노가 다 넘어진다는 아이디어와 유사한 아이디어의 증명법이라 할 수 있다.

심화(참고)

- **등차수열의 일반항 a_n은 전부 n에 대한 일차식 꼴인가요?**

  첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

  $$a_n = a + (n-1)d$$

  이다. 이 식을 정리하면

  $$a_n = dn + (a - d)$$

  이다. 따라서 등차수열의 일반항 a_n은

  (1) 공차가 $d \neq 0$일 때 n의 계수가 d인 n에 대한 일차식 꼴이 된다.

  (2) 역으로 일반항이 n에 대한 일차식인 수열은 n의 계수가 공차인 등차수열이다.

  실제로 일반항이

  $$\alpha n + \beta$$

인 수열은 공차가 α이고 첫째항이 $\alpha+\beta$인 등차수열이다.

또 일반항이 $a_n=1$인 수열은 다음과 같이 모든 항이 1인 수열

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots$$

이다.

- **그럼 등차수열의 합 S_n은 어떤 꼴의 식인가요?**

첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 합 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

즉,

$$S_n=\frac{1}{2}dn^2+\frac{1}{2}(2a-d)n$$

으로 $d\neq 0$일 경우 이차항의 계수가 $\frac{1}{2}d$이고 상수항이 0인 n에 대한 이차식 꼴이다.

역으로 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 상수항이 0인 n에 대한 이차식 꼴인 수열은 S_n의 이차항의 계수에 2를 곱한 수를 공차로 갖는 등차수열이다.

한편 공차가 $d=0$일 경우 $S_n=an$으로 나타내어진다.

예를 들어 첫째항부터 제n항까지의 합이

$$S_n=n^2-3n$$

인 수열은 공차가 2이고 첫째항이 -2인 등차수열로서 일반항은 $a_n=2n-4$이다.

등비수열等比數列; geometric sequence , 공비公比; common ratio

정의

등비수열, 공비는 무엇인가요?

수열 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$이 첫째항 a_1에서 시작하여 차례로 일정한 수 r을 곱하여 얻은 수열일 때, 즉

$$a_{n+1} = ra_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

일 때, 이 수열 $\{a_n\}$을 **등비수열**이라 하고, 일정한 수 r을 이 수열의 **공비**라고 한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 이웃하는 두 항의 비

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (a_n \neq 0)$$

이다. 그러므로 첫째항이 a이고 공비가 $r(r \neq 0)$인 등비수열의 일반항 a_n은 다음과 같다.

등비수열의 일반항

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 수열

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$$

은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이고 일반항은 2^{n-1}이다.

❷ 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열은

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ \cdots$$

이고, 일반항은 $2 \times 3^{n-1}$이다.

❸ 첫째항이 3이고 공차가 -2인 등비수열의 일반항은 $3 \times (-2)^{n-1}$이다.

개념

등비수열을 시각적으로 나타낼 수도 있나요?

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열은 일반항이

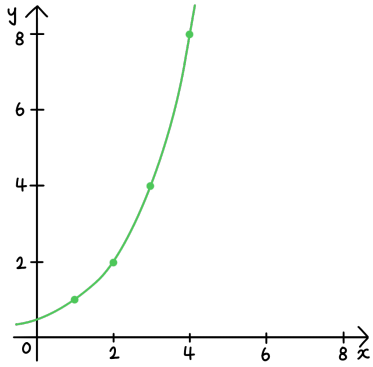
$$a_n = a \times r^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

이므로, $y = a \times r^{x-1}$ 의 그래프 위에 일정한 간격으로 점을 찍어 나타낼 수 있다.

예를 들어 일반항이 $a_n = 2^{n-1}$ 인 등비수열은 지수함수 $y = 2^{x-1}$ 의 그래프 위의 점들

$$(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 4),\ \cdots$$

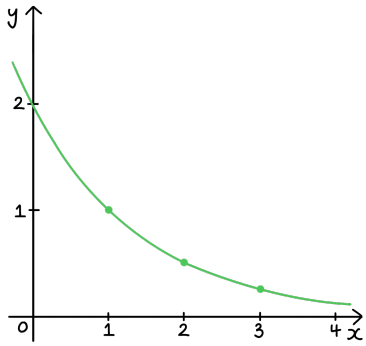
으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.



또 일반항이 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 인 등비수열은 지수함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 의 그래프 위의 점들

$$(1, 1),\ \left(2, \frac{1}{2}\right),\ \left(3, \frac{1}{4}\right),\ \cdots$$

으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.



개념

등비수열의 합은 어떻게 구하나요?

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

즉,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

은 다음의 공식을 이용하여 구할 수 있다.

등비수열의 합

1. $r \neq 1$일 때,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

2. $r = 1$일 때,

$$S_n = na$$

예를 들어, 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10} = \frac{3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$$

이다.

개념

등비수열의 합 공식은 어떻게 만드나요?

첫째항이 a이고 공차가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 공식을 만들어보자.

이 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad \cdots (1)$$

이므로, (1)의 양변에 공비 r을 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \qquad \cdots (2)$$

이 된다. (1)에서 (2)를 변끼리 빼면

$$S_n - rS_n = a - ar^n, \quad \text{즉 } (1-r)S_n = a(1-r^n)$$

이 된다. 따라서 다음이 성립한다.

$r \neq 1$이면 $\qquad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r = 1$이면 (1)에서 $\quad S_n = a + a + \cdots + a = na$

의미 등비수열이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

등비수열(等比數列)에서 등(等)은 '같은', 비(比)는 '비율 혹은 비', 수(數)는 '수' 혹은 '숫자', 열(列)은 '늘어놓다' , '펼쳐 놓다' 는 뜻이 있다. 이런 점에서 등비수열(等比數列)은 같은 비율로 커지거나 작아지는 수들의 나열을 의미한다.

等	比	數	列
같을 등	비율 비	셈(수) 수	늘어놓을 열

등비수열을 영어로는 geometric sequence라고 한다. geometric에는 '기하적인'이라는 뜻이 있고, sequence는 '수열'을 의미한다. 이웃한 두 항 사이의 비가 일정한 등비수열에서는 임의의 이웃한 세 항에 대하여 가운데 있는 항이 항상 세 항의 기하평균이 되고, 그 역 또한 성립한다. '기하평균이 가운데' 라는 조건은 '배율이 일정하다' 는 조건과 사실상 동치이다. 이 동치가 바로 등비수열의 '기하적' 성격을 가장 잘 보여준다. 이런 이유로 등비수열을 geometric sequence이라 한 것으로 보인다.

개념

등비수열은 어디에 사용되나요?

등비수열은 일정한 비율로 커지거나 작아지는 현상을 설명하는데 활용된다. 예를 들어 은행 예금이나 적금에서의 원금과 이자의 합계인 원리합계를 계산할 때 등비수열과 그 합이 사용된다.

1 예금의 원리합계와 등비수열

먼저 원금 a 원을 연이율 r 로 예금할 때, n 년 후의 원리합계를 복리법으로 계산해보자.

복리법에 따라 n 년 후의 원리합계 S_n 을 계산하면 전년도 원리합계가 다음 연도의 원금이 되므로

$$\begin{aligned}
&1\text{년 후의 원리합계:} \quad S_1 = a(1+r)\\
&2\text{년 후의 원리합계:} \quad S_2 = S_1(1+r) = a(1+r)^2\\
&3\text{년 후의 원리합계:} \quad S_3 = S_2(1+r) = a(1+r)^3\\
&\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&n\text{년 후의 원리합계:} \quad S_n = S_{n-1}(1+r) = a(1+r)^n
\end{aligned}$$

과 같이 되어 S_n 은 등비수열을 이룬다는 것을 알 수 있다.

2 적금의 원리합계와 등비수열의 합

다음으로 연이율 r 의 복리로 매년 초에 a 원씩 적립할 때 적립금의 n 년 말의 원리합계를 구해보자.

n 년째 말까지 매년 초에 적립한 금액의 원리합계는 각각 다음과 같다.

	1년 초	2년 초	3년 초	$\cdots$	n년 초	n년 말	원리합계
제1회	a						$a(1+r)^n$
제2회		a					$a(1+r)^{n-1}$
제3회			a				$a(1+r)^{n-2}$
$\vdots$				$\ddots$			$\vdots$
제n회					a		$a(1+r)$

이때, n 년 동안 매년 초에 a 원씩 적립한 금액의 원리합계를 역순으로 나열하면

$$a(1+r),\ a(1+r)^2,\ a(1+r)^3,\ \cdots,\ a(1+r)^{n-1},\ a(1+r)^n$$

이 된다.

따라서 이들의 총합을 S_n이라 하면

$$S_n = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^n$$

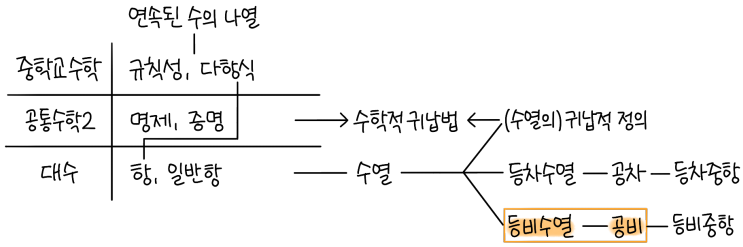
이다. 이것은 첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로, 적립금의 n년 말의 원리합계는 다음과 같다.

$$S_n = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \text{ (원)}$$

개념

등비수열, 공비와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

등비수열, 공비는 수열, 항, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 등비중항, 수열의 귀납적 정의, 수학적 귀납법 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **등비수열**은 첫째 **항**부터 차례대로 일정한 수 즉, **공비**를 곱하여 만든 **수열**로서 이웃하는 두 항 사이의 일정한 비인 공비로 특징지어지는 수열이다. 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열의 제n항인 **일반항**은 $a_n = ar^{n-1}$이다. 등비수열의 임의의 이웃한 세 항을 택하면 가운데 항은 항상 세 항의 기하평균이 된다. 이때 가운데 항을 나머지 두 항의 **등비중항**이라 부른다. 한편 이웃하는 두 항 사이의 비가 일정한 등비수열과는 달리 이웃하는 두 항 사이의 차가 일정한 수열을 **등차수열**이라 한다. 이때 일정한 차를 **공차**라고 한다. 등차수열은 첫째항부터 차례대로 일정한 수 즉, 공차를 더하여 만든 수열이다. 등차수열에서 임의의 이웃하는 세 항을 택하면 가운데 항은 항상 세 항의 산술평균이 된다. 이때 가운데 항을 나머지 두 항의 **등차중항**이라고 부른다. 즉, 등차중항은 그 앞과 뒤의 두 수의 산술평균이고, 등비중항은 기하평균인 것이다. 등비수열은 일반항을 이용하여 $\{ar^{n-1}\}$와 같이 정의할 수도 있고, 첫째항 a_1과 이웃하는 두 항 사이의 관계 즉, $a_{n+1} = ra_n$를 이용하여 정의할 수도 있다. 이는 등차수열도 마찬가지이다. 이처럼 수열을

처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계를 이용하여 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다. 등차수열과 등비수열을 포함한 여러 수열과 수열의 합은 여러 성질을 지니는데, 이들 성질은 자연수 n에 대한 명제의 형태로 나타난다. 이처럼 자연수에 대한 어떤 명제에 대하여 그 명제가 참임을 증명하는 방법으로 **수학적 귀납법**이 있다. 수학적 귀납법은 첫 번째 도미도가 넘어지고, 그 다음 도미노도 넘어지면, 모든 도미노가 다 넘어진다는 아이디어와 유사한 아이디어의 증명법이라 할 수 있다.

등차중항等差中項; arithmetic mean , 등비중항等比中項; geometric mean

정의

등차중항, 등비중항이 무엇인가요?

세 수 a, b, c가 등차수열의 연속된 세 항일 때, b를 a와 c의 **등차중항**이라고 한다. b가 a와 c의 등차중항이면 $b-a=c-b$이므로 다음이 성립한다.

$$b=\frac{a+c}{2}$$

즉, b는 두 수 a, c의 산술평균인 동시에 자기 자신을 포함하는 세 수 a, b, c의 산술평균이다.

한편 0이 아닌 세 수 a, b, c가 등비수열의 연속된 세 항일 때, b를 a와 c의 **등비중항**이라고 한다. b가 a와 c의 등비중항이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 다음이 성립한다.

$$b^2=ac$$

즉, b는 두 수 a, c의 기하평균인 동시에 자기 자신을 포함하는 세 수 a, b, c의 기하평균이다. b가 기하평균이면 $-b$ 역시 기하평균이다.

예

등차중항을 구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 세 수 3, 5, 7은 공차가 2인 등차수열의 연속된 세 항이고, 가운데 항 5는 나머지 두 항 3, 7의 등차중항이다. 즉, $5=\frac{3+7}{2}$이다.

❷ 2, x, 10이 등차수열의 연속된 세 항이면, x는 등차중항이므로

$$x=\frac{2+10}{2}=6$$

이다.

예

등비중항을 구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 세 수 2, 6, 18은 공비가 3인 등비수열의 연속된 세 항이고, 가운데 항 6은 나머지 두 항 2, 18의 등비중항이다. 즉, $6^2=2\times18$이다.

❷ 4, x, 9가 등비수열의 연속된 세 항이면, x는 등비중항이므로

$$x^2 = 4 \times 9 = 36, \quad x = 6 \text{ 또는 } x = -6$$

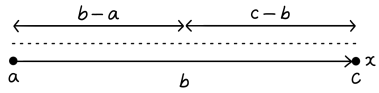
이다.

개념 **등차중항을 시각적으로 나타낼 수도 있나요?**

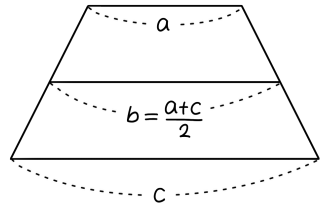
세 수 a, b, c가 등차수열의 연속된 세 항일 때, 등차중항

$$b = \frac{a+c}{2}$$

는 수직선에서 좌표가 각각 a와 c인 두 점의 중점으로 나타낼 수 있다.



또 다음과 같이 두 밑변의 길이가 a와 c인 사다리꼴의 두 옆변의 중점을 이은 선분의 길이로 나타낼 수도 있다.



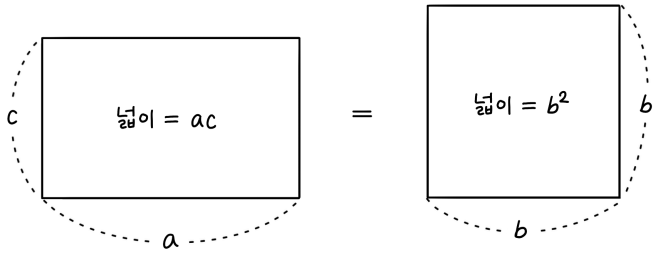
개념 **등비중항을 시각적으로 나타낼 수도 있나요?**

세 수 a, b, c가 등비수열의 연속된 세 항일 때, 등비중항 b에 대하여

$$b^2 = ac$$

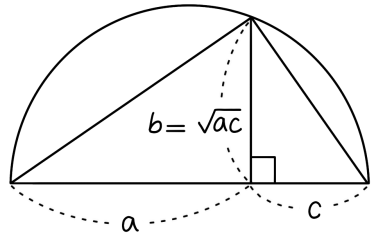
가 성립한다.

등비중항 b는 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 a와 c인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이로 나타낼 수 있다.



$b^2 = ac \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{ac}$

또 다음과 같이 길이가 각각 a와 c인 두 선분을 이어 붙인 선분을 지름으로 하는 반원을 이용하여 나타낼 수도 있다.



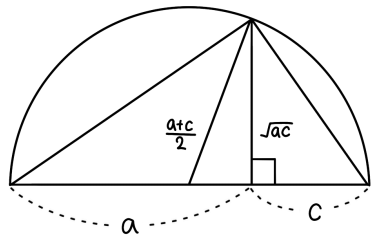
개념

등차중항, 등비중항은 어떤 성질을 가지고 있나요?

두 양의 실수 a와 c의 등차중항 $\frac{a+c}{2}$, 등비중항 $\sqrt{ac}$를 각각 a와 c의 산술평균, 기하평균이라 부른다. 이들 두 평균 사이에는 다음과 같은 절대부등식

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \quad \text{(단, 등호는 } a = c\text{일 때 성립)}$$

이 성립한다. 이것은 다음 그림을 통해 금방 확인할 수 있다.



의미

등차중항, 등비중항이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

등차중항 등차중항(等差中項)에서 등(等)은 '같다'를 뜻하고, 차(差)은 '차이'를 뜻하며 중(中)은 '가운데'를, 항(項)은 수열의 '항'을 뜻한다. 결국 등차중항(等差中項)은 등차수열을 이루는 세 항 중 가운데 있는 항을 의미한다.



등차중항을 영어로는 arithmetic mean이라고 한다. arithmetic mean은 산술평균을 의미한다. 등차수열을 이루는 세 항 중 가운데 있는 항이 세 항의 산술평균이 되기 때문에 그 가운데 항을 arithmetic mean이라 한 것으로 보인다.

등비중항 등비중항(等比中項)에서 등(等)은 '같다'를 뜻하고, 비(比)은 '비율'을 뜻하며 중(中)은 '가운데'를, 항(項)은 수열의 '항'을 뜻한다. 결국 등비중항(等比中項)은 등비수열을 이루는 세 항 중 가운데 있는 항을 의미한다.

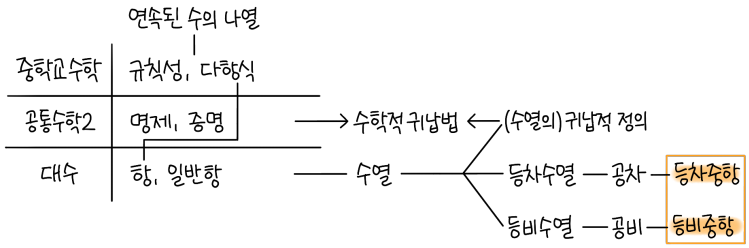


등비중항을 영어로는 geometric mean이라고 한다. geometric mean은 기하평균을 의미한다. 등비수열을 이루는 세 항 중 가운데 있는 항이 세 항의 기하평균이 되기 때문에 그 가운데 항을 geometric mean이라 한 것으로 보인다.

개념

등차중항, 등비중항과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

등차중항, 등비중항은 등차수열, 등비수열, 귀납적 정의와 밀접한 관련이 있고, 〈공통수학 1〉에서 다루는 절대부등식과도 관련이 있다.



등차수열의 연속된 세 항을 a, b, c라 할 때, b는 a와 c의 **등차중항**이고 $b=\dfrac{a+c}{2}$가 성립한다. 역으로 b가 a와 c의 등차중항이면, a, b, c는 등차수열의 연속된 세 항을 이룬다. 이때 a와 c의 등차중항을 a와 c의 산술평균 혹은 평균이라 부르기도 한다.

또 **등비수열**의 연속된 세 항을 a, b, c라 할 때, b는 a와 c의 **등비중항**이고 $b^2=ac$가 성립한다. 역으로 b가 a와 c의 등비중항이면, a, b, c는 등비수열의 연속된 세 항을 이룬다. 이때 a와 c의 등비중항을 a와 c의 기하평균이라 부르기도 한다. 두 양의 실수 a와 c의 등차중항 즉, 산술평균 $\dfrac{a+c}{2}$와 등비중항 즉, 기하평균 $\sqrt{ac}$에 대하여 **절대부등식** $\dfrac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac}$이 성립한다.

한편 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계를 이용하여 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 하는데, 등차중항과 등비중항을 이용하면 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의를 각각 얻을 수 있다. 실제로 첫째항과 둘째항 및 연속된 세 항 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$과 $a_{n+2}=\dfrac{{a_{n+1}}^2}{a_n}$를 이용하여 등차수열과 등비수열을 각각 귀납적으로 정의할 수 있다.

심화(참고)

- **등차중항과 등비중항 이외에 '조화중항'이라는게 있다는데 무엇인가요?**

  두 수 a와 c의 등차중항 $\dfrac{a+c}{2}$와 등비중항 $\sqrt{ac}$ 이외에 '조화중항'이라는 것이 있다. 조화중항은 조화평균이라고도 하며, 두 수 a와 c 각각의 역수의 등차중항 즉, 산술평균의 역수인

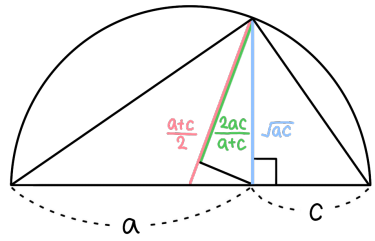
  $$\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}{2}}=\frac{2ac}{a+c}$$

  로 정의된다.

  이때 두 양의 실수 a와 c의 등차중항(산술평균), 등비중항(기하평균), 조화중항(조화평균) 사이에 다음

부등식이 성립한다.

(등차중항) $\geq$ (등비중항) $\geq$ (조화중항) , $\quad \dfrac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \geq \dfrac{2ac}{a+c}$



귀납적 정의(歸納的 定義; inductive [recursive] definition)

정의

수열의 귀납적 정의가 무엇인가요?

수열을 정의할 때 일반항을 구체적인 식으로 나타내기도 하지만 이웃하는 항들 사이의 관계를 이용하여 수열을 정의하기도 한다. 이처럼 처음 몇 개의 항과 이웃하는 항들 사이의 관계를 이용하여 수열을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 귀납적 정의는 다음과 같다.

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

역으로 $a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$로 정의된 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d, \quad \dots, \quad a_n = a_{n-1} + d, \ \dots$$

이므로 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이다.

예를 들어 첫째항 1이고 공차가 3인 등차수열의 귀납적 정의는 다음과 같다.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

역으로 $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$이 주어지면 이로부터 차례로

$$a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$
$$a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$$
$$a_4 = a_3 + 3 = 7 + 3 = 10$$
$$\vdots$$

이 결정되고, 이 수열이 첫째항 1이고 공차가 3인 등차수열임을 알 수 있다

❷ 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 귀납적 정의는 다음과 같다.

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n r \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

역으로 $a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n r$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = a_1 r, \quad a_3 = a_2 r, \quad \cdots, \quad a_n = a_{n-1} r, \ \cdots$$

이므로 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이다.

예를 들어 첫째항이 -2이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 귀납적 정의는 다음과 같다.

$$a_1 = -2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

3 귀납적으로 정의된 수열

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

은 다음과 같은 피보나치수열이다.

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

4 귀납적으로 정의된 수열

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

은 다음과 같은 수열이다.

$$1,\ 3,\ 8,\ 19,\ 42,\ \cdots$$

더 알아보기

수열마다 귀납적 정의는 한 가지밖에 없나요?

각 수열에 대한 귀납적 정의는 여러 가지가 있을 수 있다.

실제로 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 경우 첫째항과 이웃한 두 항 사이의 관계를 이용하여

$$(1)\ a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

와 같이 정의할 수도 있고, 첫째항과 둘째항 및 등차중항을 이용하여 다음과 같이

정의할 수도 있다.

$$(2)\ \begin{cases} a_1 = a,\ a_2 = a + d \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

예를 들어 첫째항이 1, 둘째항이 4인 등차수열은

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

과 같이 정의할 수 있다.

등비수열도 마찬가지이다. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열을 첫째항과 이웃한 두항 사이의 관계를 이용하여

$$(1)\ a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n r \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

와 같이 정의할 수도 있고, 첫째항과 둘째항 및 등비중항을 이용하여 다음과 같이 정의할 수도 있다.

$$(2)\ \begin{cases} a_1 = a,\ a_2 = ar \\ a_{n+2} = \dfrac{{a_{n+1}}^2}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

예를 들어 첫째항이 2, 둘째항이 6인 등비수열은

$$\begin{cases} a_1 = 2,\ a_2 = 6 \\ a_{n+2} = \dfrac{{a_{n+1}}^2}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

과 같이 정의할 수 있다.

의미

귀납적 정의라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

귀납적 정의(歸納的 定義)에서 귀납(歸納)은 '돌아가다'는 뜻을 지닌 귀(歸)와 '들이다, 포함시키다' 를 뜻하는 납(納)의 결합어로 논리학에서 개별적인 특수한 사실이나 원리로부터 일반적이고 보편적인 명제 및 법칙을 유도해 내는 추론의 방식을 의미한다. 또 정의(定義)는 '정하다'는 뜻의 정(定)과 '뜻, 의미'를 뜻하는 의(義)가 결합된 단어로 '뜻을 정한다'는 의미를 지닌다. 결국 귀납적 정의(歸納的 定義)는 몇 가지 개별적인 특수한

사례를 모아 어떤 대상의 일반적이고 보편적인 뜻을 정하는 방식을 의미한다.

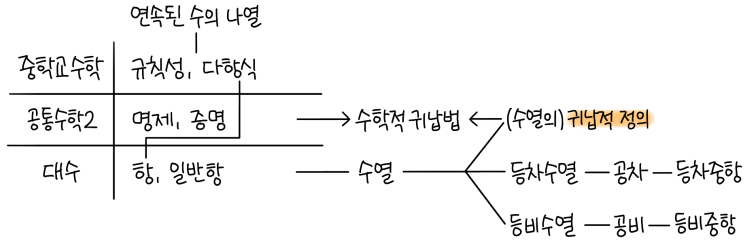
歸	納	的	定	義
돌아갈 귀	들일 납	과녁 적	정할 정	뜻 의

귀납적 정의를 영어로는 inductive [recursive] definition이라고 한다. inductive는 여러 구체적인 사실로부터 일반적인 원리를 이끌어내는 과정을 의미하는 동사인 induce의 형용사형으로 '귀납적인'이라는 뜻이 있고, recursive는 '다시 돌아오는' 이라는 뜻이 있다. 한편, definition은 '뜻을 정하다' 즉, '정의하다'를 뜻하는 동사인 define의 명사형이다. 결국 inductive [recursive] definition은 귀납적인 방식으로 어떤 것의 뜻을 정하는 혹은 정의하는 방식을 의미한다.

개념

귀납적 정의와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

귀납적 정의는 수열, 항, 일반항, 등차수열, 등차중항, 등비수열, 등비중항 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



수열의 **귀납적 정의**는 수열을 처음 몇 개의 **항**과 이웃하는 여러 항 사이의 관계를 이용하여 정의하는 것을 말한다. 수열의 **일반항**을 모르거나 찾기 어려울 경우 귀납적 정의가 유용하게 사용될 수 있다. **등차수열**과 **등비수열** 역시 일반항을 이용하여 정의할 수도 있고, 첫째항과 이웃한 두 항 사이의 관계를 이용하여 귀납적으로 정의할 수 있도 있으며, **등비중항**과 **등차중항**항을 이용한 귀납적 정의도 가능하다.

● **귀납적 정의의 예에는 또 어떤 것이 있나요?**

수열의 일반항이 주어지지 않아도 수열의 첫째항과 그 수열의 이웃한 항들 사이의 관계 즉, 귀납적 정의가 주어지면 수열의 항들을 차례로 찾을 수 있다. 몇 가지 예를 더 살펴보면 다음과 같다.

예 1 귀납적으로 정의된 수열

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (2n-1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

의 항들을 차례로 나열하면

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, \\ &a_2 = a_1 + (2 \times 1 - 1) = 1 + 1 = 2, \\ &a_3 = a_2 + (2 \times 2 - 1) = 2 + 3 = 5, \\ &a_4 = a_3 + (2 \times 3 - 1) = 5 + 5 = 10, \\ &a_5 = a_4 + (2 \times 4 - 1) = 10 + 7 = 17, \\ &\quad \cdots \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이로부터 이 수열의 일반항 a_n을 찾아보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) - 1 \\ &= a_1 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) - 1 \cdot (n-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n + 1 \\ &= n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

예 2 귀납적으로 정의된 수열

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

의 항들을 차례로 나열하면

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, \\ &a_2 = 2a_1 + 1 = 2 + 1, \\ &a_3 = 2a_2 + 1 = 2^2 + 2 + 1, \\ &a_4 = 2a_3 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1, \\ &\quad \cdots \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이로부터 이 수열의 일반항 a_n을 찾아보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

사실 이 수열은 '하노이 탑 문제'라고 불리는 다음 문제와 관련이 있다.

세 개의 기둥과 이 기둥에 꽂을 수 있는 크기가 모두 다른 원판들이 있고, 한 기둥에 원판들이 작은 것이 위에 있도록 순서대로 쌓여 있을 때, 이 원판들을 그 순서 그대로 다른 기둥으로 옮겨서 다시 쌓으려고 한다.



이때 원판은 한 번에 한 개씩 옮겨야 하고 작은 원판 위에 큰 원판을 올려놓으면 안된다. 한 기둥에 있는 n개의 원판을 다른 기둥으로 옮기려면 최소 몇 번 옮겨야 하는가?

한 기둥에 있는 n개의 원판을 다른 기둥으로 옮기려면 다음과 같이 하면 된다.

(1) 먼저, 맨 아래의 가장 큰 원판을 제외한 $(n-1)$개의 원판을 다른 기둥으로 옮긴다. 이때 최소 이동 횟수는 a_{n-1}이다.

(2) 다음으로, 가장 큰 원판을 또 다른 기둥으로 옮긴다. 이때 최소 이동 횟수는 1이다.

(3) 마지막으로, $(n-1)$개의 원판을 가장 큰 원판이 있는 기둥으로 옮긴다. 이때 최소 이동 횟수는 a_{n-1}이다.

이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$$

$a_1 = 1$이므로, n개의 원판을 다른 기둥으로 옮기는데 필요한 최소 이동 횟수 a_n은

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

을 만족한다. 따라서

$$a_n = 2^n - 1$$

이다.

수학적 귀납법(數學的 歸納法; mathematical induction)

정의

수학적 귀납법이 무엇인가요?

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 (i), (ii)를 증명하면 된다.

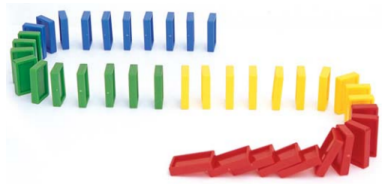
> (i) $p(1)$이 성립한다.
> (ii) $p(k)$가 성립한다고 가정하면 $p(k+1)$이 성립한다.

자연수에 대한 어떤 명제가 참인 것을 위와 같이 증명하는 방법을 **수학적 귀납법**이라고 한다.



수학적 귀납법의 원리를 조금만 더 쉽게 설명해 주세요.

수학적 귀납법의 원리는 도미노 놀이에서 도미노 블록이 넘어지는 원리와 매우 유사하다. 도미노 놀이란 도미노 블록을 일정한 간격으로 세운 뒤 첫번째 도미노 블록을 쓰러뜨려 맨 마지막 도미노 블록까지 모두 쓰러뜨리는 놀이를 말한다.



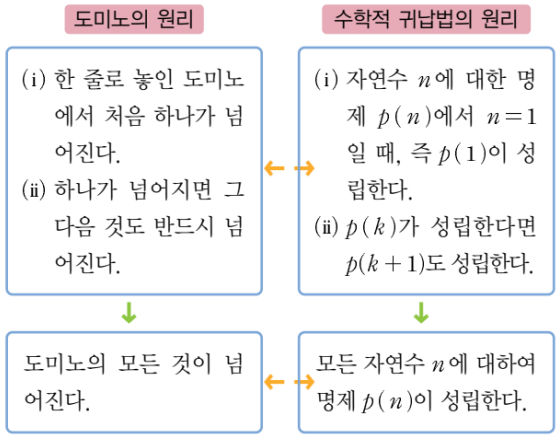
이때 도미노 블록이 모두 넘어지기 위해서는 다음 두 조건이 필요하다.

> (i) 첫번째 블록이 넘어진다.
> (ii) 한 블록이 넘어지면 그 다음 블록도 반드시 넘어진다.

도미노 놀이에서 이 두 조건이 모두 충족되면, 첫번째 도미노 블록으로부터 시작하여 두 번째, 세 번째, ... 도미노 블록이 계속해서 쓰러지면서 결국 모든 도미노 블록이 쓰러지게 된다.

이것은 수학적 귀납법에서 두 조건을 모두 증명하면, $p(1)$부터 시작하여 $p(2)$, $p(3)$, $\cdots$이 계속해서 참이 되고 결국 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이 됨을 보이는 수학적 귀납법의 원리와 매우 유사하다.

도미노 놀이와 수학적 귀납법의 원리를 비교해보면 다음과 같다.



예 **구체적인 예를 들어 설명해 주세요.**

1 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명해보자.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

증명 (i) $n=1$일 때, 좌변은 1, 우변은 $\frac{1(1+1)}{2}=1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면,

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

이다. 이 등식의 양변에 $k+1$을 더하면

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}$$

이다. 즉, $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

이로부터

$n=1$일 때 등식이 성립하면, $n=2$일 때에도 등식이 성립한다.

$n=2$일 때 등식이 성립하면, $n=3$일 때에도 등식이 성립한다.

$n=3$일 때 등식이 성립하면, $n=4$일 때에도 등식은 성립한다.

$\cdots$

그런데 (i)에서 $n=1$일 때 등식이 성립함을 보였으므로 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 일 때 즉,

모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립한다.

2 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명해보자.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

증명 (i) $n=1$일 때 (좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$이므로, 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

이다. 이 등식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&=\frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}\\
&=\frac{(k+1)\{2k^2+7k+6\}}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
&=\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}
\end{aligned}$$

이다. 즉, $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식이 성립한다.

3 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명해보자.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

증명 (i) $n=1$일 때 (좌변)$=1^3=1$, (우변)$=\dfrac{1}{4}\times 1^2\times 2^2=1$ 이므로, 등식이

성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

이다. 이 등식의 양변에 $(k+1)^3$ 을 더하면

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2[k^2+4(k+1)]\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2\end{aligned}$$

이다. 즉, $n=k+1$ 일 때에도 등식이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 등식이 성립한다.

더 알아보기

1이 아닌 m 이상의 모든 자연수에 대한 증명도 가능한가요?

자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 m 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 앞의 수학적 귀납법 (i)에서 $p(1)$ 대신 $p(m)$ 이 성립함을 보이면 된다.

예를 들어,

$h>0$ 일 때, $n\geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명해보자.

$$(1+h)^n>1+nh$$

증명 (i) $n=2$ 일 때 (좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=1+2h$ 이고 $h^2>0$ 이므로

$$(1+h)^2>1+2h$$

이다. 즉, $n=2$ 일 때 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면,

$$(1+h)^k > 1+kh$$

이다. 이제 $n=k+1$일 때 부등식이 성립하는지 확인하여 보자. $1+h>0$이므로

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2$$

이다. 그런데 $kh^2>0$이므로

$$1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h$$

이다. 따라서

$$(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h$$

이다. 즉, $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립한다.

의미

수학적 귀납법이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

수학적 귀납법(數學的 歸納法)에서 수학(數學)은 '수(숫자)'를 뜻하는 수(數)와 '배우다, 학문' 를 뜻하는 학(學)의 결합어로 말 그대로 수학이라는 과목이나 학문 분야를 의미한다. 또 귀납법(歸納法)은 '돌아가다'는 뜻을 지닌 귀(歸), '들이다, 포함시키다' 를 뜻하는 납(納), '방법, 원리'를 뜻하는 법(法)의 결합어로 논리학에서 개별적인 특수한 사실이나 원리로부터 일반적이고 보편적인 명제 및 법칙을 유도해 내는 추론 방식인 귀납(歸納)에 방법 또는 원리를 의미하는 법(法)을 덧붙인 것이다. 결국 수학적 귀납법(數學的 歸納法)은 수학(數學)에서 귀납(歸納)적인 사고를 이용해 수학 명제를 증명하는 방법(法)을 의미한다.

數	學	的	歸	納	法
셈(수) 수	배울 학	과녁 적	돌아갈 귀	들일 납	법 법

수학적 귀납법을 영어로는 mathematical induction이라고 한다. mathematical에는 '수학적인'이라는 뜻이 있고 induction에는 '귀납'이라는 뜻이 있으므로, mathematical induction은 '수학적인 귀납'을 뜻하는데, 여기에 추론하는 방법을 뜻하는 '법'을 덧붙여 수학적 귀납법이라 한 것으로 보인다. 그러나 수학적 귀납법은 induction(귀납)이라는 용어를 사용하지만 귀납이 아니라 deduction(연역)이다.

개념

수학적 귀납법은 귀납적 정의와 어떤 차이가 있나요?

수학적 귀납법과 귀납적 정의는 둘다 '귀납'이라는 이름이 포함되어 있어 비슷해 보이지만, 그 의미와 역할은 완전히 다르다.

귀납적 정의는 수열을 몇 개의 항과 항들 사이의 관계를 이용하여 정의하는 방법으로서 앞의 항을 이용해 다음 항을 귀납적으로 찾아낼 수 있게 해주는 즉, 수열의 항들을 '귀납적으로 생성하는 방법 또는 규칙' 을 제시하는 것이다. 예를 들어 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3$과 같이 한 개 혹은 몇 개의 항에 대한 정보와 이웃한 항들 사이의 관계를 통해 수열의 다른 항들을 순차적으로 하나씩 생성해 가도록 해주는 것이 바로 수열의 귀납적 정의의 역할이다.

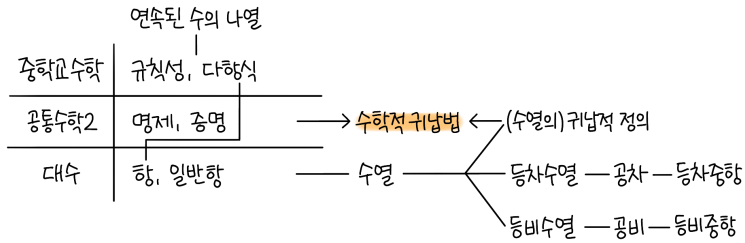
반면 수학적 귀납법은 어떤 명제가 모든 자연수에 대해 성립함을 '연역적으로 증명하는 방법'이다. 즉, 어떤 명제가 $n = 1$일 때 성립함을 보이고, $n = k(k \geq 2)$에서 성립한다고 가정했을 때 $n = k + 1$에서도 성립함을 보이면, 모든 자연수 n에 대해 그 명제가 참임을 증명할 수 있다.

결국 귀납적 정의는 수학적인 대상 즉, 수열의 항들을 생성해내는 규칙 또는 방법이고, 수학적 귀납법은 수학적인 대상의 성질이 모든 자연수에 대하여 참이 됨을 증명하는 방법인 것이다.

개념

수학적 귀납법과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

수학적 귀납법은 〈공통수학2〉에서 다루는 명제, 증명 등의 용어 및 개념과 관련이 있고, 수열, 등차수열, 등비수열 등의 용어 및 개념과도 관련이 있다.



수학적 귀납법은 수학에서 어떤 명제가 모든 자연수 n에 대하여 또는 m(m은 2 이상의 자연수) 이상의 모든 자연수에 대하여 성립함을 보이는 증명 방법이다. 그러므로 등차수열과 등비수열을 포함한 수열과 수열의 합에 대한 여러가지 성질을 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다.

미적분 I

머 리 말

이 자료는 2022 개정 교육과정의 〈미적분I〉에서 다루는 다음의 수학 용어들을 설명하고 안내하기 위해 마련되었습니다.

〈미적분I〉의 수학 용어 목록

- 구간, 닫힌구간, $[a,b]$, 열린구간, (a,b), 반닫힌구간, 반열린구간, $[a,b)$, $(a,b]$, 수렴, 극한(값), $\lim_{x\to a} f(x)$, 좌극한, $\lim_{x\to a-} f(x)$, 우극한, $\lim_{x\to a+} f(x)$, 발산, 무한대, ∞, 연속, 불연속, 연속함수, 최대 · 최소 정리, 사잇값 정리,
- 증분, Δx, Δy, 평균변화율, 순간변화율, 미분계수, $f'(x)$, 미분가능, 도함수, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, 롤의 정리, 평균값 정리, 증가, 감소, 극대, 극소, 극값, 극댓값, 극솟값,
- 부정적분, $\int f(x)dx$, 적분상수, 정적분, $\int_a^b f(x)dx$, $\left[F(x)\right]_a^b$

각 수학 용어에 대한 설명/안내 자료를 찾아가는 방법은 다음과 같습니다.

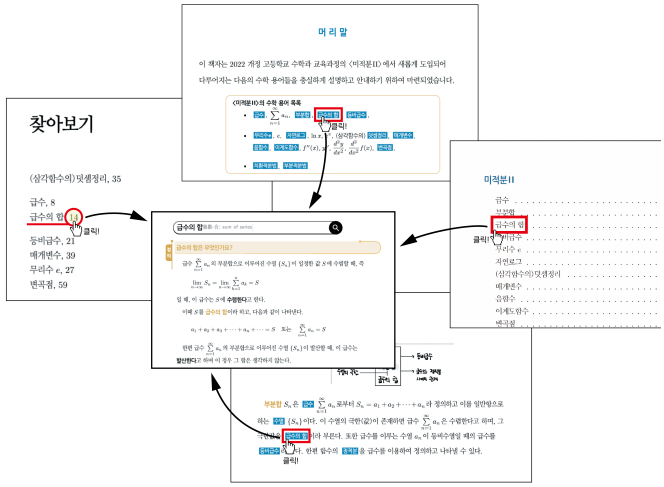
용어 설명 찾아가는 방법

(방법1) 위 목록의 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.

(방법2) [차례]에 있는 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.

(방법3) 맨 뒤 [찾아보기]에 있는 용어 옆 숫자(쪽수)를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.

(방법4) 자료 본문에서 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.



고등학생이 각 수학 용어를 이해하는 과정에서 자연스럽게 제기할 수 있는 질문 및 교사가 고등학생의 수학적 사고를 유도하기 위해 제기할 수 있는 질문을 중심으로 묻고 답하는 문답 방식으로 자료를 구성하였습니다. 이 자료가 고등학교 수학 용어 및 관련 학습 내용에 대하여 학생 스스로 질문을 던지고 질문에 대한 답을 탐색하는 습관을 형성하는데 기여하고, 수학 교사가 학생의 이런 습관 형성과 의미 있는 수학적 사고 활동을 안내하는 데 활용되기를 바랍니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점

이 자료는 고등학생이 각 수학 용어를 정확하고 명료하게 이해하기 위해 필요한 용어의 뜻(정의), 표현, 구체적인 예 등의 기본적인 내용 뿐 아니라 더 알아보기 질문을 통해 그 용어에 대한 고등학생의 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용, 더 나아가 용어 관련 다양한 참고 자료와 대학 수준의 보다 심화 확장된 내용까지 심화(참고)를 통해 폭넓게 다루고자 하였습니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점을 살펴보면 다음과 같습니다.

[자료의 짜임새]

	기본	더 알아보기	심화(참고)
내용	고등학생의 수학 용어에 대한 정확하고 명료한 이해에 필요한 정의, 의미, 예 등의 기본 내용으로 구성	고등학생의 수학 용어에 대한 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용으로 구성	대학 수준의 심화 학습을 원하는 고등학생, 수업을 준비하는 교사(혹은 예비교사)를 위한 [기본]과 [더 알아보기]의 내용을 더욱 심화한 내용 및 참고 자료로 활용 가능한 내용으로 구성
특징	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 모든 내용이 용어가 도입되는 과목 교육과정의 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 범위를 벗어날 수 있음. 단, 설명에 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙은 해당 과목 교육과정 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용 및 이때 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어날 수 있음

[자료의 활용]

고등학생	수학 용어에 대한 교과서 중심의 기본적이고 핵심적인 의미와 내용을 이해를 원하는 학생은 기본에 해당하는 내용을 읽고 공부하면 됩니다. 기본에 해당하는 내용을 토대로 좀 더 깊이 있는 이해를 원하는 학생은 더 알아보기의 내용을 읽으면 도움이 될 수 있습니다. 심화(참고)의 내용은 참고 자료로서 "아, 이런 내용도 있구나." 정도로 이해하거나, 읽지 않아도 됩니다.
(예비)교사	기본에 해당하는 내용은 모든 학생에게 가르쳐야 할 내용입니다. 더 알아보기와 심화(참고)의 내용은 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정 범위를 벗어난 학생의 질문에 답하거나 심화 탐구 활동 자료로 활용 가능합니다.

[활용 시 유의점]

더 알아보기와 심화(참고)의 내용 중에는 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어나는 내용이 포함되어 있습니다. 특히 심화(참고)의 내용은 대학 학부 수준의 내용을 포함하기도 합니다. 그러므로 고등학교 수학 교사가 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용할 때는 신중한 주의가 필요합니다. 특히 평가에 교육과정의 범위를 벗어나는 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용하지 않도록 유의할 필요가 있습니다.

구간區間; interval

정의

구간이 무엇인가요?

두 실수 a와 b $(a<b)$에 대하여 집합

$$\{x \mid a \le x \le b\}, \quad \{x \mid a < x < b\}, \quad \{x \mid a \le x < b\}, \quad \{x \mid a < x \le b\}$$

를 **구간**이라 하며, 이것을 기호로 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$[a,b], \quad (a,b), \quad [a,b), \quad (a,b]$$

이때 $[a,b]$를 **닫힌구간**, (a,b)를 **열린구간**이라 하고, $[a,b)$와 $(a,b]$를 **반닫힌구간** 또는 **반열린구간**이라 한다.

또, 실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid x \le a\}, \quad \{x \mid x < a\}, \quad \{x \mid x \ge a\}, \quad \{x \mid x > a\}$$

도 구간이라 하며, 이것을 기호로 각각 다음과 같이 나타낸다.

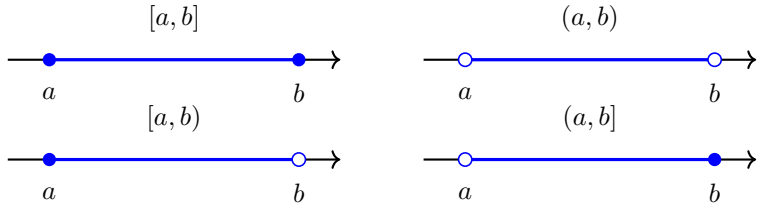
$$(-\infty,a], \quad (-\infty,a), \quad [a,\infty), \quad (a,\infty)$$

특히, 실수 전체의 집합도 구간이며 기호로 $(-\infty,\infty)$와 같이 나타낸다.

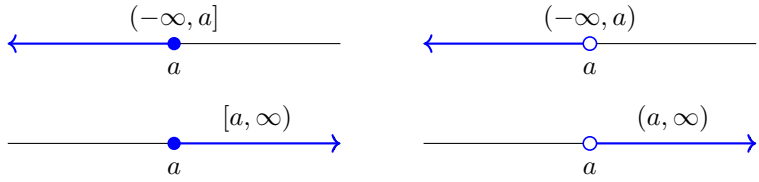
개념

구간을 시각적으로 나타낼 수 있나요?

실수 전체의 집합을 직선으로 나타내고 실수 하나 하나를 직선의 점 하나 하나에 대응시켜 나타내듯이, 실수 전체의 집합의 부분집합인 닫힌구간 $[a,b]$, 열린구간 (a,b), 반닫힌구간 또는 반열린구간 $[a,b)$와 $(a,b]$ 역시 수직선에 나타낼 수 있는데, 보통 다음과 같이 나타낸다.



또한, 구간 $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $[a, \infty)$, (a, ∞)는 다음과 같이 나타낸다.



의미

구간라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

'구(區)'는 '나누다', '경계를 짓다'라는 뜻이며, '간(間)'은 '사이', '틈', '거리'라는 뜻이다. 즉, '구간'은 수직선 위에서 특정 지점 사이를 **구**획지은 **간**격, 즉 두 수 사이의 정해진 범위를 의미한다.

區 구분할 구　　間 사이 간

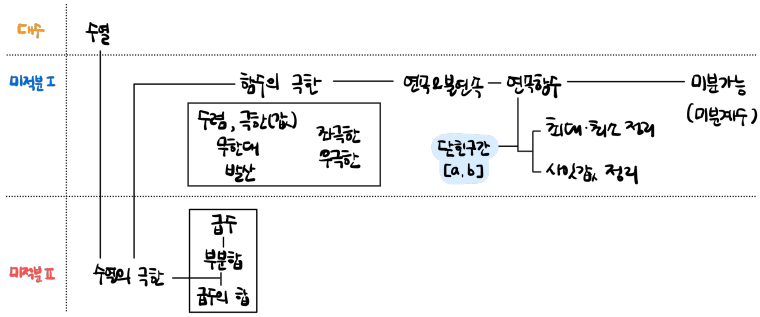
구간을 영어로는 interval이라 하며, 라틴어 *inter-* (사이의)와 *vallum* (울타리, 경계)에서 유래하여, 두 경계 사이의 공간이라는 뜻을 가진다.

또한, '닫힌구간'은 closed interval, '열린구간'은 open interval, '반닫힌구간'은 half closed interval, '반열린구간'은 half open interval이라 한다.

개념

구간과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

구간은 실수 전체의 부분집합을 나타내는 기호일 뿐 아니라 연속함수와 관련된 중요한 성질이 성립하기 위한 조건의 역할을 한다는 점에서 연속함수, 최대 · 최소 정리, 사잇값 정리 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이있다.



실제로 **최대 · 최소 정리**와 **사잇값 정리**는 둘 다 연속함수의 가장 중요한 중요한 성질들 중 일부인데, 이들 정리가 성립하기 위해서는 주어지는 함수가 '**닫힌구간** $[a, b]$에서 **연속**'이라는 조건이 반드시 필요하며, 이 조건이 충족되지 않으면 두 정리 모두 일반적으로 성립하지 않는다.

심화(참고)

- **열린구간과 닫힌구간은 어떻게 구분하나요?**

  열린구간, 닫힌구간, 반열린구간과 반닫힌구간의 엄밀한 정의는 다음과 같다.

  열린구간이란, 구간 (a, b)에 속하는 임의의 점 c에 대하여 $(c-\delta, c+\delta) \subset (a, b)$를 만족하도록 적당한 $\delta > 0$를 항상 잡을 수 있으면 (a, b)는 열린구간이라고 정의한다.

  한편 **닫힌구간**이란 그 여집합이 열린구간인 경우로 정의한다. 즉 구간 $[a, b]$에 대하여 그 여집합은 $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$이고, 이 집합에 속하는 임의의 점 c에 대하여 $(c-\delta, c+\delta)$가 그 집합의 부분집합이 되도록 하는 적당한 $\delta > 0$를 항상 잡을 수 있으므로 구간 $[a, b]$의 여집합이 열린집합이다. 따라서 $[a, b]$는 닫힌구간이다.

  이러한 방법으로 구간 $(-\infty, a)$와 구간 (a, ∞)는 열린구간임을 알 수 있다. 한편 구간 $(-\infty, a]$의 경우 그 여집합이 구간 (a, ∞)가 되어 열린구간이므로 구간 $(-\infty, a]$는 닫힌구간이다. 마찬가지로 구간 $[a, \infty)$도 그 여집합이 구간 $(-\infty, a)$이 되어 열린구간이므로 구간 $[a, \infty)$은 닫힌구간이다.

  한편, 실수 전체의 집합과 공집합은 열린구간이면서 동시에 닫힌구간이다.

수렴收斂; convergence 과 극한(값)極限(値); limit

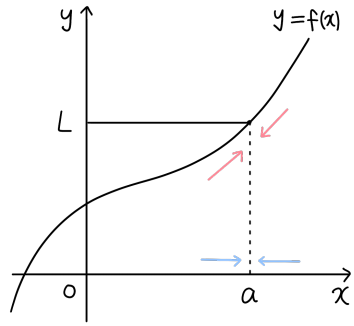
정의

수렴과 극한(값)은 무엇인가요?

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 수 L에 한없이 가까워지면, 'x의 값이 a에 한없이 가까워질 때(혹은 $x \to a$일 때), 함수 $f(x)$는 L에 **수렴**한다'고 하고, 이것을 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$

이때 L을 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 **극한값** 또는 **극한**이라 한다.



한편, $x \to a$일 때 함수 $f(x)$가 수렴하지 않으면, $x \to a$일 때 함수 $f(x)$는 **발산**한다고 한다.

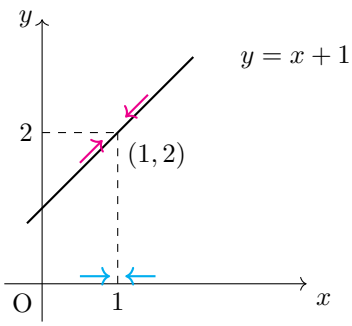
예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

1 함수 $f(x) = x + 1$에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워지면 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다. 따라서 $x \to 1$일 때, $f(x)$는 2에 수렴한다. 즉,

$$\lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

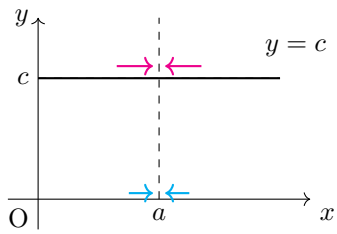
이다.



❷ 상수함수 $k(x) = c$ (c는 상수)는 모든 x의 값에 대하여 함숫값이 c이므로 a의 값에 관계없이 항상 c에 수렴한다. 즉, 모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} c = c$$

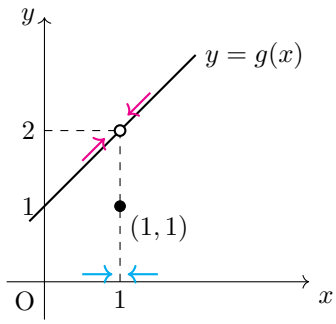
이다.



개념

$x = a$에서의 극한값은 $x = a$에서의 함숫값과 같은가요?

꼭 그렇지는 않다. $x = a$에서의 극한값과 $x = a$에서의 함숫값은 같을 수도 있지만, 서로 다를 수도 있다. 예를 들어, 예제 1번의 함수 $f(x) = x + 1$에서는 $x = 1$에서의 극한값과 함숫값이 2로서 서로 같다. 하지만, 함수 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ 에서는



$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

이므로 $x=1$에서의 극한값이 2이지만, 함숫값은 1로서 두 값이 서로 다르다.

한편, 1을 제외한 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$을 생각해 보자. $x=1$에서 함수 $h(x)$가 정의되지 않으므로 $h(1)$의 값은 없다. 그러나 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때 $h(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to 1} h(x)=2$이다. 즉, 이 경우 $x=1$에서 함숫값은 없지만, 극한값은 존재한다.

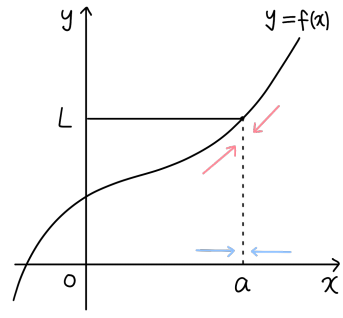
이처럼 $x=a$에서 함수의 극한값과 함숫값은 둘 다 존재하는 경우도 있고, 둘 중 적어도 하나가 존재하지 않는 경우도 있다. 또, 둘 다 존재하더라도 두 값이 다른 경우도 있고, 두 값이 같은 경우도 있다. (이런 경우 그 함수는 '$x=a$에서 **연속**이다'라고 한다.) 특히 a가 정의역의 원소가 아닌 경우, $x=a$에서의 함숫값은 존재하지 않지만 $x=a$에서의 극한값은 존재할 수 있다.

개념

함수의 그래프를 이용하여 극한값을 찾는 방법이 있나요?

함수의 그래프를 보고 극한값을 알아내려면 그래프에서 점이 어떻게 움직이는지 살펴보면 된다.

x축에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, 그래프의 점 $(x, f(x))$가 일정한 점 (a, L)에 한없이 가까이 다가간다면, 이로부터 $x=a$에서의 $f(x)$의 극한값이 L이 됨을 알아낼 수 있다.



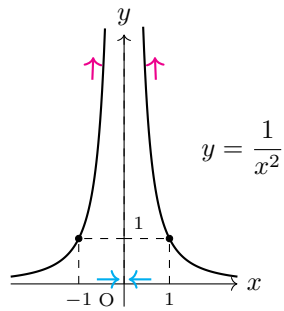
특히 x축에서 x가 a보다 작은 쪽과 큰 쪽에서 한없이 a에 가까워질 때 그래프에서 점 $(x, f(x))$가 각각 어떤 점으로 한없이 가까이 다가가는지 확인해야 한다. 두 경우 모두 같은 점으로 한없이 가까이 다가갈 때 극한값이 존재하고, 그 점의 y 좌표가 $x=a$에서의 극한값이 된다.



극한값이 존재하지 않는 것도 그래프에서 확인할 수 있나요?

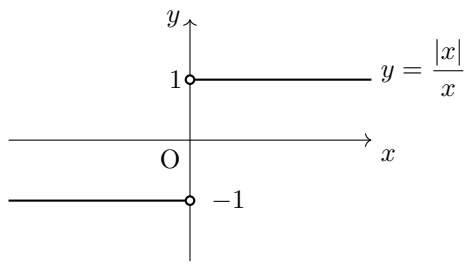
함수의 그래프에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때 그래프의 점 $(x, f(x))$가 일정한 한 점 (a, L)에 한없이 가까이 가지 않는 경우에는 극한값이 존재하지 않는다. 구체적으로 다음과 같은 경우들이 있을 수 있다.

❶ 첫째, x의 값이 a에 한없이 가까이 갈 때 $f(x)$의 값이 한없이 커지거나 한없이 작아지는 경우이다. 예를 들어 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$을 생각해보자.



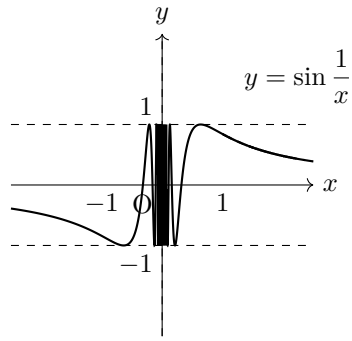
위 그래프에서 $x \to 0$일 때 $f(x)$의 값은 한없이 커진다. 이 경우 $f(x)$의 값이 일정한 하나의 수에 한없이 가까이 가지 않으므로 $x=0$에서 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

❷ 둘째, x의 값이 a보다 작은 쪽에서 한없이 가까이 갈 때와 큰 쪽에서 한없이 가까이 갈 때 $f(x)$의 값이 가까이 가는 값이 서로 다른 경우이다. 예를 들어 함수 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$를 생각해보자.



0보다 작은 쪽에서 x가 0에 가까워질 때 $f(x)$는 -1에 가까워지고, 0보다 큰 쪽에서 x가 0에 가까워질 때 $f(x)$는 1에 가까워진다. 이 경우 역시 $f(x)$의 값이 일정한 하나의 수에 한없이 가까이 가는 것이 아니므로 $x=0$에서 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

3 셋째, x의 값이 a에 한없이 가까이 갈 때 $f(x)$의 값이 일정한 그 어느 한 값으로도 가까이 가지 않는 경우이다. 예를 들어 다음에 제시된 함수 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$의 그래프를 살펴보자.



위 그래프에서 $x\to 0$일 때 $f(x)$의 값은 -1과 1 사이를 끊임없이 오르락 내리락 하면서 일정한 그 어느 하나의 수로도 가까이 가지 않음을 알 수 있다. 그러므로 $x=0$에서 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

이처럼 함수 $f(x)$의 그래프에서 $x\to a$일 때 점 $(x, f(x))$가 일정한 한 점 (a, L)로 한없이 가까이 가지 않고 한없이 커지거나 한없이 작아지는 경우 또는 x의 값이 a에 가까이 가는 방향이나 방법에 따라 둘 이상의 점으로 가까이 가거나 그 어느 한 점으로도 가까이 가지 않을 때에는 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

의미

수렴과 극한(값)이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

수렴 '수(收)'는 '거두다', '모으다'는 뜻이며, '렴(斂)'은 '얽히다', '합쳐지다'는 뜻을 가진다. 즉, '수렴'은 여러 값이나 함수의 값이 하나의 일정한 값에 점점 가까워지는 것을 의미한다.

收 거둘 수　　斂 거둘 렴(염)

영어로는 convergence라 하며, 라틴어 *com-* (함께)와 *vergere* (기울다, 향하다)에서 유래하여 '같은 방향으로 향한다'는 뜻으로, 여러 값이 하나로 모이는 개념을 잘 나타낸다.

극한(값) '극(極)'은 '끝', '더 이상 갈 수 없는 지점', '한(限)'은 '경계', '제한'을 의미하므로, '극한(값)(極限(値))'은 어떤 값이나 함수의 값이 특정한 값에 한없이 가까워질 때, 그 가까워지는 목표값을 의미한다.

極 극진할 극　　限 한할 한　　値 값 치

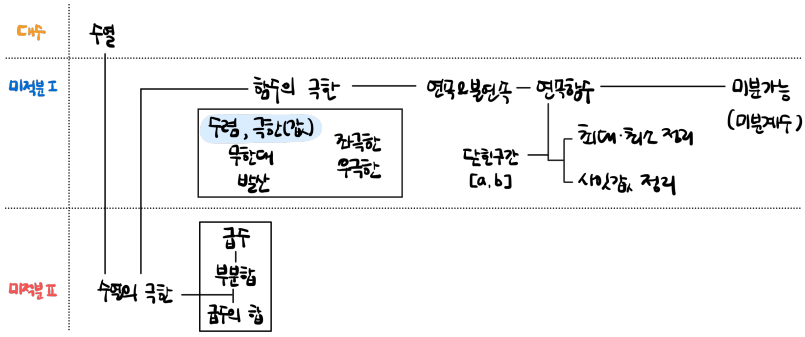
영어로는 limit이라 하며, 라틴어 *līmitis*는 '경계(boundary)' 또는 '끝선'을 뜻하며, 이는 함수나 수열이 어떤 경계값을 향해 가까워지는 수학적 개념을 잘 나타낸다.

- 기호 lim은 극한을 뜻하는 limit의 약자이며, '리미트'라고 읽는다.
- $x \to a$는 $x \neq a$이면서 x의 값이 a에 한없이 가까워짐을 뜻한다.

개념

수렴과 극한(값)과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

함수의 수렴, 극한(값)은 함수의 발산, 좌극한, 우극한, 연속, 미분가능, 미분계수 등의 용어 및 개념뿐 아니라 수열의 수렴, 발산, 극한(값), 급수, 급수의 합 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



$x=a$에서 함수 $f(x)$가 **발산**한다는 것은 **수렴**하지 않는다는 것을 의미하고, $x=a$에서 $f(x)$의 **좌극한**과 **우극한**을 모두 생각할 수 있는 경우에는 이들 두 극한(값)이 일치해야 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 수렴하게 된다. 특히 그 **극한(값)**이 함숫값 $f(a)$와 같을 때 '$f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이다'고 한다. 또 $x=a$에서 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 극한(값)이 존재할 때 즉, 수렴할 때 '$f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다'고 하며 그 극한(값)을 $x=a$에서의 $f(x)$의 **미분계수**라 부른다.

한편 수열에 대해서도 수렴, 발산, 극한(값) 즉, 수열의 극한을 생각할 수 있고, 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 일반항으로 하는 수열인 **급수**에 대해서도 수렴, 발산을 생각할 수 있다. 급수가 수렴할 때 그 극한(값)을 **급수의 합**이라 부른다.

심화(참고)

- **극한은 왜, 누가, 언제 도입하였나요?**

  극한의 개념은 고대 그리스 수학자 유클리드(Euclid, B.C. 325? ~ B.C. 265?)와 아르키메데스(Archimedes, B.C. 287? ~ B.C. 212)부터 다양한 방식으로 연구되었다. 그러나 이들의 접근은 직관적인 접근 방식으로 오늘날과 같은 극한에 대한 정확한 정의를 갖춘 개념은 아니었다.

  유클리드는 『원론』의 제11권부터 제13권까지에서 입체기하학을 다루면서, 사면체, 원기둥, 원뿔, 구와 같은 입체 도형들의 부피를 계산할 때 극한 개념을 활용하였다.

  아르키메데스는 유클리드의 방법을 발전시켜 도형의 넓이나 부피를 구할 때 급수의 합을 활용하였다. 그는 원에 내접하거나 외접하는 정다각형을 만들어 원주율의 범위를

  $$\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7} \Rightarrow 3.1408\cdots<\pi<3.1428\cdots$$

  로 구하였다. 이 과정은 정다각형의 변의 개수를 늘릴수록 정다각형이 원에 가까워 진다는 사실로부터, 정다각형의 넓이가 원의 넓이에 가까워진다는 사실을 이용하여 극한의 개념을 직관적으로 사용하였다.

이러한 직관적인 접근 방식이 오늘날 극한 개념의 초기 형태라고 할 수 있다.

유클리드와 아르키메데스의 결과로부터 많은 수학자들은 무한히 작은 양을 다루는 무한소 해석학(infinitesimal analysis)을 연구하게 되었다. 17세기에 들어서면서 데카르트(Descartes, R., 1596~1650), 파스칼(Pascal, B., 1623~1662), 페르마(Fermat, P., 1601~1665) 등은 무한소를 사용하여 함수의 순간적인 변화량을 분석하고, 곡선의 접선에 대하여 연구하였고, 특히 페르마의 연구는 훗날 미적분이 탄생하는 데 중요한 출발점이 된 것으로 알려져 있다. 무한소 해석학의 핵심은 극한 개념에 의존하고 있어 당시에는 무한소에 대한 결과들은 극한이 엄밀히 정의되지 않아 논리적 기반이 부족하였다.

현대의 극한의 개념은 미분적분학을 뉴턴(Newton, L., 1642~1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)가 발견하면서 본격적으로 발전하기 시작하였다. 이후 오일러(Euler, L., 1707~1783), 라그랑주(Lagrange, J. L., 1736~1813), 볼차노(Bolzano, B. P. J., 1781~1848), 코시(Cauchy, A. L., 1789~1857) 등에 의해 오늘날의 수학 체계로 정리되었다.

특히, 코시는 무한소를 변수로 명확히 정의하고, 오늘날 사용되는 극한 개념을 정립하였다. 그는 극한 개념을 바탕으로 수열의 극한과 급수의 수렴을 수학적으로 엄밀하게 설명함으로써, 극한 이론을 수학적으로 체계화하는 데 기여하였다.

- **$\lim_{x\to a} f(x) = L$이라는 극한값의 정의를 수학적으로 엄밀히 표현하면 어떻게 되나요?**

x가 a에 가까워질 때 함숫값 $f(x)$가 L에 가까워지면 극한값이 L이라고 한다. 그러나 이를 수학적으로 엄밀하게 표현하기 위해 ε-δ 정의를 사용한다. 즉, $\lim_{x\to a} f(x) = L$은

> 모든 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여,
> 어떤 양수 $\delta > 0$가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$이면 $|f(x) - L| < \varepsilon$이 성립한다.

라고 정의한다. 이를 풀어서 설명을 하면 다음과 같다. 0보다 큰 ε을 어떻게 잡더라도 "$0 < |x-a| < \delta$이면 $|f(x) - L| < \varepsilon$이다."가 성립하도록 ε에 대응하는 적당한 양수 δ를 잡을 수 있다면, 이 경우 $\lim_{x\to a} f(x) = L$이라고 정의한다.

이 정의는 'x가 a에 충분히 가까워지면, $f(x)$는 L에 원하는 만큼 가까워진다'는 사실을 논리적으로 표현한 것이다.



ε-δ 정의는 왜 필요한가요? 직관적 정의와는 어떤 차이가 있나요?

직관적으로는 그래프를 보고 'x가 a에 가까워질수록 $f(x)$가 L에 가까워진다'라고 설명할 수 있다. 하지만 이러한 설명은 상황에 따라 모호해질 수 있고, 엄밀한 증명에는 사용할 수 없다.

ε-δ 정의는 '얼마나 가까운지를 구체적인 수치로 표현하는 방식'이다. 즉, 함숫값이 L에 얼마나 가까운지를 ε로 정하고, 그에 맞게 x가 a에 얼마나 가까워져야 하는지를 δ로 정하여, 극한의 의미를 수학적으로 명확하게 한다.

따라서 직관적 정의는 이해를 돕는 데 유용하지만, 수학적 증명이나 일반적인 함수의 성질을 다룰 때는 ε-δ 정의가 반드시 필요하다.



극한값 $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$임을 보이기 위해 ε-δ 정의를 사용해볼까요?

임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$로 두자. $0 < |x-1| < \delta$일 때,

$$|(x+1)-2| = |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

가 성립한다. 따라서 모든 $\varepsilon > 0$에 대해 $\delta > 0$가 존재하므로,

$$\lim_{x\longrightarrow 1}(x+1) = 2$$

이다.

- **$\lim_{x\to a} f(x) = L$은 존재하지만 $f(a)$는 존재하지 않는 함수는 어떤 것이 있을까?**

함수 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$를 생각해 보자. $x = 0$에서는 $f(x)$가 정의되지 않으므로 $f(0)$의 실제 값은 없다. 그러나 x가 0에 가까워질 때 $f(x)$는 1에 가까워진다. 이 경우 $x = 0$에서 함숫값은 없지만, 극한값은 존재한다.

발산發散; divergence 과 무한대無限大; infinity

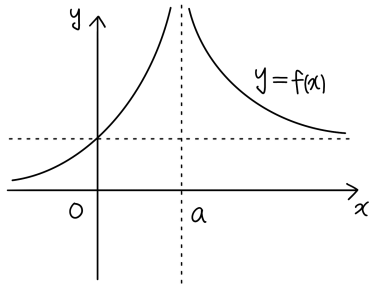
정의

발산과 무한대는 무엇인가요?

$x \to a$일 때 함수 $f(x)$가 수렴하지 않으면, '$x \to a$일 때 함수 $f(x)$는 **발산**한다'고 한다.

$f(x)$가 발산하는 대표적인 경우로 $f(x)$의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 경우가 있다.

이때 '한없이 커지는 상태'를 기호 ∞로 나타내고 **무한대**라고 읽는다.





무한대 ∞도 실수 중 하나인가요?

무한대 ∞는 수가 아니라 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호이다. 그러므로 다른 실수처럼 직선의 한 점으로 나타낼 수 없고, 일반적으로 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 등의 사칙연산의 대상도 되지 않는다.

개념

무한대 ∞는 언제 사용하나요?

무한대 ∞는 어떤 값이 한없이 커지거나, 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호이다. 함수의 극한에서는 x 또는 함숫값 $f(x)$이 이와 같이 한없이 커지는 상황을 나타낼 때 주로 사용한다.

먼저 함숫값 $f(x)$이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 사용되는 경우를 살펴보면 다음과 같다.

- 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 한없이 커지면 '$x \to a$일 때 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다' 고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \infty$$

와 같이 나타낸다.



이런 경우 '$x \to a$일 때 $f(x)$의 극한값은 ∞이다'라고 표현해도 되나요?

함수가 발산한다는 것은 극한(값)이 존재하지 않는다는 것을 의미한다. 발산하는 경우 중 함숫값이 한없이 커지는 경우 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$와 같이 나타내지만, 이것을 읽을 때는 '극한값이 ∞이다' 가 아니라 '극한값은 없고, 함수는 무한대로 발산한다' 라고 읽는다. 즉, 극한값이 존재하지 않기 때문에, 일반적으로 '극한값이 ∞이다' 라는 표현은 사용하지 않는다.

- 또, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 '$x \to a$일 때 함수 $f(x)$가 음의 무한대로 발산한다' 고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

다음으로 무한대 ∞가 x의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 사용되는 경우를 살펴보면 다음과 같다.

- 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 수 L에 한없이 가까워지면 '$x \to \infty$일 때 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다'고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{또는} \quad x \to \infty\text{일 때 } f(x) \to L$$

과 같이 나타낸다.

- 또, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 수 L에 한없이 가까워지면 '$x \to -\infty$일 때 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다'고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{또는} \quad x \to -\infty \text{일 때 } f(x) \to L$$

과 같이 나타낸다.

마지막으로 무한대 ∞가 x의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값 역시 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 사용되는 경우를 살펴보면 다음과 같다.

- 한편, $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때 함수 $f(x)$가 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

와 같이 나타낸다.

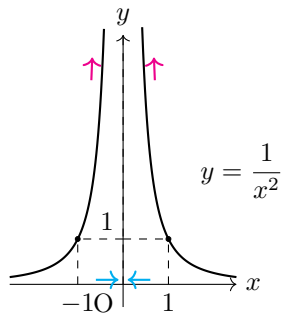
예 **구체적인 예를 들어 설명해 주세요.**

❶ 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$에서 x가 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, 분모가 양수에서 0으로 가까워지므로 $\dfrac{1}{x^2}$의 값은 한없이 커짐을 알 수 있다. 즉, $x \to 0$일 때 $f(x) \to \infty$가 되어 발산하게 된다.

따라서

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

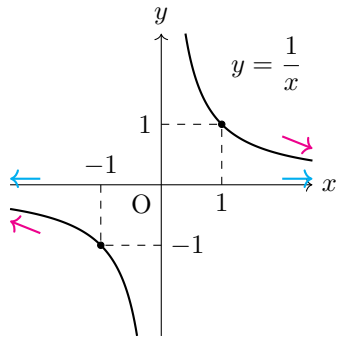
이므로, 극한값은 존재하지 않는다.



❷ 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$에 대하여

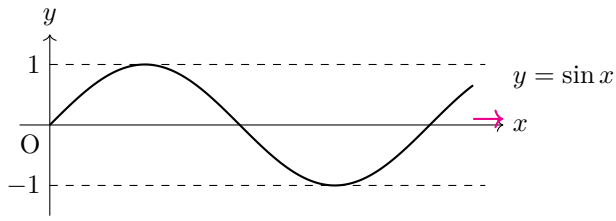
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

이다.



❸ 함수 $f(x)=\sin x$에 대해 $x\to\infty$일 때를 살펴보자.

x의 값이 한없이 커지면, $\sin x$는 -1과 1 사이의 모든 실수를 값으로 가지면서 주기적으로 계속해서 변한다. 이처럼 x의 값이 한없이 커질 때, $\sin x$의 값이 일정한 하나의 값에 가까워지지 않으므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$는 존재하지 않는다.



의미

발산과 무한대이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

발산 '발(發)' 은 '쏘다' , '퍼지다' 는 뜻이며, '산(散)' 은 '흩어지다' , '퍼지다' 는 뜻을 가진다. 즉, '발산' 은 어떤 값이나 함수의 값이 일정한 값에 가까워지지 않고 끝없이 커지거나 멀어지는 것을 의미한다.

發 필 발　　散 흩을 산

영어로는 divergence라 하며, 라틴어 *di-* (멀리, 분리하여)와 *vergere* (기울다, 향하다)에서 유래하여 '다른 방향으로 나아간다' 는 뜻으로, 값들이 수렴하지 않고 흩어지는 것을 나타낸다.

무한대 '무(無)' 는 '없다' , '존재하지 않는다' 는 뜻이며, '한(限)' 은 '경계' , '제한' 을 의미하고, '대(大)' 는 '크다' , '거대하다' 는 뜻을 가진다. 따라서 '무한대' 는 한계나 경계 없이 무한히 커지는 상태를 의미하며, 수학에서는 어떤 수나 함수의 값이 끝없이 커져 제한 없이 증가하는 상태를 나타낸다.

無 없을 무　　限 한할 한　　大 클 대

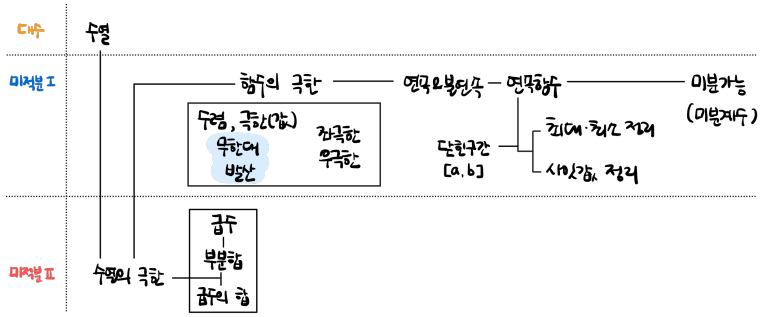
영어로는 infinity라 하며, 라틴어 *in-* (not, 부정)과 *finitus* (경계지어진, 유한한)에서 유래하여 '경계가 없음' , 즉 '끝이 없는 상태' 를 뜻한다. 이는 수학에서 수가 계속 커지거나 공간이 제한 없이 확장될 때 사용하는 개념으로, 기호 ∞로 나타낸다.

영국의 수학자 월리스(Wallis, J., 1616~1703)가 무한대를 뜻하는 기호 ∞를 사용하기 시작한 것으로 알려져 있다.

개념

발산, 무한대와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

함수의 발산, 무한대는 함수의 수렴, 극한(값), 좌극한, 우극한, 연속, 미분가능, 미분계수 등의 용어 및 개념뿐 아니라 수열의 발산, 수렴, 극한(값), 급수, 급수의 합 등의 용어 및 개념과도 관련이 있다.



실제로 $x=a$에서 함수 $f(x)$가 **발산**한다는 것은 수렴하지 않는다는 것 즉, 극한(값)이 존재하지 않는다는 것을 의미하고, 경우에 따라서 함숫값이 무한히 커지는 경우를 **무한대**라고 나타낸다. $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한과 우극한을 모두 생각할 수 있는 경우에는 이들 두 극한(값)이 일치해야 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 수렴하고 그렇지 않을 경우 발산한다.

한편 $x=a$에서 함수 $f(x)$가 수렴하고 그 극한(값)이 함숫값 $f(a)$와 같을 때 '$f(x)$는 $x=a$에서 연속이다'고 한다.

또 $x=a$에서 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 수렴할 때 즉, 극한(값)이 존재할 때 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다'고 하며 그 극한(값)을 $x=a$에서의 $f(x)$의 미분계수라 부른다.

미적분II에서 수열에 대해서도 발산, 수렴, 극한(값) 즉, 수열의 극한을 생각할 수 있고, 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 일반항으로 하는 수열인 급수에 대해서도 발산, 수렴을 생각할 수 있다. 급수가 수렴할 때 그 극한(값)을 급수의 합이라 부른다.

좌극한左極限; left-hand limit과 우극한右極限; right-hand limit

정의

좌극한과 우극한은 무엇인가요?

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 수 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **우극한**이라 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a+} f(x)=L \quad \text{또는} \quad x\to a+ \text{일 때 } f(x)\to L$$

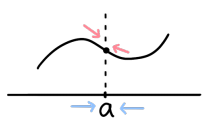
또, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 수 M에 한없이 가까워지면 M을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **좌극한**이라 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a-} f(x)=M \quad \text{또는} \quad x\to a- \text{일 때 } f(x)\to M$$

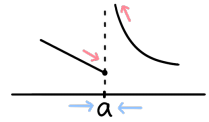
개념

좌극한과 우극한은 항상 존재하나요?

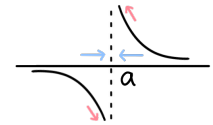
$x=a$에서 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한은 항상 존재하는 것은 아니다. 경우에 따라 둘 다 존재할 수도 있고, 한쪽만 존재할 수도 있으며, 둘 다 존재하지 않을 수도 있다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

[그림1]과 같이 $x=a$의 왼쪽에서 다가갈 때와 오른쪽에서 다가갈 때의 함숫값이 각각 어떤 값에 가까워지면, 좌극한과 우극한이 모두 존재한다. 이때 두 극한값이 서로 같으면 $x=a$에서 $f(x)$의 극한(값)이 존재하며, 그 공통된 값을 $\lim_{x\to a} f(x)$로 나타낸다.

[그림2]와 같이 한쪽에서는 함숫값이 일정한 값에 가까워지지만, 다른 쪽에서는 가까워지는 값이 정해지지 않는다면 좌극한과 우극한 중 하나만 존재한다. 이 경우에는

$\lim_{x\to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

또한 [그림3]과 같이 좌극한과 우극한이 모두 존재하지 않으면, $x=a$에서 $f(x)$는 발산하며 극한(값)도 존재하지 않는다.

예 구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 함수 $f(x)=x^2$는 모든 실수에서 정의되어 있으며, $x=2$를 기준으로 좌우에서 접근할 때 모두 함숫값 4에 가까워진다. 즉,

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=4$$

이다. 따라서 좌극한과 우극한이 같으므로, 이 함수는 $x=2$에서 극한값이 존재한다.

❷ 함수 $f(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ 2 & (x\geq 0)\end{cases}$는 $x=0$에서 좌극한과 우극한이 각각 1과 2로 서로 다르다. 즉,

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=1,\quad \lim_{x\to 0+} f(x)=2$$

로 좌극한과 우극한이 같지 않으므로, $x=0$에서의 극한값은 존재하지 않는다.

❸ 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$는 $x=0$에서 좌우에서 모두 무한대로 발산한다.

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\infty=\lim_{x\to 0+} f(x)$$

개념 정의역이 제한된 함수에서는 좌극한과 우극한을 어떻게 생각하나요?

정의역이 제한된 함수에서는 x를 a의 왼쪽이나 오른쪽에서 a에 가깝게 하려 해도, 그 방향에 정의역의 원소가 없을 수 있다. 이 경우에는 정의역 안에서 x를 움직일 수 있는 방향의 한쪽 극한만 생각한다.

예를 들어 함수 $f(x)=\sqrt{x}$는 정의역이 $[0,\infty)$이므로 $x=0$의 오른쪽에서 x를 0에 가깝게 할 수 있다. 따라서

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$$

와 같이 우극한을 생각할 수 있다.

반면 $x < 0$에서는 $\sqrt{x}$가 실수값을 가지지 않으므로, $x = 0$의 왼쪽에서는 함수가 실수 범위에서 정의되지 않는다. 따라서 실수 범위에서는

$$\lim_{x \to 0-} \sqrt{x}$$

를 다루지 않는다.

이와 같이 정의역이 한쪽으로만 이어지는 점에서는, 함수가 정의되는 방향에서의 한쪽 극한만을 생각한다.

개념

좌극한과 우극한이 모두 존재하면, 극한(값)도 항상 존재하나요?

좌극한과 우극한이 모두 존재한다고 해서 극한값이 항상 존재하는 것은 아니다. 좌극한과 우극한의 두 값이 서로 다르면, 극한값은 존재하지 않는다.

좌극한과 우극한이 모두 존재하는 경우, 극한(값)과 좌극한, 우극한은 다음과 같은 관계를 가진다.

- 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 극한(값)이 L이면, $x = a$에서의 좌극한과 우극한의 값도 L로 같다.
- 역으로 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 우극한과 좌극한의 값이 L로 같으면, $\lim_{x \to a} f(x) = L$이다.

즉, $x = a$에서 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 모두 존재하는 경우, 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

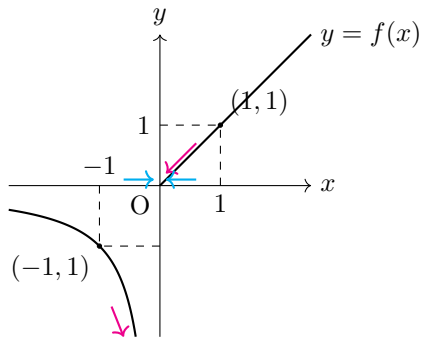
개념

우극한이 존재하면 좌극한도 반드시 존재할까요?

우극한이 존재하더라도 좌극한이 존재하지 않을 수 있다. 따라서 좌극한의 존재 여부는 우극한의 존재와는 별개의 문제이다.

$\lim_{x \to 0+} f(x)$가 존재하더라도 $\lim_{x \to 0-} f(x)$는 존재하지 않는 경우가 있다.

예를 들어, 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x<0)\\ x & (x\geq 0)\end{cases}$ 의 그래프는 다음과 같다.



이 함수에 대해 $x=0$에서의 좌극한과 우극한을 생각해보자.

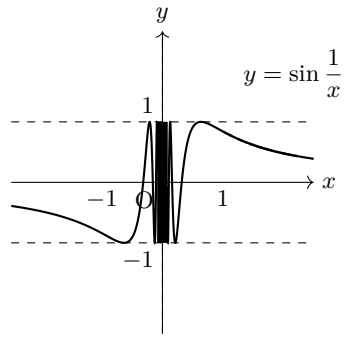
- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} x=0$ 이므로, 우극한은 존재한다.
- 그러나 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x}=-\infty$ 이므로, 좌극한은 존재하지 않는다.

따라서, 우극한이 존재하더라도 좌극한이 존재하지 않을 수 있으며, 이 경우 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$도 존재하지 않는다.

더 알아보기

발산하는 경우로서 ∞나 $-\infty$로 발산하는 것 말고 또 어떤 것이 있나요?

함수 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$는 $x=0$에서의 좌극한과 우극한이 모두 존재하지 않아 발산한다. 그러나 ∞나 $-\infty$로 발산하지 않는다.

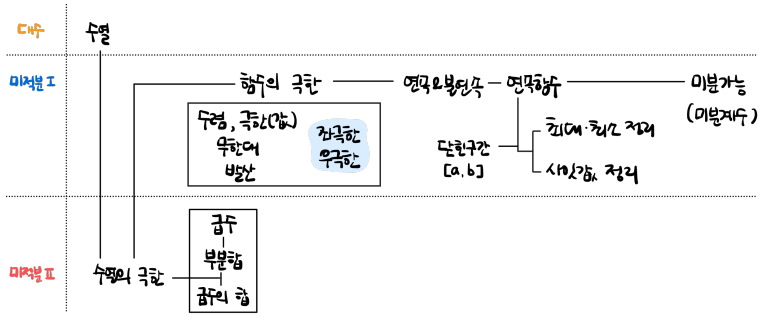


실제로 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때 즉, $x \to 0+$일 때와 $x \to 0-$일 때, 두 경우 모두 $\sin \dfrac{1}{x}$의 값은 일정한 하나의 수에 한없이 가까워지는 것이 아니라 -1과 1 사이를 끊임없이 오르락 내리락 하면서 변한다. 따라서 $x = 0$에서의 좌극한과 우극한 둘 다 존재하지 않으며, 이로 인해 극한(값) 역시 존재하지 않는다.

개념

좌극한, 우극한과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

함수의 좌극한, 우극한은 함수의 수렴, 극한(값), 발산, 연속, 미분가능, 미분계수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 $x = a$에서 $f(x)$의 **좌극한**과 **우극한**을 모두 생각할 수 있는 경우 이들 두 극한이 모두 존재하고 그 값이 일치할 때 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 **수렴**하고 그때의 일치하는 값이 바로 $x = a$에서 $f(x)$의 **극한(값)**이 된다. 그렇지 않을 경우 $f(x)$는 $x = a$에서 **발산**한다.

한편 $x = a$에서 함수 $f(x)$가 수렴하고 그 극한(값)이 함숫값 $f(a)$와 같을 때 '$f(x)$는 $x = a$에서 **연속**이다'고 한다. 또 $x = a$에서 $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$가 수렴할 때 $f(x)$는 $x = a$에서 **미분가능**하다'고 하며 그 극한(값)을 $x = a$에서의 $f(x)$의 **미분계수**라 부른다.

연속連續; continuous과 불연속不連續; discontinuous

정의

연속과 불연속은 어떻게 정의하나요?

함수 $f(x)$가 정의역의 원소 a에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, '함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이다'고 한다.

❶ 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

❷ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

한편 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, '함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이다'고 한다. 즉 함수 $f(x)$가 위의 두 조건 중에서 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x^2$는

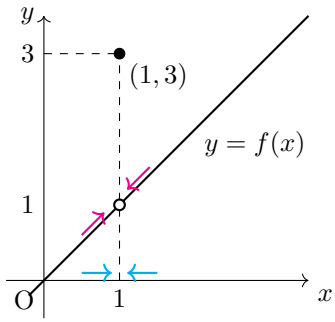
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$$

이므로, $x=2$에서 연속이다.

❷ 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \neq 1) \\ 3 & (x = 1) \end{cases}$$

은 $x=1$에서 좌극한과 우극한이 같으므로 극한값은 1이다.



$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1$

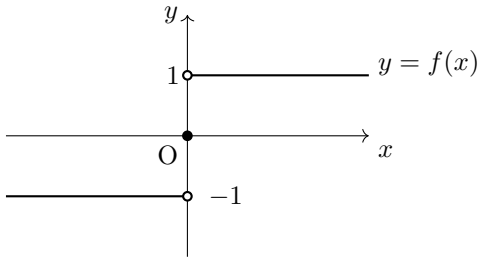
$f(1) = 3$

하지만 $f(1)=3$이므로, 극한값과 함숫값이 다르다. 따라서 이 함수는 $x=1$에서 불연속이다.

❸ 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

는 $x=0$에서 좌극한과 우극한이 다르다.



$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$

따라서 극한값 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$는 존재하지 않으므로 이 함수는 $x=0$에서 불연속이다.

개념

함수의 그래프를 보고 연속인지 불연속인지 어떻게 판단할 수 있나요?

함수의 그래프에서 함수가 연속인지 불연속인지 판단하려면 그래프가 어떻게 이어지는지를 살펴보면 된다. 실제로 x축에서 $x=a$에 해당하는 위치를 기준으로 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있다면, 그 함수는 $x=a$에서 연속이라고 할 수 있다.

즉, 함수의 그래프에서 연속 여부를 판단할 때는 다음을 확인해야 한다.

먼저, $x=a$에서의 함숫값 $f(a)$와 점 $(a, f(a))$의 위치를 확인한다.

다음으로, $x=a$를 기준으로 왼쪽과 오른쪽에서 그래프가 일정한 하나의 점으로 가까워지는지를 살펴본다. 만약 좌우에서 서로 다른 점으로 접근하거나, 어느 한쪽이라도 일정한 점으로 다가가지 않는다면 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

마지막으로, 점 $(a, f(a))$가 $x=a$의 좌우에서 그래프가 다가가는 점과 일치하는지 확인해야 한다. 두 점이 일치한다면 그래프가 끊어지지 않고 이어져 연속이지만, 두 점이 일치하지 않고 다르다면 극한값과 함숫값이 서로 다르므로 불연속이다.

결국 함수 $f(x)$의 그래프에서 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라는 것은 그래프가 점 $(a, f(a))$의 좌우에서 다가와 점 $(a, f(a))$에서 만나서 끊어지지 않고 이어진다는 것을

의미하며, 그렇지 않을 경우에는 불연속이다.

의미

연속과 불연속이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

연속 '연(連)' 은 '잇다' , '이어지다' 는 뜻이며, '속(續)' 은 '계속하다' , '끊이지 않다' 를 의미한다. 따라서 '연속' 은 어떤 상태나 값이 **연**결되어 계**속** 이어지는 것을 의미하며, 수학에서는 함수의 그래프가 끊기지 않고 이어지는 성질을 나타낸다.

連 잇닿을 련(연)　　續 이을 속

영어로는 continuous라 하며, 라틴어 *continuus*에서 유래하였는데, 이는 *con-* (함께)와 *tenere* (붙들다, 유지하다)의 합성어로, '끊기지 않고 이어진 상태' 를 의미한다.

불연속 '불(不)' 은 '아니다' , ' 하지 않다' 는 뜻의 부정어이며, '불연속' 은 어떤 상태나 값이 연속이 아님을 의미한다. 수학에서는 함수의 그래프가 끊어진 상태을 나타낸다.

영어로는 discontinuous라 하며, 접두어 dis- (떨어짐, 분리)와 continuous의 결합어로, '연속되지 않음' , 즉 '이어지지 않고 끊어진 상태' 를 나타낸다.

더 알아보기

그래프가 '계단 모양' 인 함수는 어떤 특징을 가지는지 설명할 수 있을까?

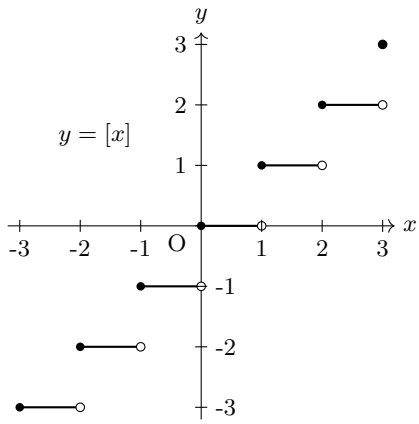
함수 $f(x) = [x]$는 x보다 작거나 같은 가장 큰 정수를 값으로 정하는 함수이다. 이 함수를 그래프로 나타내면, 각 구간에서 같은 값이 계속 유지되다가 정수에서 다음 값으로 뛰어오르는 모습이 나타난다. 그래서 전체 그래프가 마치 계단처럼 생겼다고 하여 '계단 함수' 라고 부른다.

이제 이 함수의 연속성을 살펴보자. 구간 $(n, n+1)$(n은 정수)에서는 함숫값이 변하지 않고 일정하게 유지되므로, 좌우에서 접근하는 극한값이 모두 같고 실제 함숫

값과도 일치한다. 따라서 이런 지점에서는 함수가 연속이다. 예를 들어 $x = 1.5$에서

$$\lim_{x \to 1.5} [x] = [1.5] = 1$$

이 되어 함수는 끊기지 않고 이어진다.



$\lim_{x \to 1.5} [x] = [1.5] = 1$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 2-} f(x) = 2$

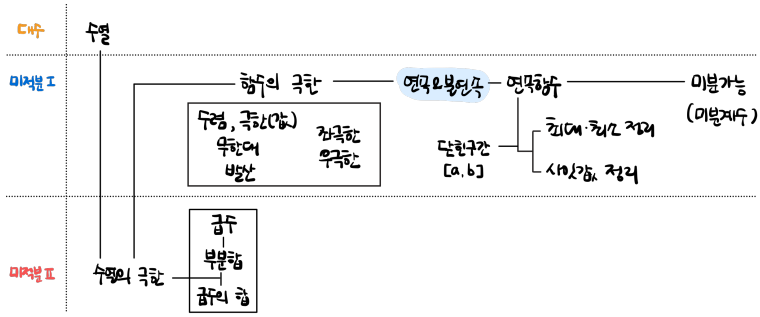
하지만 $x = n$(n은 정수)에서의 극한(값)은 상황이 다르다. 예를 들어 $x = 2$를 보자. 2의 왼쪽에서 다가오면 함숫값은 모두 1에 머물고, 오른쪽에서 다가오면 함숫값은 2가 된다. 즉, 좌극한과 우극한이 서로 달라 같은 값으로 수렴하지 않는다. 이 때문에 $x = 2$에서는 극한값이 존재하지 않고, 따라서 함수는 불연속이 된다.

결국 그래프가 계단 모양인 함수 $f(x) = [x]$는 $x = n$(n은 정수)마다 함수가 끊어지고 불연속이 나타난다는 것을 의미한다. 반대로 구간 $(n, n+1)$(n은 정수)에서는 계단이 이어져 있기 때문에 연속이다.

개념

연속, 불연속과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

함수의 연속, 불연속은 함수의 수렴, 발산, 극한(값), 좌극한, 우극한과 같은 함수의 극한 관련 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있고, 연속함수, 최대 · 최소 정리, 사잇값 정리, 미분가능 등의 용어 및 개념과도 밀접한 관련이 있다.



실제로 $x=a$에서 함수 $f(x)$가 **발산**하지 않고 **수렴**하고 그 **극한(값)**이 함숫값 $f(a)$와 같을 때 '$f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이다'고 하고, 그렇지 않을 경우 **불연속**이라 한다. 특히 $x=a$에서 $f(x)$의 **좌극한**과 **우극한**을 모두 생각할 수 있는 경우 이들 두 극한이 모두 존재하고 그 값이 $f(a)$와 일치할 때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이 된다.

정의역의 모든 점에서 연속인 함수를 **연속함수**라 하고, 함수가 어떤 구간의 모든 점에서 연속일 때 그 함수는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다. **닫힌구간** $[a,b]$에서 연속인 함수의 중요한 성질로 **최대 · 최소 정리**와 **사잇값 정리**가 있다.

한편, $x=a$에서 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 수렴할 때 '$f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다'고 하는데, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이 된다.

연속함수連續函數; continuous function

정의

연속함수는 어떻게 정의하나요?

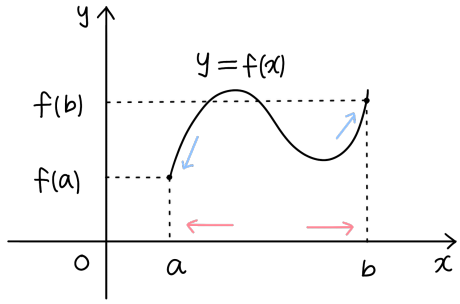
함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 **연속함수**라고 한다.

특히, 닫힌구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가

❶ 열린구간 (a, b)에서 연속이고

❷ $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.



예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 함수 $f(x) = x^2$는 모든 실수 $x = a$에 대하여

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(a) = a^2$$

와 같이 좌극한과 우극한이 같고, 그 값이 함숫값과 같으므로 $x = a$에서 연속이다.

따라서 이 함수는 실수 전체에서 연속함수이다.

❷ 함수 $f(x) = \sqrt{x}$와 닫힌구간 $[0, 1]$에 대하여, 이 함수는 열린구간 $(0, 1)$에서 연속이고 양 끝점인 $x = 0$, $x = 1$에서도 다음 조건을 만족한다.

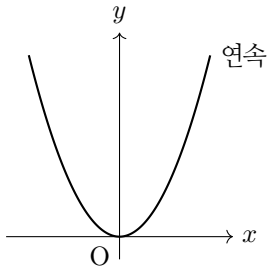
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0) = 0, \qquad \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = 1$$

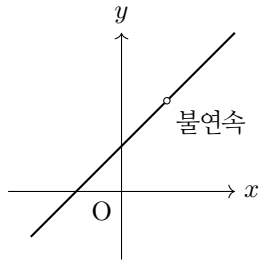
따라서 함수 $f(x) = \sqrt{x}$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속함수이다.

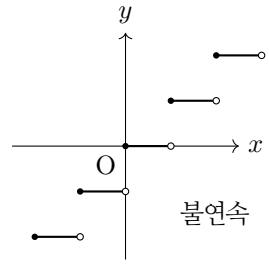
개념

연속함수의 그래프는 어떤 특징을 가지고 있나요?

연속함수의 그래프는 끊어지지 않고 이어져, 펜을 떼지 않고 한 번에 그릴 수 있는 형태를 가진다. 어떤 점 $x=a$에서 좌우에서 접근했을 때 함숫값이 부드럽게 이어지고, 그 값이 실제 함숫값 $f(a)$와 같아야 하므로, **함숫값이 정의되지 않는 점이나 좌우 극한이 일치하지 않는 불연속점**이 존재하지 않는다. 이러한 특징 때문에 연속함수는 시각적으로도 안정적이고 예측 가능한 그래프를 갖는다.







개념

연속인 함수들끼리 사칙연산을 하면 새로운 함수도 연속일까?

연속함수 사이의 사칙연산(더하기, 빼기, 곱하기, 나누기)은 연속성을 그대로 유지한다. 조금 더 구체적으로 말하면, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 점 $x=a$에서 연속이라면, 다음 함수들도 $x=a$에서 연속이 된다.

❶ $kf(x)$ (단, k는 실수)

❷ $f(x)+g(x)$ 또는 $f(x)-g(x)$

❸ $f(x)g(x)$

❹ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

즉, 이미 연속인 함수들끼리 더하고, 빼고, 곱하고, 나누면(단, 분모가 0이 아닌 경우) 새로 만들어진 함수도 그 점에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질은 단순히 한 점에서만 성립하는 것이 아니라 구간 전체에서도 성립한다. 이러한 성질 덕분에 다항함수나 유리함수(예를 들어 x^2+x, $\dfrac{x+1}{x}$ 등과 같은 익숙한 함수들)가 연속임을 쉽게 알 수 있다.



그러면 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=a$에서 연속이면, $f(x)$와 $g(x)$도 각각 $x=a$에서 연속인가요?

일반적으로 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 해서 $f(x)$와 $g(x)$가 각각 $x=a$에서 연속인 것은 아니다.

예를 들어, 다음 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 생각해 보자.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 1 & (x\geq 0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ -1 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이때 $f(x)+g(x)$는

$$f(x)+g(x)=0$$

인 상수함수가 되므로 $x=0$에서 연속이다. 하지만 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 좌극한과 우극한이 달라 불연속이다.

따라서 $f(x)+g(x)$가 어떤 점에서 연속이라고 하더라도, 그것이 각 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 연속성을 보장하지는 않는다.

더 알아보기

불연속함수에서 불연속 점을 재정의하여 연속함수로 만들 수 있나요?

일반적으로 함수가 어떤 점에서 불연속이라면, 그 점에서 함숫값이 극한값과 다르거나, 극한값 자체가 존재하지 않는 경우이다. 그런데 만약 함수의 극한값은 존재하지만, 단지 그 점에서의 함숫값이 다르거나 정의되어 있지 않은 경우라면, 그 점의 함숫값을 극한값과 같도록 **재정의**함으로써 연속함수로 만들 수 있다. 이러한 경우를 **없앨 수 있는 불연속성(제거 가능한 불연속, removable discontinuity)**라고 한다.

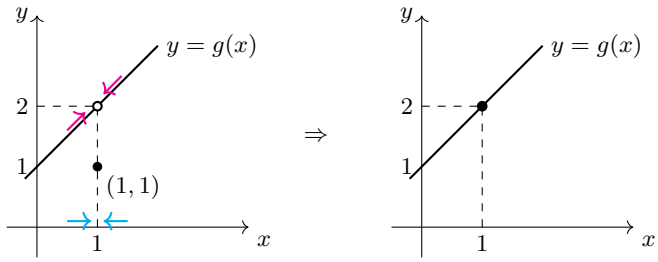
예를 들어, 함수 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$는 $x=1$에서 불연속이다. 왜냐하면 좌우에서 극한값은 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2$이지만, 함숫값 $g(1)=1$로 다르기 때문이다.

하지만 이 함수에서 $g(1)$을 2로 다시 정의하면, 즉

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$$

와 같이 바꾸면, $x=1$에서 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 함숫값과 같아지므로

연속함수가 된다.



따라서 불연속함수라고 하더라도, 그 불연속점에서 **극한값이 존재**하고, 함숫값만 다르거나 정의되지 않았을 경우에는 함숫값을 극한값과 같게 다시 정의함으로써 **연속함수로 고칠 수 있다.** 이처럼 점 하나를 조정하여 연속성을 회복할 수 있는 경우는 제한적이지만, 수학적으로 매우 의미 있는 경우이며, 특히 함수의 성질이나 그래프의 연속성을 분석할 때 자주 등장하는 개념이다.

개념

연속함수는 어떤 수학적 성질을 가지나요?

연속함수는 정의역 내의 한 점에서 갑자기 끊기거나 불연속적으로 점프하지 않고, 그래프가 자연스럽게 이어지는 함수이다. 이러한 연속성은 단순히 시각적인 부드러움에 그치지 않고, 중요한 수학적 성질을 보장한다.

특히 연속함수는 다음 두 가지 중요한 정리와 깊은 관련이 있다.

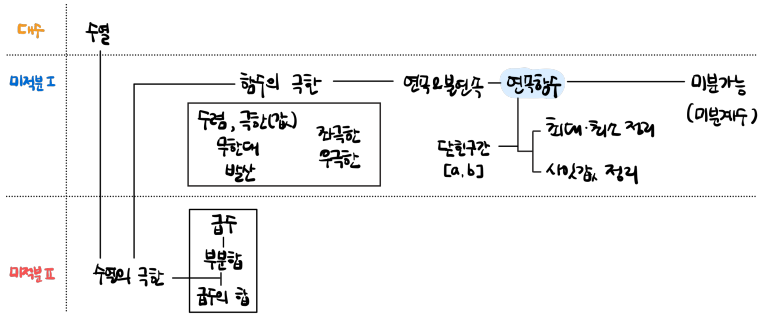
- 최대 · 최소 정리 : 연속함수는 닫힌구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.
- 사잇값 정리 : 연속함수는 닫힌구간의 양 끝에서 가지는 함숫값 사이의 모든 값을 빠짐없이 지나간다.

따라서 연속함수의 성질은 단순히 그래프가 매끄럽다는 의미를 넘어, **최댓값과 최솟값의 보장**과 **해의 존재성**을 확실히 해주는 강력한 수학적 도구가 된다. 각 정리의 구체적인 내용과 활용은 해당 수학 용어에서 자세히 다루게 될 것이다.

개념

연속함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

연속함수는 어떤 점에서의 함수의 연속, 불연속 및 최대 · 최소 정리, 사잇값 정리, 미분가능 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **연속함수**는 정의역의 모든 점에서 연속인 함수이고, 정의역의 원소 중 함수가 불연속인 점이 하나라도 있으면 그 함수는 연속함수가 아니다. 또 함수가 어떤 구간의 모든 점에서 연속일 때 그 함수는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다.

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수의 중요한 성질로 최대 · 최소 정리와 사잇값 정리가 있다.

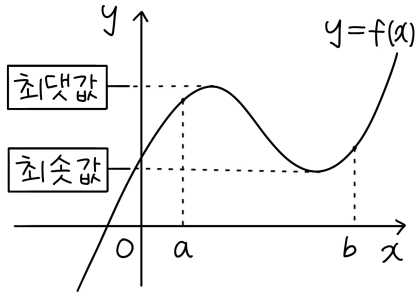
한편, $x = a$에서 $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$가 수렴할 때 '$f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다'고 하고, 정의역의 모든 점에서 미분가능한 함수를 미분가능함수라 한다. 미분가능함수는 연속함수이다.

최대 · 최소 정리最大最小定理; maximum-minimum theorem

정의

최대 · 최소 정리는 무엇인가요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이 성질을 **최대 · 최소 정리**라 한다.



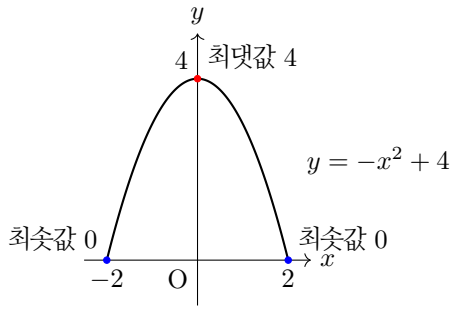
예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

1 함수 $f(x) = -x^2 + 4$를 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 생각해보자.

다항함수는 모든 실수에서 연속이므로, 이 함수는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이다.

따라서 최대 · 최소 정리에 의해 이 구간에서 최댓값과 최솟값이 반드시 존재한다.

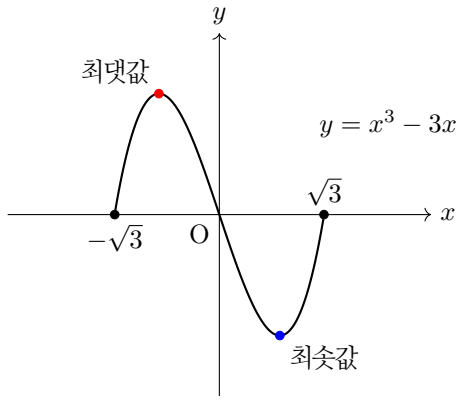


실제로 함숫값을 계산해보면 $f(0) = 4$가 최댓값, $f(-2) = f(2) = 0$이 최솟값이다.

따라서 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $f(x) = -x^2 + 4$는 $x = 0$에서 최댓값 4를, $x = -2$, $x = 2$에서 최솟값 0을 가진다.

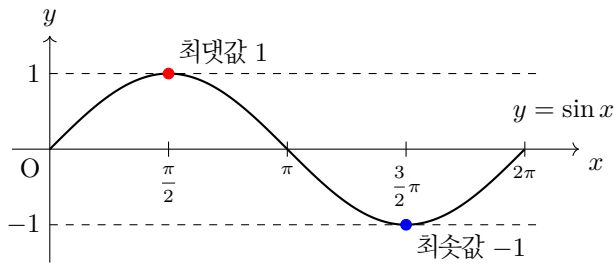
2 함수 $f(x) = x^3 - 3x$를 닫힌구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$에서 생각해보자.

이 함수는 삼차함수이므로, 닫힌구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$에서 연속이다. 따라서 최대 · 최소 정리에 의해 이 구간에서 최댓값과 최솟값이 반드시 존재한다.



하지만 함수의 그래프의 정보만으로 정확한 값을 알기는 어렵다. 정확한 최댓값과 최솟값을 구하는 방법은 도함수를 이용하여 극값을 찾는 방법을 배운 후에 가능하므로 용어 극값에서 자세히 다룬다.

3 삼각함수 $f(x) = \sin x$를 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 생각해보자. 삼각함수는 모든 실수에서 연속이므로, 이 닫힌구간에서도 연속이다. 따라서 최대 · 최소 정리에 의해 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 반드시 갖는다.



실제로 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$이고, 최솟값은 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$이다. 이 두 값은 모두 구간의 내부인 $x = \frac{\pi}{2}$와 $x = \frac{3}{2}\pi$에서 나타난다.

따라서 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 $f(x) = \sin x$는 $x = \frac{\pi}{2}$에서 최댓값 1을, $x = \frac{3}{2}\pi$에서 최솟값 -1을 가진다.

개념

함수의 최댓값과 최솟값이란 각각 무엇인가요?

함수의 **최댓값**이란, 정의역 안에서 함수가 가질 수 있는 가장 큰 함숫값을 의미한다. 반대로 **최솟값**이란, 함수가 가질 수 있는 가장 작은 함숫값을 말한다. 즉, 어떤 함수 $f(x)$의 정의역 D에서

$$f(a) \geq f(x) \quad (\text{모든 } x \in D\text{에 대해})$$

이면 $f(a)$는 최댓값이고,

$$f(b) \leq f(x) \quad (\text{모든 } x \in D\text{에 대해})$$

이면 $f(b)$는 최솟값이라고 한다. 이때 a, b는 최댓값이나 최솟값을 **실제로 만들어 주는 입력값(점)**이며, 이러한 값이 존재할 경우 '함수가 최댓값(또는 최솟값)을 가진다'고 표현한다.

더 알아보기

최대 · 최소 정리의 핵심적인 아이디어와 조건은 무엇인가요?

닫힌구간 $[a, b]$는 양 끝 점 a와 b를 모두 포함하는 빈틈없는 구간이고, 연속함수란 그래프가 끊기지 않고 부드럽게 이어지는 함수이다. 이 두 조건이 모두 충족되면 즉, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라면, 함숫값은 이 구간 전체에서 빠짐없이 존재하게 된다. 즉, 그래프가 중간에서 끊기는 것과 같이 불연속인 점이 발생하지 않는다. 그러므로 가장 큰 함숫값과 가장 작은 함숫값을 실제로 갖게 되는 x의 값이 역시 반드시 존재하게 된다. 이것이 바로 최대 · 최소 정리의 핵심 아이디어이다.

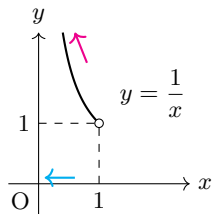
특히 최대 · 최소 정리가 일반적으로 성립하려면 '**닫힌구간** $[a, b]$'와 '**연속**'이라는 두 조건이 반드시 필요하다.



최대 · 최소 정리에서 '닫힌구간 $[a, b]$'라는 조건이 충족되지 않으면 어떻게 되나요?

열린구간 $(0, 1)$에서 연속인 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$을 살펴보자.

$x \to 0+$일 때 $f(x) \to \infty$이므로 열린구간 $(0, 1)$에서 $f(x)$의 최댓값은 존재하지 않는다. 또 열린구간 $(0, 1)$의 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 1$이므로 열린구간 $(0, 1)$에서 $f(x)$의 최솟값도 존재하지 않는다.



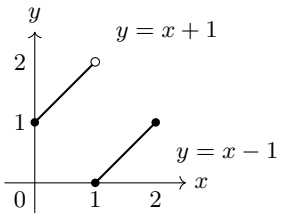
이처럼 닫힌구간 $[a, b]$라는 조건이 충족되지 않으면 최대 · 최소 정리의 결론이 일반적으로 성립하지 않을 수 있다.



최대 · 최소 정리에서 '연속'이라는 조건이 충족되지 않으면 어떻게 되나요?

닫힌구간 $[0, 2]$에서 다음과 같이 정의된 함수 $f(x)$를 살펴보자.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \le x < 1) \\ x-1 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$



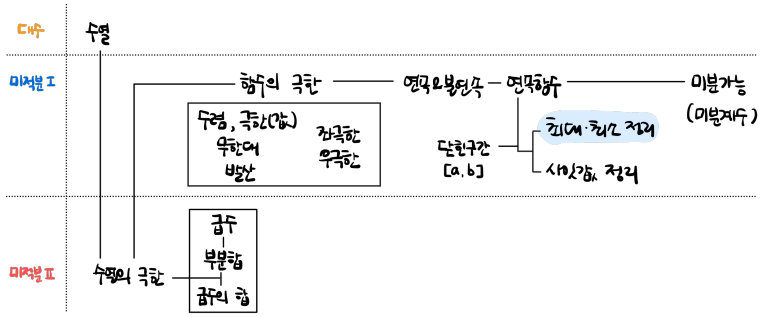
이 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 불연속이다.

위 그래프에서도 확인할 수 있듯이 $[0, 2]$의 임의의 실수 x에 대하여 $1 \le f(x) < 2$이므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)$의 최솟값은 1로서 존재하지만 최댓값은 존재하지 않는다. 이처럼 연속이라는 조건이 충족되지 않으면 최대 · 최소 정리의 결론이 일반적으로 성립하지 않는다.

개념

최대 · 최소 정리와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

최대 · 최소 정리는 닫힌구간, 함수의 연속, 불연속, 연속함수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **최대 · 최소 정리**는 사잇값 정리와 더불어 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수의 가장 중요한 성질 중 하나로서 함수가 닫힌구간 $[a, b]$이 아닌 열린구간 (a, b)이나 반열린구간 $[a, b)$에서 연속인 경우나 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속함수가 아니라 불연속인 점이 존재하는 불연속 함수인 경우에는 정리의 결론이 일반적으로 성립하지 않는다. 즉, 최대 · 최소 정리의 가정에서 '닫힌구간 $[a, b]$'라는 조건과 이 구간에서 함수가 '연속'이라는 조건은 정리의 결론이 참이 되게 하는 필수 조건이다.

사잇값 정리 사잇값 정리; intermediate value theorem

정의

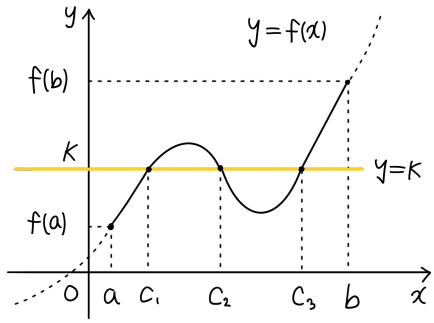
사잇값 정리는 무엇인가요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c) = k$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

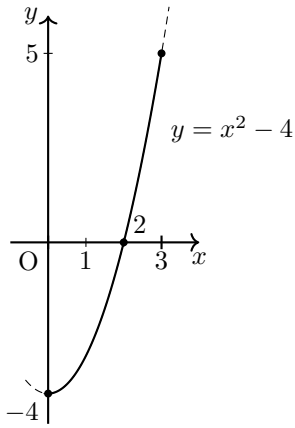
이 성질을 **사잇값 정리**라고 한다.



예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

함수 $f(x) = x^2 - 4$를 생각해보자.



이 함수는 닫힌구간 $[0,3]$에서 연속이므로, 사잇값 정리에 의하여 $f(0)=-4$와 $f(3)=5$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 $(0,3)$에 적어도 하나 존재한다.

이를테면 $k=0$이라 하면 $f(0)<0<f(3)$이므로 사잇값 정리에 의하여, $f(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(0,3)$에 존재한다. 실제로 $f(c)=c^2-4=0$, $c=2$ 또는 $c=-2$이므로 $c=2$가 열린구간 $(0,3)$에 존재함을 확인할 수 있다.

이로부터 이차방정식 $x^2-4=0$은 0과 3 사이에 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.

의미

사잇값 정리라는 용어의 우리말, 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

'사잇값'은 두 수 사이에 있는 값을 뜻하는 순우리말로, '사잇값 정리'는 함수가 두 값에서 서로 다른 함숫값을 가질 때, 그 사이에 있는 어떤 값도 반드시 그 구간 안의 함숫값으로 나타난다는 성질을 의미한다.

'사잇값'은 한자어로는 '중간(中間)값'으로 나타내고 '사잇값 정리'를 '중간값 정리'라고도 한다. '중(中)'은 '가운데', '한가운데'를 뜻하고, '간(間)'은 '사이', '틈'을 나타낸다.

영어로는 Intermediate Value Theorem이라 하며, intermediate는 '중간의', '사이의'라는 뜻이고, value는 '값', theorem은 '정리'를 뜻한다. 즉, 두 값 사이에 있는 중간 값이 반드시 존재한다는 내용을 담고 있으며, 이는 연속함수의 가장 기본적인 성질 중 하나를 설명하는 핵심적인 정리이다.

더 알아보기

사잇값 정리의 핵심적인 아이디어와 조건은 무엇인가요?

함수가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이라면, 이 함수는 함숫값 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 모든 값을 함숫값으로 갖는다. 즉, $f(a)<f(b)$라면 $f(x)$는 $f(a)$보다 크고 $f(b)$보다 작은 모든 값을 하나 이상 가지게 된다.

이러한 성질이 바로 **사잇값 정리**이며, 연속함수의 가장 중요한 특징 중 하나이다.

함수의 그래프가 끊김 없이 이어져 있기 때문에, 두 지점 사이에서 값을 뛰어넘는 일 없이 모든 값을 지나간다고 이해할 수 있다.

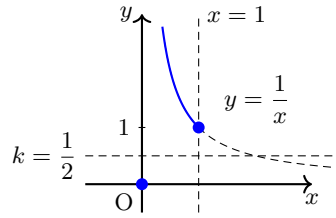
따라서 사잇값 정리는 '**닫힌구간**', '**연속**', '$f(a) \neq f(b)$과 이라는 조건이 함께 갖춰졌을 때만 사용할 수 있는 정리이다.



사잇값 정리에서 '닫힌구간 $[a, b]$'이라는 조건이 충족되지 않으면 어떻게 되나요?

함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



을 살펴보자.

이 함수는 열린구간 $(0, 1)$에서 연속이고, $f(0) = 0, f(1) = 1$이므로 $f(0) \neq f(1)$이다. 즉, 사잇값 정리의 가정 중에서 닫힌구간 $[a, b]$라는 조건을 제외한 다른 모든 조건을 만족시킨다. 그러나 $f(0)$과 $f(1)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c는 열린구간 $(0, 1)$에 존재하지 않는다. 이처럼 닫힌구간 $[a, b]$라는 조건이 충족되지 않으면 사잇값 정리의 결론이 일반적으로 성립하지 않을 수 있다.



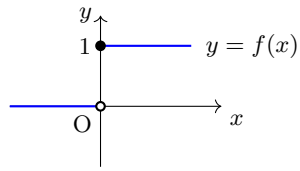
사잇값 정리에서 '연속'이라는 조건이 충족되지 않으면 어떻게 되나요?

연속이 아니면 사잇값 정리의 결론은 일반적으로 성립하지 않는다. 사잇값 정리는 $[a, b]$에서의 연속을 전제로 하며, 이 가정이 깨지면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대해 $f(c) = k$인 $c \in (a, b)$의 존재를 보장할 수 없다.

예를 들어, 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 를 생각해보자.

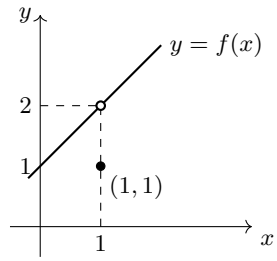
양 끝 점에서의 함숫값은 $f(-1) = 0, f(1) = 1$이지만 $k = \dfrac{1}{2}$에 대하여 $f(c) = \dfrac{1}{2}$를 만족하는 $c \in (-1, 1)$는 존재하지 않는다.

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x\geq 0)\end{cases}$$



또 다른 예로는 닫힌구간 $[0,2]$에서 다음과 같이 정의된 함수를 생각해보자.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$



양 끝 점에서의 함숫값은 $f(0)=1$, $f(2)=3$이므로 $k=2$는 $f(0)$과 $f(2)$ 사이의 값이다. 하지만 $f(c)=2$를 만족하는 c는 열린구간 $(0,2)$에 존재하지 않는다.

따라서 주어진 함수가 불연속이면 사잇값 정리의 결론이 성립하지 않는 경우가 생긴다.



사잇값 정리에서 '$f(a)\neq f(b)$'라는 조건이 충족되지 않으면 어떻게 되나요?

일반적으로 $f(a)=k=f(b)$라고 해서 반드시 $a<c<b$인 어떤 c에 대하여 $f(c)=f(a)$가 성립하는 것은 아니다. 사잇값 정리는 함숫값이 $f(a)$와 $f(b)$가 다를 때 그 사이 값을 갖는 점이 존재함을 보장해 주지만, $f(a)=f(b)$이면 이 정리를 그대로 적용할 수 없다. 예를 들어 닫힌구간 $[1,2]$에서 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$를 생각하면 $f(1)=f(2)=0$이지만, $1<c<2$인 모든 실수 c에 대해 $(c-1)(c-2)<0$이므로 $f(c)=0$이 되는 1와 2사이의 점은 없다. 즉, 끝점에서 값이 같다고 해서 열린구간 $(1,2)$에서도 같은 값을 반드시 가지는 것은 아니다. 다만 연속성과 그래프의 모양에 따라 성립하는 경우도 있다.

개념

사잇값 정리는 어디에 사용되나요?

사잇값 정리에 따르면, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$가 서로 다른 부호를 가지면, 방정식 $f(x) = 0$이 되는 x의 값이 a와 b 사이에 반드시 존재하게 된다.

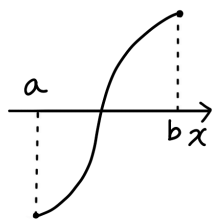
예를 들어, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 $f(1) = -2$, $f(4) = 5$라고 하자. $f(1) < 0$, $f(4) > 0$이므로, 방정식 $f(x) = 0$을 만족하는 x의 값이 1과 4 사이에 존재한다.

이처럼 사잇값 정리를 이용하면 '방정식을 직접 풀어보지 않고도' 그 '방정식의 해가 존재한다'는 사실을 수학적으로 설명할 수 있다. 이런 점에서 사잇값 정리는 방정식의 해의 존재를 보장하고 그 해의 대략적인 위치를 설명하는 데 활용될 수 있다.

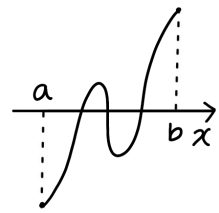


사잇값 정리를 통해 방정식의 해의 개수도 알 수 있나요?

사잇값 정리는 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다르면 방정식 $f(x) = 0$의 해가 **적어도 하나** 존재함을 보장할 뿐, 그 해의 유일성이나 해의 개수에 대한 정보까지 제공하지는 않는다. 예를 들어 다음 두 그래프는 모두 사잇값 정리를 만족하지만 [그림1]은 해가 한 개 존재하고, [그림2]는 해가 세 개 존재한다.



[그림 1]



[그림 2]

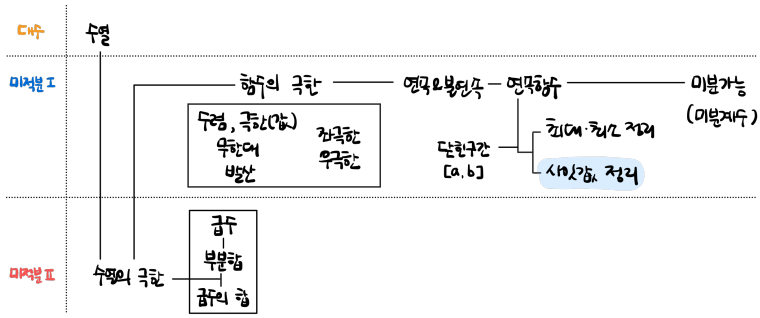
실제로 두 삼차함수 $f(x) = x^3$과 $g(x) = x(x-1)(x+1)$은 둘 다 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 $f(-2) < 0$, $f(2) > 0$이므로 두 삼차방정식 $x^3 = 0$과 $x(x-1)(x+1) = 0$ 둘 다 그 해가 -2와 2 사이에 존재한다. 그러나 $x^3 = 0$의 해는 0

하나뿐이고 $x(x-1)(x+1)=0$의 해는 $-1, 0, 1$의 세 개이다. 즉, 사잇값 정리를 통해 '해가 존재한다'는 사실을 알 수 있지만, 사잇값 정리만으로 해가 몇 개인지는 알 수 없다.

개념

사잇값 정리와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

사잇값 정리는 닫힌구간, 함수의 연속, 불연속, 연속함수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **사잇값 정리**는 **최대 · 최소 정리**와 더불어 **닫힌구간** $[a, b]$에서 **연속**인 함수의 가장 중요한 성질 중 하나로서 함수가 닫힌구간 $[a, b]$이 아닌 열린구간 (a, b)이나 반열린구간 $[a, b)$에서 연속인 경우나 닫힌구간 $[a, b]$에서 **연속함수**가 아니라 **불연속**인 점이 존재하는 불연속 함수인 경우에는 정리의 결론이 일반적으로 성립하지 않는다. 또 $f(a)=f(b)$인 경우에도 정리의 결론이 일반적으로 성립하지 않는다. 즉, 사잇값 정리의 가정에서 '닫힌구간 $[a, b]$'라는 조건, 이 구간에서 함수가 '연속'이라는 조건, '$f(a) \neq f(b)$'라는 조건은 정리의 결론이 참이 되게 하는 필수 조건이다.

심화(참고)

● 방정식의 실근은 정확히 얼마일까요?

사잇값 정리를 반복적으로 사용하면 방정식의 실근의 값을 대략적으로 추적할 수 있다. 다음은 사잇값 정리와 그 정리를 구간을 이등분하여 반복 적용하는 아이디어로 실근이 존재하는 범위를 점점 정확히 좁혀 가는 방법이다.

핵심은 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면, 열린구간 (a, b) 안 어딘가에 $f(x)=0$을 만족하는 점이 반드시 존재한다는 사실이다. (이때의 x 값이 방정식 $f(x)=0$의 실근이며, 이를 실근 x^*라 하자.) 이때 처음 구간의 절반을 계속 나누어 부호가 바뀌는 쪽의 절반 구간만 남기는 과정을 반복하면 근의 위치를 체계적으로 추적할 수 있다.

먼저 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b) < 0$이라고 하자. 중점 $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$를 잡아 $f(m_1)$의 부호를 확인한다. 만약 $f(a)f(m_1) < 0$이면 근은 닫힌구간 $[a, m_1]$에 있고, 그렇지 않고 $f(m_1)f(b) < 0$이면 근은 닫힌구간 $[m_1, b]$에 있다. 이렇게 선택된 절반 구간을 닫힌구간 $[a_1, b_1]$이라 쓰고, 다시 그 중점 $m_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$를 잡아 같은 판단을 되풀이한다. 이 과정을 n번 반복하면 길이가 $\dfrac{b-a}{2^n}$인 닫힌구간 $[a_n, b_n]$이 남고, 그 안에 실근 x^*가 존재한다. 각 단계의 중점 $m_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$를 근의 근사값으로 삼으면 오차는

$$|m_n - x^*| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

을 만족한다. 따라서 처음 구간 길이가 $b-a$일 때, 오차를 10^{-k}보다 작게 만들고 싶다면 $2^{n+1} > \dfrac{b-a}{10^{-k}}$을 만족하도록 사잇값 정리를 n번만큼 반복하여 사용하면 된다. 이와 같이 오차 상계를 명시적으로 알 수 있기 때문에, '몇 번 쪼개면 몇 자리까지 맞는가'를 수학적으로 보장할 수 있다.

간단한 예시로 $f(x) = x^3 - 2$의 실근을 찾아 보자. $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 6 > 0$이므로 근은 닫힌구간 $[1, 2]$에 있다. 중점 $m_1 = 1.5$에서 $f(1.5) = 1.375 > 0$이므로 근은 닫힌구간 $[1, 1.5]$에 있다.

다시 $m_2 = 1.25$에서 $f(1.25) = -0.046875 < 0$이므로 근은 닫힌구간 $[1.25, 1.5]$에 있다.

이어서 $m_3 = 1.375$에서 $f(1.375) \approx 0.5996 > 0$이므로 근은 닫힌구간 $[1.25, 1.375]$에 있다.

$m_4 = 1.3125$에서 $f(1.3125) \approx 0.2610 > 0$이므로 근은 닫힌구간 $[1.25, 1.3125]$에,

$m_5 = 1.28125$에서 $f(1.28125) \approx 0.1033 > 0$이므로 근은 닫힌구간 $[1.25, 1.28125]$에,

$m_6 = 1.265625$에서 $f(1.265625) \approx 0.0244 > 0$이므로 근은 닫힌구간 $[1.25, 1.265625]$에,

$m_7 = 1.2578125$에서 $f(1.2578125) \approx -0.0100 < 0$이므로 근은 닫힌구간 $[1.2578125, 1.265625]$에 있다.

이 시점에서 중점 m_7과 구간 길이를 보면 근은 대략 1.26 부근이며, 실제 값 $\sqrt[3]{2} \approx 1.2599\ldots$와 잘 맞는다.

최초 구간 길이가 1이었으므로 7단계 뒤 구간 길이는 $\dfrac{1}{2^7} \approx 0.0078$이고, 중점을 이용한 근사값 m_7의 오차는 이 절반인 약 0.0039보다 작다. 즉 소수 둘째 자리 정도까지는 올바르게 맞춘 셈이다.

정리하면, 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다르면 근이 열린구간 (a, b)에 존재하고, 구간을 절반으로 나누며 부호가 바뀌는 쪽만 남기는 과정을 반복하면 구간 길이가 기하급수적으로 줄어든다. 그 결과 중점을 활용한 근사값 m_n은 실근 x^*로 수렴하고, 오차 상계 $|m_n - x^*| \le \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ 덕분에 원하는 자릿수까지 정확하게, 그리고 논리적으로 보장된 방법으로 '실근의 값이 정확히 얼마나 되는가'에 점점 가까이 다가갈 수 있다.

증분增分; increment

정의

증분은 무엇인가요?

함수 $y=f(x)$에서 x의 값의 변화량에 대한 y의 값의 변화량의 비율에 대하여 알아보자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.

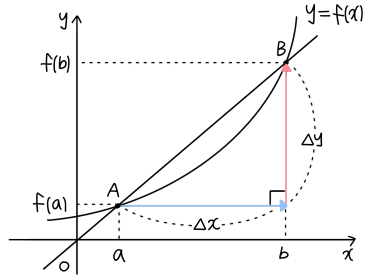
이때 x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**, y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 **증분**이라 하고, 이것을 기호로 각각

$$\Delta x, \quad \Delta y$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\Delta x = b-a, \quad \Delta y = f(b)-f(a) = f(a+\Delta x)-f(a)$$

이다.



예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

함수 $f(x)=x^2$에 대해 x가 $a=2$에서 $b=3$까지 변할 때의 증분을 구해보자.

x의 증분은 다음과 같다.

$$\Delta x = b-a = 3-2 = 1$$

이때 함숫값은 $f(a)=f(2)=4$, $f(b)=f(3)=9$이다. 따라서 y의 증분은 다음과

같다.

$$\Delta y = f(b) - f(a) = 9 - 4 = 5$$

즉, x가 1만큼 증가할 때 y값은 5만큼 증가하였다. 이때의 증분은 $\Delta x = 1$, $\Delta y = 5$로 나타낼 수 있다.

의미

증분이라는 용어의 한자, 영어, 기호 표현의 뜻을 설명해주세요.

'증(增)' 은 '늘다' , '더하다' , '증가하다' 는 뜻이며, '분(分)' 은 '나누다' , '부분' , '양' 을 의미한다. 따라서 '증분' 은 어떤 양이 **증**가된 **분**량, 즉 변수의 값이 변화함에 따라 생기는 증가량을 뜻하며, 수학에서는 독립변수나 종속변수가 변할 때 생기는 작은 변화의 크기를 의미한다.



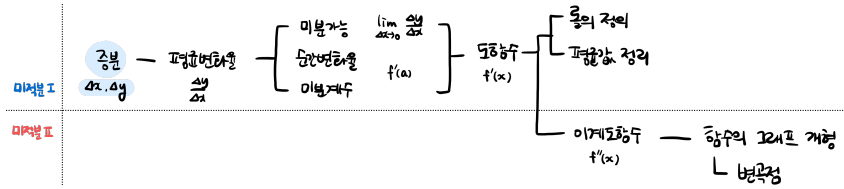
영어로는 increment라 하며, 라틴어 *incrementum*에서 유래했으며, *in-* (안으로) + *crescere* (자라다, 증가하다)의 의미를 갖는다. 즉, increment는 어떤 값이 일정량만큼 자라거나 증가하는 것을 의미하며, 함수의 평균 변화율이나 미분 개념을 정의할 때 핵심적으로 사용되는 용어이다.

Δ는 차이를 뜻하는 Difference의 첫 글자 D에 해당하는 그리스 문자로, '델타(delta)' 라고 읽는다.

개념

증분과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

증분은 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, 도함수 등 미분 관련 거의 모든 기본 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 함수 $y=f(x)$의 두 변수 x, y의 변화량인 **증분** Δx, Δy를 이용하여 함수의 **평균변화율** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$를 정의하고, $x=a$에서의 평균변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한으로 $x=a$에서의 **순간변화율** 즉, **미분계수**를 정의한다. 이때 $x=a$에서의 순간변화율이 존재할 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 하며, 정의역의 각 원소 x에 대하여 그 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수를 그 함수의 **도함수**라 한다.

평균변화율平均變化率; average rate of change

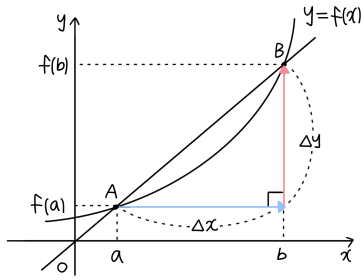
정의

평균변화율은 무엇인가요?

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 **평균변화율**은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad (\text{단, } \Delta x=b-a)$$

와 같이 나타낸다.



예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

$f(x)=x^2$일 때 함수 $y=f(x)$를 예로 들어 x의 값이 2에서 3까지 변할 때 x와 y의 증분은 각각 $\Delta x=1$, $\Delta y=5$임을 살펴보았다. 이제 x의 값이 2에서 3까지 변할 때 이 함수의 평균변화율을 구해보자.

앞서 x의 증분은 $\Delta x=1$이고, y의 증분은 $\Delta y=5$임을 보였다. 따라서 평균변화율은 다음과 같이 계산된다.

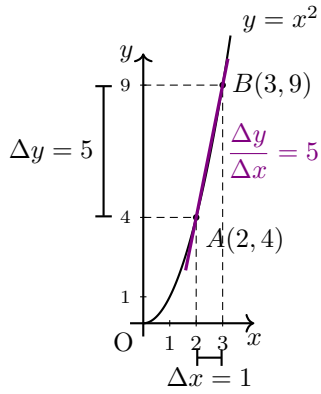
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{9-4}{3-2}=\frac{5}{1}=5$$

즉, x가 2에서 3까지 1만큼 증가하는 동안, 함수 $f(x)=x^2$의 함숫값은 5만큼 증가한다.

개념

평균변화율은 그래프에서 어떤 의미를 가지나요?

x의 값이 a에서 b까지 변할 때 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 x 값의 증가량인 x의 증분 $\Delta x=b-a$에 대한 y 값의 증가량인 y의 증분 $\Delta y=f(b)-f(a)$의 비(율)인데, 이것은 좌표평면에서 이 함수의 그래프의 두 점 $(a, f(a))$와 $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기에 해당한다. 즉, 위 예에서 구한 함수의 평균변화율 5는 함수의 그래프의 두 점 $(2, f(2))$과 $(3, f(3))$을 잇는 직선의 기울기인 것이다.



정리하면, 두 변수의 증분 사이의 비(율)인 함수의 평균변화율은 좌표평면에서 그 함수의 그래프의 두 점을 잇는 직선의 기울기이며, 이는 x 값의 변화에 따른 y 값의 변화 정도를 좌표평면에서 두 점을 잇는 직선 및 직선의 기울기로 시각화한 것이라 할 수 있다.

의미

평균변화율이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

'평(平)'은 '고르다', '같다'는 뜻이며, '균(均)'은 '고르게 나누다', '균등하다'는 뜻을 가진다. 따라서 '평균(平均)'은 여러 값을 **평**등하게 나눈 **균**형값을 의미한다.

'변(變)'은 '바뀌다', '달라지다'를, '화(化)'는 '되다', '변화하다'를 뜻하며, '율(率)'은 '비율', '비'를 나타낸다. 따라서 '변화율(變化率)'은 어떤 양의 **변화**된 정도에 대한 비**율**로 나타낸 것으로, 즉 두 양 사이의 변화량의 비율을 의미한다.

결국 '평균변화율'은 어떤 구간에서 x가 변할 때 y가 얼마나 변했는지를 나타내는 값으로, x의 변화량에 대한 y의 변화량의 비율을 뜻한다.

平 均 變 化 率

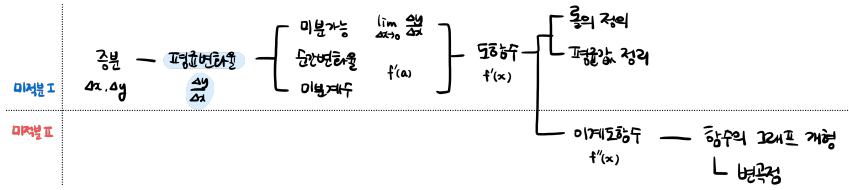
평평할 평 고를 균 변할 변 될 화 비율 률(율)

영어로는 average rate of change라 하며, average는 '평균, 대표', rate는 '비율', change는 '변화'를 뜻한다. 이 용어는 함수에서 한 값이 변할 때 그에 따라 다른 값이 얼마나 변하는지를 나타내는 변화의 평균적인 비율을 뜻한다.

개념

평균변화율과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

한 변수(독립변수)의 증분에 대한 다른 변수(종속변수)의 증분의 비(율)로 정의되는 평균변화율은 증분과 마찬가지로 미분가능, 순간변화율, 미분계수, 도함수 등 미분 관련 기본 용어 및 개념뿐 아니라 미분가능한 함수의 중요한 성질인 롤의 정리, 평균값 정리와도 밀접한 관련이 있다.



실제로 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$은 이 함수의 두 변수 x, y의 증분 Δx, Δy를 이용하여 정의하고, $x=a$에서의 평균변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한으로 $x=a$에서의 순간변화율 즉, 미분계수를 정의한다. 이때 $x=a$에서의 순간변화율이 존재할 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 하며, 정의역의 각 원소 x에 대하여 그 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수를 그 함수의 도함수라 한다.

한편 미분가능한 함수의 중요한 성질 중 하나인 롤의 정리와 평균값 정리는 그 그래프의 두 점을 잇는 직선의 기울기(평균변화율)와 같은 기울기(순간변화율, 미분계수)를 갖는 접선의 접점이 그 두 점 사이에 존재한다는 것을 보장하는 정리이다.

미분가능微分可能; differentiable,
순간변화율瞬間變化率; instantaneous rate of change**과**
미분계수微分係數; derivative

정의

미분가능, 순간변화율과 미분계수는 어떻게 정의하나요?

$\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y = f(x)$는 $x = a$에서 **미분가능**하다고 한다.

이때 이 극한값을 함수 $y = f(x)$의 $x = a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고, 이것을 기호로

$$f'(a)$$

와 같이 나타낸다. 이 기호는 'f 프라임 a' 라고 읽는다.

한편, $a + \Delta x = x$라 하면 $\Delta x = x - a$이므로, $\Delta x \to 0$일 때 $x \to a$이다. 따라서 $f'(a)$를 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

1 함수 $f(x) = x^2$에서 $x = 2$에서의 미분계수는

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$$

이다. 즉 $x = 2$에서 미분계수는 4이다.

❷ 시간 t초에 대한 어떤 물체의 위치가 $f(t) = 5t^2$ (m)로 주어진 경우를 생각해보자.

$t = 3$일 때 $f(t)$의 순간변화율은

$$f'(3) = \lim_{t \to 3} \frac{f(t) - f(3)}{t - 3} = \lim_{t \to 3} \frac{5t^2 - 5 \times 9}{t - 3} = \lim_{t \to 3} 5(t + 3) = 30 \text{ (m/s)}$$

이다. 일반적으로 $f(t)$가 위치로 주어진 경우, $f'(t)$는 순간속도를 뜻한다.

의미

미분가능, 순간변화율과 미분계수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

미분가능 '미(微)' 는 '작다' , '작은 양' 을 뜻하고, '분(分)' 은 '나누다' , '쪼개다' 를 의미한다. '가능(可能)' 은 '할 수 있음' 을 뜻하므로, '미분가능' 은 함수를 아주 작은 단위로 나누어 살펴보는 것이 가능하다라는 의미이다. 즉, 변수의 값의 변화량에 대한 함수의 변화량의 비가 한없이 일정한 값에 가까워지는 경우를 말한다.

微	分	可	能
작을 미	나눌 분	옳을 가	능할 능

영어로는 differentiable이라 하며, differentiate는 '구별하다' 라는 일반적 의미도 있으나, 수학에서는 '미분하다' 는 뜻으로, 접선의 기울기를 구하는 연산을 의미한다. -able은 ' 할 수 있는' 이라는 뜻의 형용사 어미이므로, differentiable은 '미분할 수 있는' 이라는 뜻을 갖는다.

순간변화율 '순(瞬)' 은 '눈 깜짝할 짧은 시간' , '간(間)' 은 '사이' , 즉 '순간' 은 눈 깜짝할 사이의 짧은 시간을 의미한다. '변(變)' 은 '변하다' , '화(化)' 는 '되다' , '율(率)' 은 '비율' 을 뜻한다. 따라서 '순간변화율' 은 **순간**적인 **변화**의 비**율**, 즉 특정 시점에서 어떤 양이 얼마나 빠르게 변하고 있는지를 나타내는 개념이다.

瞬 깜짝일 순　間 사이 간　變 변할 변　化 될 화　率 비율 률(율)

영어로는 instantaneous rate of change라 하며, instantaneous는 '즉각적인', '한 순간의', rate는 '비율', change는 '변화'를 뜻한다.

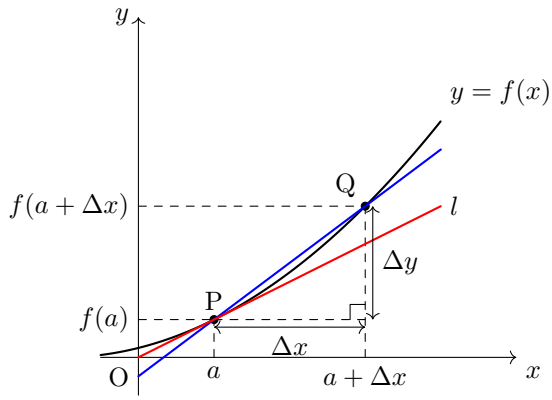
미분계수 '미분(微分)'는 '아주 작은 단위로 나눈다'를, '계(係)'는 '이어지다', '관계되다'를 뜻하며, '수(數)'는 '숫자', '수치'를 의미한다. 따라서 '미분계수'는 함수의 아주 작은 변화량을 연결하여 얻은 수치로, 특정 시점에서 함수가 얼마나 빠르게 변하는지를 나타내는 값을 뜻한다. 이는 순간변화율과 같은 의미를 지닌 용어이다.

微 작을 미　分 나눌 분　係 맬 계　數 셈(수) 수

영어로는 derivative라 하며, 이는 본래 '끌어낸 것', '파생물'이라는 뜻을 가진다. 수학에서 미분계수는 원래 함수의 점 $(a, f(a))$로부터 새롭게 끌어낸 값이다. 즉, 원래 함수에서 파생되어 만들어졌다는 점에서 'derivative'라는 이름이 붙은 것이다. 따라서 derivative는 일반적인 의미의 '파생물'과 연결되어, 원래 함수로부터 새롭게 '끌어낸 값'이라는 의미를 가진다.

개념 **미분계수(순간변화율)는 그래프에서 어떤 의미를 가지나요?**

함수의 그래프에서 미분계수(순간변화율)는 그 점에서의 접선의 기울기를 의미한다.



함수 $y=f(x)$에서 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재한다고 하자. x가 a에서 $a+\Delta x$만큼 변할 때, 함숫값의 평균변화율은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이 식은 함수의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$와 $\mathrm{Q}(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.

이때 Δx가 0에 가까워질수록, 즉 점 Q가 점 P에 점점 한없이 가까워지면 직선 PQ는 점 P를 지나는 하나의 직선 l에 한없이 가까워지게 된다.

따라서 $\Delta x \to 0$일 때, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한값은 직선 l의 기울기와 같다.

이 직선 l을 함수 $y=f(x)$의 그래프 위 점 P에서의 접선이라 하고, 점 P를 그 접선의 접점이라 한다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수(순간변화율)

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.



그러면 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 어떻게 되나요?

$x=a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다. 따라서 점

$(a, f(a))$를 지나는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

즉,

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

이다. 이 방정식이 바로 함수 $y = f(x)$의 $x = a$에서의 접선의 방정식이다.

예를 들어, 함수 $f(x) = x^2$은 $x = 2$에서의 미분계수가 $f'(2) = 4$이므로 $x = 2$에서 이 함수의 그래프의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$$

개념

미분가능성과 연속성 사이에는 어떤 관계가 있나요?

함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하면, 이 함수는 $x = a$에서 연속이다. 함수가 $x = a$에서 미분가능하다는 것은 미분계수 $f'(a)$가 존재한다는 뜻이다.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

그러므로

$$\lim_{x \to a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \right\}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \times 0 = 0$$

이고, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

즉, 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하면, $x = a$에서 연속임을 알 수 있다.



그러면 혹시 그 역도 성립하나요?

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이다. 그러나 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다. 즉, 함수 $f(x)$가 어떤 점 $x=a$에서 연속이지만 미분이 불가능한 경우도 존재한다. 예를 들어 함수 $f(x)=|x|$의 $x=0$에서의 미분가능성과 연속성을 살펴보자. 이 함수는 그래프가 끊기지 않고 부드럽게 이어지므로 모든 실수에서 연속이고 따라서 $x=0$에서도 연속지만, $x=0$에서는 미분이 불가능하다.

이를 확인하기 위해 다음을 살펴보자.

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

에서 보듯이, $x=0$에서의 좌극한과 우극한이 서로 다르므로 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분 불가능하다. 즉, 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만, 미분은 불가능하다.

이처럼 연속이지만 미분 불가능한 함수는 뾰족한 점이 생기는 경우에 자주 나타난다.

개념

평균변화율과 순간변화율은 어떤 차이가 있나요?

평균변화율은 정해진 구간에서의 변화율을 나타내고, 순간변화율은 정해진 구간이 아닌 주어진 한 점에서의 순간적인 변화율을 나타낸다.

$$\text{평균변화율}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad \text{순간변화율}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

즉, 어떤 점에서의 순간변화율은 그 점을 한 끝점으로 하는 구간이 그 점을 끝점으로 유지한 상태로 한없이 좁아질 때 구간의 양 끝점 사이의 평균변화율이 한없이 가까워지는 값 즉, 극한(값)인 것이다.



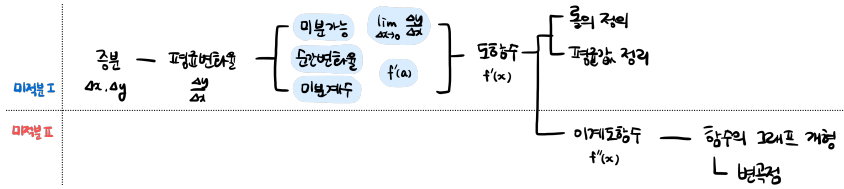
실생활에서 순간변화율은 어떤 의미가 있나요?

순간변화율은 실생활에서 **어떤 시점에서의 즉각적인 변화량**을 알려주는 매우 중요한 개념이다. 예를 들어, 자동차의 속도계는 현재의 속도를 나타내는데, 이는 위치의 순간변화율을 실시간으로 계산하여 보여주는 것이다. 즉, 위치 함수의 미분값이 바로 속도이며, 순간변화율은 실생활에서 빠르게 변하는 현상을 분석할 때 사용된다.

개념

미분가능, 순간변화율과 미분계수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

미분가능, 순간변화율, 미분계수는 증분, 평균변화율, 도함수, 롤의 정리, 평균값 정리, 이계도함수, 함수의 그래프 개형 그리기, 변곡점 등 함수의 미분과 활용 관련 거의 모든 용어 및 개념과 관련이 있다.



실제로 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$은 이 함수의 두 변수 x, y의 **증분** Δx, Δy를 이용하여 정의하고, $x=a$에서의 평균변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한으로 $x=a$에서의 **순간변화율** 즉, **미분계수**를 정의한다. 이때 $x=a$에서의 순간변화율이 존재할 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 하며, 정의역의 각 원소 x에 대하여 그 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수를 그 함수의 **도함수**라 한다.

한편 미분가능한 함수의 중요한 성질 중 하나인 **롤의 정리**와 **평균값 정리**는 그 그래프의 두 점을 잇는 직선의 기울기(평균변화율)와 같은 기울기(순간변화율, 미분계수)를 갖는 접선의 접점이 그 두 점 사이에 존재한다는 것을 보장하는 정리이다.

도함수導函數; derivatives

정의

도함수는 무엇인가요?

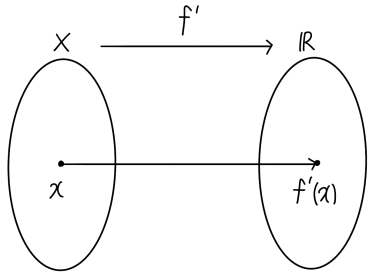
함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 정의역의 각 원소 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시키면 새로운 함수

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 얻을 수 있다. 이때 이 함수를 함수 $y=f(x)$의 **도함수**라 하고, 이것을 기호로

$$f'(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.



여기서 집합 X는 함수 $f(x)$가 미분가능한 x 전체의 집합, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합을 나타낸다.



도함수의 기호에 대해 설명해주세요.

$\frac{dy}{dx}$는 단순히 dy를 dx로 나눈다는 뜻이 아니라, **y를 x에 대해 미분한다**는 의미이다.

함수 $f(x)$의 **도함수**는 다음과 같이 여러 형태로 나타낼 수 있다.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)의 도함수는 $f'(x)=0$이다.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$$

❷ 함수 $f(x)=2x$의 도함수는 $f'(x)=2$이다.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\\&=2\end{aligned}$$

❸ 함수 $f(x)=x^2$의 도함수는 $f'(x)=2x$이다.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(2x+h)\\&=2x\end{aligned}$$

의미

도함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

'도(導)'는 '이끌다', '인도하다'는 뜻을 가진다. 즉, '도함수'는 원래의 함수가 변하는 양을 이끌어내는 새로운 함수를 뜻한다. 함수의 변화율을 계산하여, 그 함수의 순간적인 변화를 나타내는 또 다른 함수를 만든 것이 바로 도함수이다.

導	函	數
인도할 도	상자 함	셈(수) 수

영어 단어 derivative는 본래 '끌어낸 것', '파생물'이라는 뜻을 가진다. 수학에서

함수의 도함수는 주어진 함수 $f(x)$로부터 새롭게 파생된 함수로, 각 점에서의 미분계수 값을 모두 모아 만든 함수이다. 즉, 원래 함수의 변화율 정보를 종합하여 새롭게 만들어졌다는 점에서 derivative라는 이름이 붙은 것이다.

개념

도함수가 무엇을 나타내는지 좀 더 구체적으로 설명해주세요.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $f(x)$의 순간변화율(미분계수, 접선의 기울기)의 변화를 x의 값에 따라 나타내는 함수이다.

함수 $f(x)$의 그래프가 시간 x의 변화에 따른 물체의 위치 변화를 좌표평면에 그래프로 나타낸 것이라면 도함수 $f'(x)$의 그래프는 시간 x의 변화에 따른 물체의 속도 변화를 좌표평면에 그래프로 나타낸 것이다. 기하적으로는 함수 $f(x)$의 그래프의 각 점에서의 접선의 기울기의 변화를 좌표평면에 나타낸 것이 도함수 $f'(x)$의 그래프인 것이다.



도함수와 미분계수는 어떻게 다른가요?

미분계수는 특정한 한 점 $x=a$에서의 순간변화율, 즉 접선의 기울기를 나타내는 값이다. 이에 비해 도함수는 미분계수가 존재하는 각 점 x에 그 점에서의 미분계수를 대응시키는 함수이다. 즉, 미분계수는 하나의 값이고, 도함수는 미분계수를 함숫값으로 갖는 함수로서 도함수의 함숫값 하나 하나가 미분계수인 것이다.



어떤 함수가 도함수를 가질 수 있는 조건은 무엇인가요?

함수가 어떤 점에서 미분가능하면 미분계수가 존재하므로, 그 점에서 미분계수를 함숫값으로 갖는 도함수를 생각할 수 있다. 이처럼 어떤 함수가 도함수를 가지려면 미분가능한 점이 적어도 하나 이상은 존재해야 한다.

만약 어떤 함수가 정의역의 모든 점에서 미분가능하다면, 그와 똑같은 정의역에서 그 함수의 도함수가 정의된다. 하지만 어떤 함수는 정의역에 미분가능하지 않는 점이 있을 수도 있다. 이 경우에는 **미분가능한 점들만 모아서** 그 집합을 정의역으로 하는 도함수를 생각한다.

예를 들어, 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않지만 $x=0$을 제외한 다른

모든 점에서는 미분가능하므로, 0을 제외한 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 도함수 $f'(x)$가 다음과 같이 유도된다.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

개념

도함수의 그래프의 의미를 함수의 그래프와 비교하여 설명해주세요.

함수의 그래프의 각 점에서의 접선의 기울기가 도함수의 그래프의 각 점의 y좌표가 된다.

그러므로 함수가 어떤 구간에서 증가하면 도함수의 함숫값은 그 구간에서 양수이므로 도함수의 그래프는 x축 보다 위에 그려지고, 감소하면 도함수의 함숫값이 그 구간에서 음수이므로 도함수의 그래프는 x축 보다 아래에 그려진다. 또 함수의 그래프에서 접선의 기울기가 가장 가파른 곳에서는 도함수의 함숫값의 절댓값이 가장 크고, 함수의 그래프의 접선이 x축과 평행한 곳에서는 도함수의 함숫값이 0이 된다.

이를 이용하면 도함수의 그래프에 대한 해석으로부터 원래 함수의 그래프가 어떤 모양인지 개략적으로나마 파악할 수 있다. 실제로 도함수의 그래프가 x축보다 위에 그려져 있는 구간에서는 원래 함수는 증가하므로 그래프가 오른쪽 위로 향하고, x축보다 아래에 그려져 있는 구간에서는 원래 함수는 감소하므로 그래프가 오른쪽 아래로 향하며, 도함수의 그래프가 x축과 만나는 지점에서 원래 함수는 극값을 가지므로 그래프에서 극대점 또는 극소점이 된다. (이에 대한 보다 자세한 내용은 증가, 감소, 극대, 극소에 대한 안내자료 참고)

개념

다항함수의 도함수는 어떻게 되나요?

$f(x) = x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\{(x+h) - x\}\{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\} \end{aligned}$$

$$= nx^{n-1}$$

한편 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 미분가능하면 이들 두 함수를 더하거나, 빼거나, 상수배를 한 함수 역시 미분가능하며, 그 도함수는 다음과 같은 규칙을 따른다.

- **상수배의 도함수** : $(kf(x))' = kf'(x)$ (k는 상수)
- **합과 차의 도함수** : $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

위 성질에 의해 다항함수

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 그 도함수는 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)' \\ &= (a_n x^n)' + \left(a_{n-1}x^{n-1}\right)' + \cdots + (a_1 x)' + (a_0)' \\ &= na_n x^{n-1} + +(n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \end{aligned}$$

한편 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 미분가능하면 이들 두 함수를 더하거나, 빼거나, 상수배를 한 함수 뿐 아니라 곱해서 얻는 함수 역시 미분가능하며, 그 도함수는 다음과 같은 규칙을 따른다.

- **곱의 도함수** : $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

개념

도함수를 갖는 함수는 어떤 성질을 갖나요?

어떤 구간에서 도함수를 갖는 함수는 그 구간에서 미분가능한 함수이다. 어떤 구간에서 미분가능한 함수는 그 구간에서 연속인 함수로서, 그 그래프는 끊어짐도 없고 뾰족한 점도 없는 매끄러운 곡선이다. 이런 함수들이 갖는 중요한 성질로 롤의 정리와 평균값 정리가 있다.

- **롤의 정리** : 어떤 함수가 닫힌구간에서 연속이고 열린구간에서 미분가능하며, 양 끝점에서 함숫값이 같다면, 그 사이 어딘가에서 도함수의 함숫값 즉, 미분계수가 0이 되는 점이 존재한다.

- **평균값 정리** : 어떤 함수가 닫힌구간에서 연속이고 열린구간에서 미분가능하다면, 구간의 평균 변화율과 같은 값을 도함수의 함숫값 즉, 미분계수로 갖는 점이 적어도 하나 존재한다.

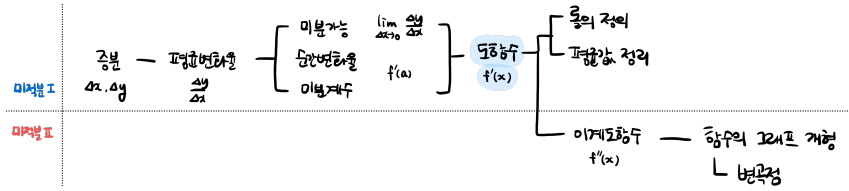
이들 두 정리는 도함수를 갖는 함수 즉, 미분가능한 함수의 경우 두 점 사이의 평균변화율과 같은 값의 순간변화율이 존재하는 점이 그 두 점 사이에 존재한다는 것을 의미한다.

실생활의 예를 생각해보면, 고속도로를 달리는 자동차의 구간단속 구간에서의 평균 속력이 시속 100km이었다면, 순간 속력이 시속 100km이었던 순간이 그 구간 내에 적어도 한 번은 반드시 있었다는 것이다.

개념

도함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

도함수는 증분, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, 롤의 정리, 평균값 정리, 이계도함수, 함수의 그래프 개형 그리기, 변곡점, 부정적분, 정적분, 미적분의 기본정리 등 함수의 미분과 적분 관련 거의 모든 용어 및 개념과 관련이 있다.



실제로 함수 $f(x)$의 **도함수**는 $f(x)$가 **미분가능**할 때 정의역의 각 원소 x에 대하여 **미분계수** 즉, **순간변화율** $f'(x)$를 대응시키는 함수이다. 이때 순간변화율은 **평균변화율**의 극한이고, 평균변화율은 함수 $f(x)$의 두 변수의 **증분** 사이의 비율이다.

도함수를 갖는 함수 즉, 미분가능한 함수의 중요한 성질로 **롤의 정리**와 **평균값 정리**가 있다. 이들 두 정리는 미분가능한 함수의 그래프의 두 점을 잇는 직선의 기울기(평균변화율)와 같은 기울기(순간변화율, 미분계수)를 갖는 접선의 접점이 그 두 점 사이에 존재한다는 것을 보장해준다.

미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수가 미분가능할 때 그 도함수의 도함수를 함수 $f(x)$의 **이계도함수**라고 한다. 도함수와 이계도함수를 이용하여 함수의 그래프 개형을 **증가**, **감소**,

극대, 극소, 변곡점 등의 정보가 포함되도록 그릴 수 있다.

한편 어떤 함수 $f(x)$가 미분가능할 때 그 도함수 $f'(x)$를 구하는 미분과는 달리 어떤 함수 $f(x)$가 주어졌을 때 그 함수를 도함수로 갖는 함수를 생각할 수 있는데 이런 함수를 $f(x)$의 부정적분이라 하고 $\int f(x)dx$로 나타낸다. 그리고 어떤 함수의 부정적분을 찾는 것을 그 함수를 적분한다고 한다. 어떤 구간에서 함수 $f(x)$를 적분할 수 있으면, 미적분의 기본정리를 이용하여 그 구간에서 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이 즉, 정적분을 쉽게 계산할 수 있다.

롤의 정리롤의 定理; Rolle's theorem

정의

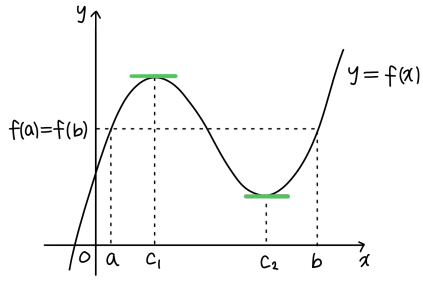
롤의 정리는 무엇인가요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a) = f(b)$이면

$$f'(c) = 0$$

인 실수 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이 성질을 **롤의 정리**라 한다.



예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 3$를 생각해보자.

이 이차함수는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로, 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하다. 또한,

$$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0, \quad f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$$

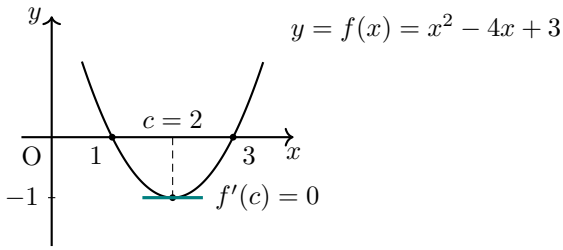
이므로 $f(1) = f(3)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 롤의 정리의 모든 가정을 모두 만족하므로, 롤의 정리에 의해 $f'(c) = 0$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)$의 도함수가 $f'(x) = 2x - 4$이므로, 롤의 정리를 만족하는 실제 c의 값을 찾아보면

다음과 같다.

$$f'(c)=0,\quad 2c-4=0,\quad c=2.$$



개념

롤의 정리의 핵심적인 아이디어와 조건은 무엇인가요?

롤의 정리는 함수가 어떤 구간에서 연속이고, 미분가능하며, 구간의 양 끝점에서의 함숫값이 같을 때 적용할 수 있는 정리이다. 이 정리는 좌표평면에서 함수의 그래프가 한 점에서 그려지기 출발하여 다시 출발점과 같은 높이의 점으로 돌아온다면, 그 사이 어딘가에서 접선의 기울기가 0이 되는 점이 반드시 존재한다는 것을 보장한다. 즉, 그래프의 출발점과 도착점이 같은 높이에 있을 때, 그 사이 어딘가에서는 '평평한 접선' 즉, x축과 평행한 접선이 존재하는 점이 그래프 상에 반드시 존재한다는 것이 롤의 정리의 핵심적인 아이디어라 할 수 있다.



롤의 정리가 성립하기 위한 조건을 다시 한 번 정리해주세요.

롤의 정리가 성립하려면 주어진 함수가 다음 세 가지 조건을 모두 만족해야 한다.

❶ 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고,

❷ 열린구간 (a,b)에서 미분 가능하며,

❸ 양 끝점의 함숫값이 같아야 한다, 즉 $f(a)=f(b)$이다.

이 세 조건이 충족되면, 열린구간 (a,b) 안에 적어도 하나의 점 c가 존재하여 $f'(c)=0$이 된다.



세 가지 조건은 각각 어떤 의미인가요?

함수가 닫힌구간에서 연속이라는 것은, 그래프가 중간에 끊기지 않고 처음부터 끝까지 자연스럽게 이어져 있어야 한다는 뜻으로 주어진 구간에서 함숫값이 어떻게 변하는지 살펴볼 수 있기 때문이다.

또한 열린구간에서 미분가능해야 하는 이유는, 함숫값이 어떻게 변하고 있는지를 수학적으로 표현하기 위해 접선의 기울기를 계산할 수 있어야 하기 때문이다.

그래프가 부드럽게 이어져 있고 뾰족한 점 없이 매끄럽게 그려질 수 있어야만, 어떤 특정한 지점에서 접선을 그을 수 있고 그 기울기가 얼마인지를 수식으로 나타낼 수 있다.

특히 구간의 양 끝에서 함숫값이 같다는 조건 $f(a) = f(b)$가 더해지면, 함수는 시작점과 끝점에서 같은 높이로 출발하고 도착하게 된다. 이는 함숫값이 증가했다면 다시 감소해야 하고, 반대로 감소했다면 다시 증가해야만 같은 높이로 돌아올 수 있다는 뜻이다. 따라서 이러한 구간 안에는 변화가 멈추는, 즉 함수의 순간 변화율이 0이 되는 지점이 반드시 존재하게 된다. 이러한 사실을 수학적으로 보장해 주는 것이 바로 롤의 정리이다.

개념

세 가지 조건 중 하나라도 만족하지 않으면 롤의 정리는 어떻게 될까요?

세 가지 조건 중 하나라도 만족하지 않으면 롤의 정리를 적용할 수 없다. 왜냐하면 롤의 정리는 함수가 닫힌구간에서 연속이고, 열린구간에서 미분가능하며, 양 끝의 함숫값이 같은 경우에만 그 사이 어딘가에서 접선의 기울기(즉, 도함수의 값)가 0이 되는 점이 존재함을 보장하기 때문이다. 이 조건들이 하나라도 빠지면 이러한 결론을 논리적으로 말할 수 없다.



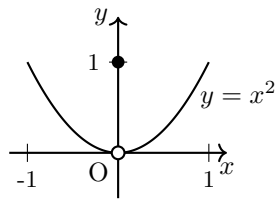
닫힌구간에서 연속이 아니면 어떻게 될까요?

함수가 닫힌구간에서 연속하지 않다면, 그래프가 중간에서 끊어져 있는 부분이 생기게 된다. 이 경우 함수의 값이 갑자기 점프하거나 없는 구간이 있으므로, 함수의 변화가 자연스럽게 이어지지 않아 접선의 기울기가 0이 되는 점을 찾을 수 없다.

예를 들어, 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

을 생각해 보자.



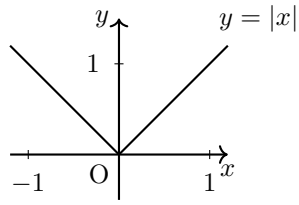
이 함수는 $x = 0$에서 불연속이므로, 그래프가 한 번 끊어지고 실제로 기울기가 0인 접선이 생기지 않음을 알 수 있다.



열린구간에서 미분가능이 아니면 어떻게 될까요?

함수가 열린구간에서 미분가능하지 않다면, 어딘가에 뾰족한 점이 생기거나 접선을 그을 수 없는 점이 존재하게 된다. 이 경우에는 함수의 기울기를 계산할 수 없으므로, $f'(c) = 0$인 점의 존재를 논리적으로 보장할 수 없다.

예를 들어 함수 $f(x) = |x|$를 생각하자. 이 함수는 $x = 0$에서 뾰족한 점을 가지므로 미분이 불가능하다. 따라서 $x = 0$에서 접선의 기울기를 구할 수 없고, 실제로 $f'(c) = 0$가 되는 점이 존재하지 않는다.





양 끝값이 다르면 어떻게 될까요?

함수의 양 끝에서의 함숫값이 다르다면, 즉 $f(a) \neq f(b)$이면 그래프가 같은 높이로 시작하고 끝나지 않으므로, 그 사이 어딘가에서 접선의 기울기가 0이 되는 점이 반드시 존재한다고는 말할 수 없다.

예를 들어 함수 $f(x) = x$를 닫힌구간 $[0, 2]$에서 생각하자. 이때 $f(0) = 0$, $f(2) = 2$이므로 $f(0) \neq f(2)$이다. 이 함수의 그래프는 모든 점에서의 접선이 일정한 기울기 1을 가지는 직선이므로, 접선의 기울기가 0이 되는 점은 존재하지 않는다.

따라서 $f(a) = f(b)$의 조건이 성립하지 않으면, 그래프가 다시 같은 높이로 돌아오지 않으므로 접선의 기울기의 변화가 멈추는 순간, 즉 $f'(c) = 0$이 되는 점이 존재한다고

보장할 수 없다.

개념

롤의 정리에서 $f'(c)=0$은 그래프에서 어떤 의미일까요?

$f'(c)=0$이라는 것은 그래프가 그 점에서 순간적으로 **증가**도 **감소**도 하지 않는다는 뜻이다. 즉, 그 점에서는 함수의 순간 변화율이 0이 되어 접선이 수평이 된다.

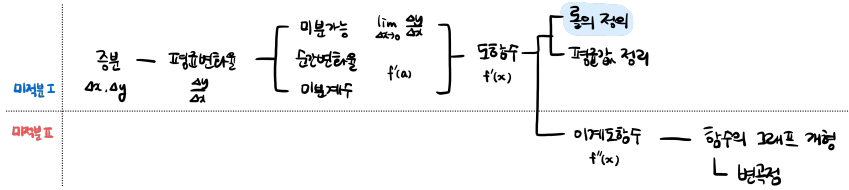
그래프의 모양으로 보면, 점 $(c, f(c))$의 근방에서 함수가 위로 올라가다가 내려오거나, 내려가다가 다시 올라오는 형태로 나타난다. 이러한 경우, 점 $(c, f(c))$에서는 함숫값이 가장 크거나 작을 수 있는데, 이러한 값을 **극값**이라고 하며, 자세한 내용은 **극값**에서 살펴본다.

따라서 롤의 정리는 함수가 부드럽게 이어지는 구간 안에서는 반드시 한 번은 접선이 수평이 되는 점이 존재함을 보장하는 정리이다.

개념

롤의 정리와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

롤의 정리는 연속, 증분, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, 롤의 정리, 평균값 정리 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



실제로 **롤의 정리**는 미분가능한 함수가 지닌 중요한 성질로서 어떤 구간에서 **연속**이고 **미분가능**한 함수의 그래프의 두 점을 잇는 직선의 기울기(평균변화율)와 같은 기울기(순간변화율, 미분계수)를 갖는 접선의 접점이 그 두 점 사이에 존재한다는 것을 의미한다. 이때 어떤 구간에서 함수 $f(x)$가 미분가능하다는 것은 그 구간의 각 원소 x에 대하여 **미분계수** 즉, **순간변화율**이 존재하여 그 값을 함숫값으로 하는 함수 즉, **도함수**가 정의된다는 것이고, 순간변화율은 **평균변화율**의 극한, 평균변화율은 함수 $f(x)$의 두 변수의 **증분** 사이의 비율로 정의된다.

도함수를 갖는 함수 즉, 미분가능한 함수의 중요한 성질로 롤의 정리와 함께 **평균값 정리**가 있다. 롤의 정리는 평균값 정리의 특수한 경우에 해당하고 평균값 정리는 롤의 정리를 일반화한 것이다.

● **롤의 정리는 어떻게 증명할까요?**

롤의 정리는 최대 · 최소 정리를 사용하여 다음과 같이 증명할 수 있다.

> **롤의 정리:**
> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,
> $f(a) = f(b)$이면 $f'(c) = 0$인 실수 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

함수 $f(x)$가 상수함수인 경우와 상수함수가 아닌 경우로 나누어 생각해보자.

❶ $f(x)$가 상수함수인 경우

정의역인 구간 $[a, b]$의 모든 x에 대하여 $f(x) = k$로 함수값이 같으므로 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x) = 0$이다. 따라서 $f'(c) = 0$인 실수 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

❷ $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우

$f(a) = f(b)$이고 $f(x)$가 상수함수가 아니므로, $f(a) = f(b)$와 함수값이 다른 점이 존재한다. 즉 $f(a)$보다 큰 값 또는 작은 값이 적어도 하나는 존재한다.

한편 정의역인 구간 $[a, b]$에서 $f(x)$가 연속이므로 $f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

(i) 만약 $f(a)$보다 큰 값이 존재한다면 $f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 최댓값을 가지므로 $x = c$에서 최댓값 $f(c)$를 갖는다고 하자. 이때, $c \neq a$, $c \neq b$이므로 $x = c$는 열린구간 (a, b)에 존재한다.

그리고 $f(c)$가 최댓값이므로 $x = c$근방의 함수값들은 모두 $f(c)$보다 작거나 같다. 즉 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$h > 0\text{이면 } \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0\text{이므로 } \lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0\text{이고,}$$
$$h < 0\text{이면 } \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0\text{이므로 } \lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0\text{이다.}$$

그런데 $f(x)$는 (a, b)에서 미분가능하다고 하였으므로 $a < c < b$인 $x = c$에서 $f'(c)$가 존재한다. 따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$$

이다. 즉 $f'(c) = 0$이므로 정리가 증명되었다.

(ii) 만약 $f(a)$보다 작은 값이 존재한다면 최솟값을 이용하여 위와 같은 방법으로 증명할 수 있다.

평균값 정리 평균값 定理; mean value theorem

정의

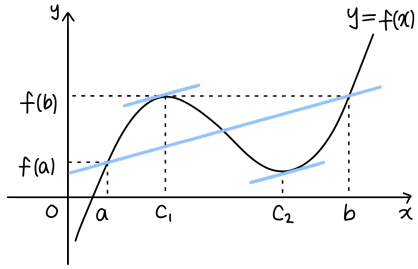
평균값 정리는 무엇인가요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 실수 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이 성질을 **평균값 정리**라 한다.



예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

함수 $f(x)=x^2$를 생각해 보자.

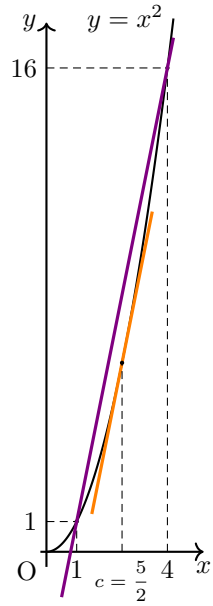
이 이차함수는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고, 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리를 적용할 수 있다. 평균값 정리에 따르면 다음 조건을 만족하는 c가 열린구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{16-1}{3}=\frac{15}{3}=5$$

실제로 c가 어떤 값인지 찾아보자. $f(x)$의 도함수가

$$f'(x)=2x$$



이므로, $f'(c)=5$가 되는 c를 구하면

$$2c=5, \qquad c=\frac{5}{2}$$

이다. 따라서 $c=\frac{5}{2}$이다.

개념

평균값 정리의 핵심적인 아이디어와 조건은 무엇인가요?

평균값 정리는 함수가 어떤 닫힌구간에서 연속이고, 그 구간의 내부(열린구간)에서 미분가능할 때 적용할 수 있는 정리이다. 이 정리는 닫힌구간 전체에서의 평균적인 변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점이 열린구간 안의 어딘가에 반드시 존재함을 보장한다. 즉, 닫힌구간에서 그래프의 양 끝점을 잇는 직선과 기울기가 같은 그래프의 접선을 그 사이 어딘가에서 반드시 그릴 수 있다는 것이 평균값 정리의 핵심적인 아이디어라 할 수 있다. 물론 그러한 접선은 하나일 수도 있고 여러 개일 수도 있다.



평균값 정리에 필요한 조건은 무엇인가요?

평균값 정리가 성립하려면 주어진 함수가 다음 두 가지 조건을 모두 만족해야 한다.

❶ 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고,

❷ 열린구간 (a,b)에서 미분가능해야 한다.

이 두 조건이 충족되면, 다음을 만족하는 실수 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



이 조건들은 각각 어떤 의미인가요?

함수가 닫힌구간에서 연속이라는 것은, 그래프가 중간에 끊기지 않고 처음부터 끝까지 자연스럽게 이어져 있어야 한다는 뜻이다. 함숫값이 어떻게 변화하는지를 하나의 연결된 곡선으로 이해할 수 있어야 하기 때문이다.

또한 열린구간에서 미분가능해야 한다는 것은, 그래프가 뾰족하거나 끊어지지 않고 부드럽게 그려질 수 있어야 한다는 의미이다. 이렇게 매끄러운 그래프일 때, 그래프 위의

어느 한 점에서 접선을 그을 수 있고 그 기울기가 평균 변화율과 정확히 일치하는지를 수식으로 표현할 수 있다.

개념

두 조건 중 하나라도 만족하지 않으면 평균값 정리는 어떻게 될까요?

평균값 정리는 함수가 닫힌구간에서 연속이고, 열린구간에서 미분가능한 경우에만 적용할 수 있다.

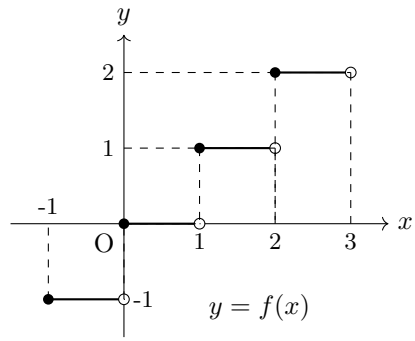
그러나 이 두 조건 중 하나라도 빠지게 되면, 평균값 정리를 적용할 수 없다.



닫힌구간에서 연속이 아니면 어떻게 될까요?

함수가 닫힌구간에서 연속하지 않다면, 그래프가 끊어지는 지점이 존재하게 된다. 이 경우 전체 변화량(평균변화율)을 하나의 곡선 위에서 측정하는 것이 어려워지고, 중간에 기울기가 평균변화율과 같은 접선이 생긴다고 보장할 수 없다. 즉, 함수가 닫힌구간에서 연속하지 않으면, 평균값 정리를 적용할 수 없다.

예를 들어, 함수 $f(x)=[x]$를 닫힌구간 $[1,2]$ 구간에서 생각해 보자.



이 함수는 열린구간 $(1,2)$ 안에서는 미분가능하지만, $x=1$과 $x=2$에서는 불연속이다. 특히 $x=2$에서 함숫값이 갑자기 점프하기 때문에, 닫힌구간 전체에서 연속이 아니다.

이때 $f(1)=1$, $f(2)=2$이므로 평균변화율은 다음과 같다.

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2-1}{1}=1$$

하지만 $1 < c < 2$인 모든 c에 대해 $f'(c) = 0$이므로, $f'(c)$가 평균변화율과 같아지는 c는 존재하지 않는다.

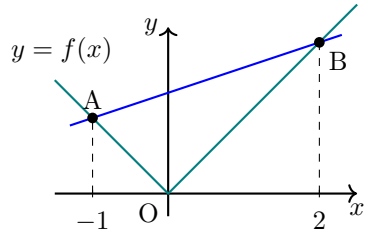
즉, 함수가 닫힌구간에서 연속이 아니라면 평균값 정리는 성립하지 않는다.



열린구간에서 미분가능이 아니면 어떻게 될까요?

열린구간 (a, b)에서 미분가능하지 않은 점이 하나라도 있으면, 그 지점은 모서리(뾰족점)처럼 접선을 정의할 수 없는 곳이 생기며 순간변화율 $f'(x)$를 수학적으로 정의할 수 없게 된다. 따라서 평균변화율과 일치하는 $f'(c)$가 존재한다고 말할 수 없으며, 평균값 정리를 적용할 수 없다.

예를 들어 $f(x) = |x|$를 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 생각해보자.



이 함수는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이지만 $x = 0$에서 미분가능하지 않으므로 평균값 정리의 가정을 만족하지 않는다. 두 점 $\mathrm{A}(-1, f(-1))$과 $\mathrm{B}(2, f(2))$를 잇는 직선 $\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기는

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

이다. 한편 도함수는 $x = 0$을 제외한 점에서 $f'(x) = 1\ (x > 0)$, $f'(x) = -1\ (x < 0)$이다. 따라서 열린구간 $(-1, 2)$ 어디에서도 $f'(c) = \frac{1}{3}$을 만족하는 c가 존재하지 않는다. 결론적으로 이 예에서는 평균값 정리를 적용할 수 없고, 실제로 결론도 성립하지 않는다.

개념

평균값 정리에서 $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$는 그래프에서 어떤 의미일까요?

평균값 정리는 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$와 $\mathrm{B}(b, f(b))$를 잇는 직선 AB의 기울기와 같은 기울기를 갖는 접선이 열린구간 (a, b)에서 적어도 한 번 나타난다는 뜻이다.

즉, 닫힌구간 $[a, b]$에서 f가 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면, 어떤 $c \in (a, b)$가 존재하여

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

가 되고, 점 $\mathrm{C}(c, f(c))$에서의 접선이 직선 AB와 평행이 된다.

곡선 $y = f(x)$에서 직선 AB의 기울기 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$는 닫힌구간 $[a, b]$의 **평균변화율**이다. 평균값 정리는 어떤 점 $c \in (a, b)$에서의 **순간변화율** $f'(c)$가 이 값과 정확히 같아짐을 보장한다. 기하적으로는 두 점을 잇는 직선과 평행한 접선이 그 사이 어딘가에서 반드시 그려진다는 의미이다.

개념

평균값 정리는 롤의 정리와 어떤 관계인가요?

롤의 정리는 함수가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며, 양 끝점의 함숫값이 같을 때 $(f(a) = f(b))$, 그 사이 어딘가에서 접선의 기울기 $f'(c)$가 0이 되는 점이 존재함을 보장하는 정리이다.

반면, 평균값 정리는 $f(a)$와 $f(b)$가 서로 달라도 성립한다. 즉, 함수가 닫힌구간에서 연속이고 열린구간에서 미분가능하기만 하면, 구간 전체의 평균적인 변화율과 같은 순간변화율을 가지는 점 c가 존재한다.

따라서 평균값 정리는 롤의 정리를 포함하는 더 넓은 개념이며, $f(a) = f(b)$인 특별한 경우에는 평균값 정리가 바로 롤의 정리가 된다. 즉, 평균값 정리는 롤의 정리를 일반화한 정리라고 할 수 있다.

더 알아보기

평균값 정리는 어떻게 다양한 형태로 나타날 수 있나요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 평균값 정리는 여러 가지 형태로 나타날 수 있다.

❶ 열린구간 (a, b) 안에는 어떤 점 c가 존재하여 다음을 만족한다.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

즉, 구간 전체에서의 함숫값 변화량이 어떤 한 순간의 변화율 $f'(c)$에 구간의 길이 $(b-a)$를 곱한 값과 같다는 의미이다.

❷ $b=a+h\ (h>0)$으로 놓으면, 평균값 정리는 다음처럼 쓸 수 있다.

$$f(a+h)=f(a)+f'(c)h$$

이 식은 함숫값 $f(a+h)$가 $f(a)$에서 h만큼 이동하는 동안 순간변화율 $f'(c)$만큼 증가하거나 감소함을 의미한다.

❸ 여기서 $c=a+\theta h$라고 놓으면, $0<\theta<1$이 되는 어떤 수 θ가 존재하며,

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h$$

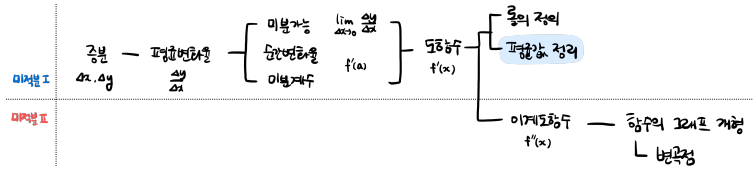
와 같이 쓸 수 있다.

이 표현은 평균값 정리가 테일러 전개, 오차 표현, 수치적 근사 등에서 매우 중요한 도구로 활용된다는 것을 보여주는 형태이다.

개념

평균값 정리와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

평균값 정리는 연속, 증분, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, 롤의 정리, 롤의 정리 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



실제로 **평균값 정리**는 미분가능한 함수가 지닌 중요한 성질로서 어떤 구간에서 연속이고 미분가능한 함수의 그래프의 두 점을 잇는 직선의 기울기(평균변화율)와 같은 기울기(순간변화율, 미분계수)를 갖는 접선의 접점이 그 두 점 사이에 존재한다는 것을 의미한다. 이때 어떤 구간에서 함수 $f(x)$가 미분가능하다는 것은 그 구간의 각 원소 x에 대하여 미분계수 즉, 순간변화율이 존재하여 그 값을 함숫값으로 하는 함수 즉, 도함수가 정의된다는 것이고, 순간변화율은 평균변화율의 극한, 평균변화율은 함수 $f(x)$의 두 변수의

증분 사이의 비율로 정의된다.

도함수를 갖는 함수 즉, 미분가능한 함수의 중요한 성질로 평균값 정리와 함께 **롤의 정리**가 있다. 롤의 정리는 평균값 정리의 특수한 경우에 해당하고 평균값 정리는 롤의 정리를 일반화한 것이다.

심화(참고)

● **평균값 정리는 어떻게 증명할까요?**

평균값 정리는 롤의 정리를 사용하여 다음과 같이 증명할 수 있다.

> **평균값 정리:**
> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$인 실수 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

$f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 $g(x)$도 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다.

한편 $g(a) = 0$, $g(b) = 0$, 즉 $g(a) = g(b)$이므로 $g(x)$에 대하여 롤의 정리가 성립한다. 따라서 $g'(c) = 0$인 실수 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$이므로

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

이다.

즉 $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 실수 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

● **평균값 정리를 여러 번 사용하여 확장할 수 있나요?**

평균값 정리는 함수가 여러 번 미분가능할 때, 함수의 값을 더 정밀하게 예측할 수 있도록 다음과 같이 확장된다.

함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다고 하자. 이때 평균값 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \quad (a < c < b)$$

이 식은 $f(b)$의 값을 $f(a)$와 도함수의 값을 이용해 예측할 수 있다는 의미이다.

만약 $f(x)$가 두 번 미분가능하다면, 다음과 같은 조금 더 정밀한 식도 성립한다.

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2 \quad (a < c < b)$$

여기서 $f''(c)$는 a와 b 사이의 어떤 점 c에서의 이계도함수의 함숫값이다. 이 식은 $f(b)$의 값을 $f(a)$, $f'(a)$, 그리고 $f''(c)$를 이용해 추정하는 것이다.

이 아이디어를 일반화하면 다음과 같이 된다.

함수 $f(x)$가 n번 미분가능하고, $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하다고 하면, 다음이 성립한다.

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(b-a)^n \quad (a < c < b)$$

이 식은 평균값 정리의 확장된 형태이며, 고차 도함수를 이용해 함수의 값을 더 정밀하게 예측할 수 있게 해 준다.



고차 도함수를 이용해 함수의 값을 예측할 수 있는 방법이 있나요?

함수 $f(x)$가 $x = a$를 포함하는 열린구간에서 계속 미분가능하다면, 함수의 값을 $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ 등 고차 도함수를 이용해 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

이 식을 **테일러 급수(Taylor Series)**라고 부른다. 테일러 급수는 어떤 함수 $f(x)$가 주어졌을 때, $x = a$ 근처에서의 함숫값을 미분값들만으로 근사하거나 예측할 수 있도록 해 준다.

특히 $a = 0$일 때의 테일러 급수를 **매클로린 급수(Maclaurin Series)**라고 한다. 이때 식은 다음과 같다.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

삼각함수, 지수함수, 로그함수 등은 이 테일러 급수로 표현할 수 있으며, 복잡한 함수의 값을 간단한 다항식으로 근사할 때 매우 유용하다.

증가增加; increasing와 감소減少; decreasing

정의

증가와 감소는 어떻게 정의하나요?

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

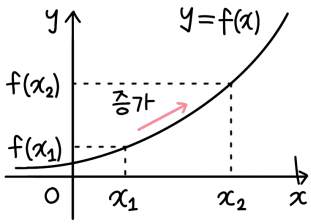
$x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$

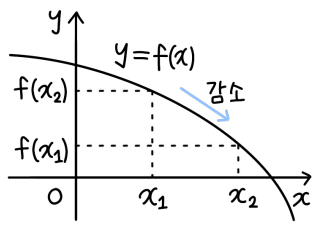
이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **증가**한다고 한다.

또,

$x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) > f(x_2)$

이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **감소**한다고 한다.





예

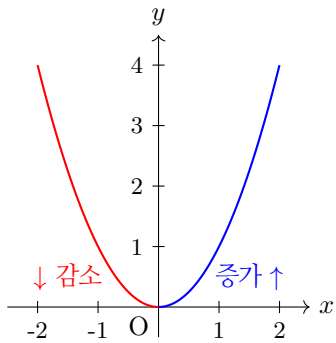
구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

함수 $f(x) = x^2$는 $x = 0$을 기준으로 좌우에서 그래프의 모양이 달라진다.

먼저, $x < 0$인 구간에서는 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이므로, 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **감소**한다.

반대로, $x > 0$인 구간에서는 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이므로, 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **증가**한다.

즉, $f(x) = x^2$는 열린구간 $(-\infty, 0)$에서는 감소하고, 열린구간 $(0, \infty)$에서는 증가한다.



의미

증가와 감소라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

'증(增)' 은 '늘다' , '더하다' 는 뜻이며, '가(加)' 는 '더하다' , '보태다' 를 의미한다. 따라서 '증가' 는 점점 커지는 것을 의미한다. '감(減)' 은 '줄다' , '덜어내다' 는 뜻이며, '소(少)' 는 '적다' , '작다' 를 의미한다. 따라서 '감소' 는 점점 작아지는 것을 의미한다.

增	加	減	少
더할 증	더할 가	덜 감	적을 소

영어로 증가는 increasing이라 하며, 동사 increase는 라틴어 *increscere*에서 유래하였고, *in-* (안으로, 강화)와 *crescere* (자라다, 커지다)가 결합된 형태로, '점점 커지다' , '자라나다' 는 뜻을 갖는다. 수학에서는 함수의 값이 일정 구간에서 계속 커질 때, 그 함수는 증가한다고 말한다.

영어로 감소는 decreasing이라 하며, 동사 decrease는 라틴어 *decrescere*에서 유래하였고, *de-* (아래로, 줄이다)와 *crescere* (자라다, 커지다)가 결합된 형태로, '작아지다' , '줄어들다' 는 뜻을 갖는다. 수학에서는 함수의 값이 일정 구간에서 계속 작아질 때, 그 함수는 감소한다고 한다.

개념

함수의 증가와 감소는 어떻게 알 수 있나요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다고 하자.

닫힌구간 $[a, b]$에 속하는 임의의 두 실수 x_1과 x_2 $(x_1 < x_2)$에 대하여 닫힌구간 $[x_1, x_2]$에서 평균값 정리가 성립하므로,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

인 실수 c가 열린구간 (x_1, x_2)에 적어도 하나 존재한다. 이때 $f'(x)$의 부호에 따라 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

❶ 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$인 경우

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$

이고 $x_2 - x_1 > 0$이므로, $f(x_2) - f(x_1) > 0$이다. 즉,

$$f(x_1) < f(x_2)$$

이므로 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 증가한다.

❷ 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x) < 0$인 경우

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0$$

이고 $x_2 - x_1 > 0$이므로 $f(x_2) - f(x_1) < 0$이다. 즉,

$$f(x_1) > f(x_2)$$

이므로 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 감소한다.

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 증가하면 최대 · 최소 정리에 의하여 $f(a)$가 최솟값, $f(b)$가 최댓값이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서도 증가한다. 함수 $f(x)$가 감소하는 경우도 마찬가지이다.

이 내용을 정리하면 다음과 같다.

함수의 증가와 감소의 판정

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여

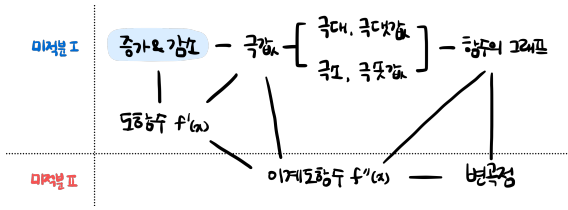
❶ $f'(x)>0$이면, $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가한다.

❷ $f'(x)<0$이면, $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소한다.

개념

증가와 감소와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

함수의 증가, 감소는 미분가능, 도함수, 평균값 정리, 극값(극대, 극댓값, 극소, 극솟값), 변곡점, 함수의 그래프 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



사실 어떤 구간에서 함수 $f(x)$가 **증가**하거나 **감소**하는 것은 그 구간에서 x의 값이 커질 때마다 함숫값도 항상 커지는지 아니면 항상 작아지는지에 따라 결정된다. 그런데 만약 함수가 어떤 구간에서 **미분가능**한 함수라면, 그 구간의 임의의 점에서의 **도함수**의 함숫값 즉, **미분계수**의 부호를 통해 함수의 증가와 감소 여부를 판단할 수 있다. 실제로 구간의 임의의 점에서의 미분계수가 양수이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가하고 음수이면 감소하는데, 이것은 **평균값 정리**를 이용하여 간단하게 증명할 수 있다. 한편 함수의 증가와 감소가 바뀌는 점이 있다면 그 점에서의 함숫값은 그 점 근방에서 가장 크거나 작게 되는데, 이런 점을 **극대**점 또는 **극소**점이라 부르고, 그때의 함숫값을 **극댓값** 또는 **극솟값**이라 부른다. 또 함수의 도함수의 증가와 감소가 바뀌는 점이 있다면 그 점에서 함수의 그래프는 아래로 볼록과 위로 볼록이 바뀌게 되는데, 이런 점을 **변곡점**이라 부른다. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 변곡점 등에 대한 정보를 알면 함수의 그래프의 대략적인 모양을 쉽게 파악할 수 있다.

극대, 극댓값極大〈値〉; local maximum, **극소, 극솟값**極小〈値〉; local minimum**과 극값**極値; extreme values

정의

극대, 극댓값, 극소, 극솟값과 극값은 무엇인가요?

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x) \le f(a)$$

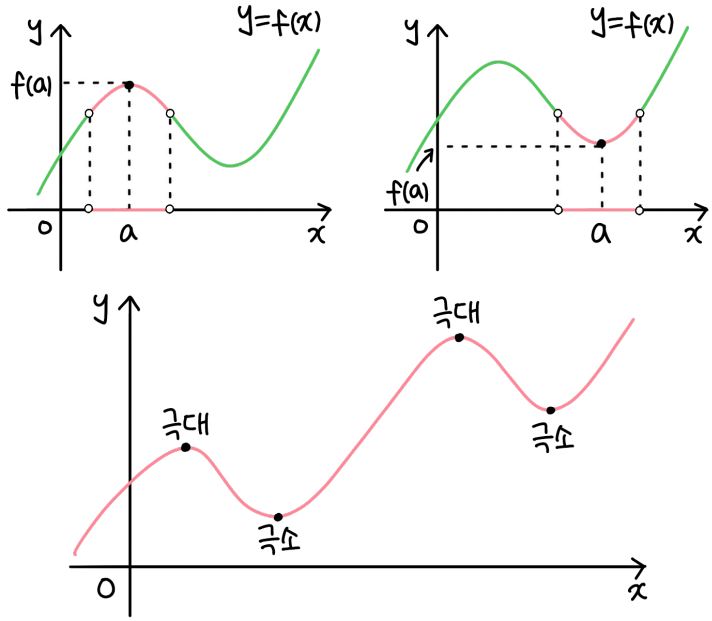
이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

또 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x) \ge f(a)$$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**라 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.

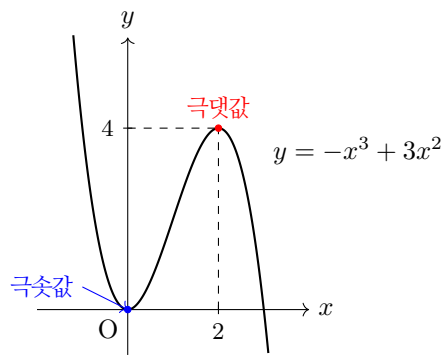


예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

함수 $f(x) = -x^3 + 3x^2$는 모든 실수에서 정의된 다항함수이고 이 함수의 그래프는 오른쪽과 같다.

함수의 그래프에서 $x = 0$에서는 극소이고 그때의 극솟값이 0이며, $x = 2$에서는 극대이고 그때의 극댓값이 4이다.



의미

극대/극댓값, 극소/극솟값, 극값이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.

극대/극댓값, 극소/극솟값 '극(極)'은 '가장 끝', '더 이상 나아갈 수 없는 지점', '최대한'을 뜻하며, '대(大)'는 '크다'를, '소(小)'는 '작다'를 의미한다. 따라서 '극대'는 어떤 구간 안에서 가장 **큰** 값을 가지는 지점을 의미하며, '극댓값(極大値)'은 그 지점에서의 실제 함숫값(값 치: 値)을 뜻한다.

따라서 '극소'는 어떤 구간 안에서 가장 **작은** 값을 가지는 지점을 의미하며, '극솟값(極小値)'은 그 지점에서의 실제 함숫값을 뜻한다.

極	大		極	小
극진할 극	클 대		극진할 극	작을 소

영어로 극대와 극소는 각각 local maximum과 local minimum이라 하며, local은 '지역의', '일정한 범위 안의'라는 뜻이며, maximum은 라틴어 *maximus*에서 유래해 '가장 큰', minimum은 라틴어 *minimus*에서 유래해 '가장 작은'이라는 뜻을 갖는다. 따라서 local maximum은 전체가 아닌 일정한 구간 안에서 함수가 가질 수 있는 가장 큰 값을 의미하며, 이때의 지점을 극대, 그 값을 극댓값이라 한다.

따라서 local minimum은 전체가 아닌 일정한 구간 안에서 함수가 가질 수 있는 가장 작은 값을 의미하며, 이때의 지점을 극소, 그 값을 극솟값이라 한다.

극값 '극값(極値)' 은 함수의 그래프에서 **극**대나 **극**소가 되는 지점에서의 함숫**값**을 의미한다.

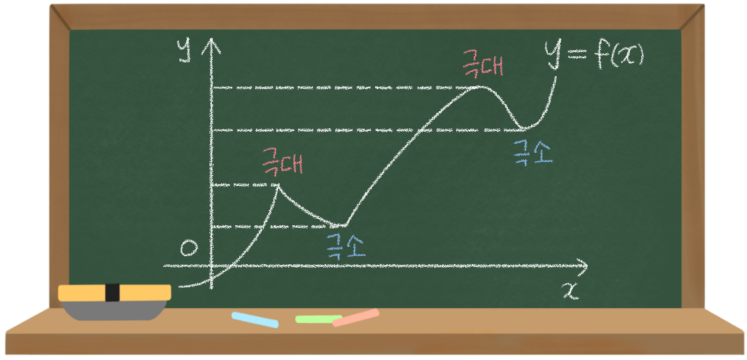
영어로는 extreme value라 하며, extreme은 '가장 끝의', '극도의' 라는 뜻을 가진 단어로, 라틴어 *extremus*에서 유래되었으며 이는 '맨 끝', '경계에 있는' 이라는 의미를 갖는다. 따라서 extreme value는 함수가 가질 수 있는 가장 크거나 가장 작은 값을 통틀어 이르는 말이며, 즉 극댓값과 극솟값을 아울러 '극값' 이라 한다.

개념

극댓값은 항상 극솟값보다 큰가요?

함수의 극댓값과 극솟값은 각각 함수가 국소적으로 가장 큰 값 또는 가장 작은 값을 가질 때를 말한다. 여기서 중요한 것은 이 값들이 전체 함수에서 가장 크거나 가장 작다는 보장은 없고, **일정한 주변 구간에서만** 그렇다는 점이다.

예를 들어 아래 그래프를 보자.



이 그래프에는 극댓값이 두 개, 극솟값도 두 개 나타나 있다. 왼쪽에 있는 극댓값은 함수 전체에서 보면, 오른쪽에 있는 극솟값보다 작다. 즉,

$$\text{극댓값} < \text{극솟값}$$

인 경우도 존재한다. 왜냐하면 극댓값은 말 그대로 **국소적으로 가장 큰 값**이지, 전체 함수에서 가장 크다는 뜻은 아니기 때문이다.

결론적으로, **극댓값이 극솟값보다 항상 크다고 할 수는 없다.** 극댓값과 극솟값은 각각 그 지점을 중심으로 한 **주변**에서의 상대적인 크기만을 의미한다.

개념

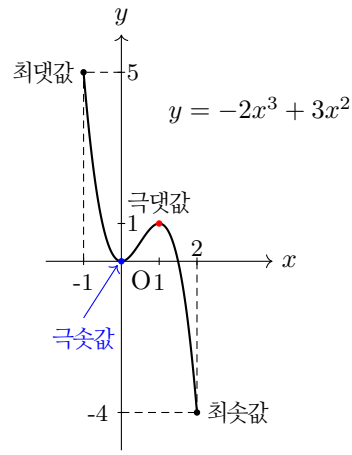
극댓값과 최댓값은 같은 뜻인가요?

'극대' 는 특정 구간이나 점의 근처에서 함숫값이 가장 큰 경우를 말하며, '최댓값' 은 전체 정의역에서 가장 큰 함숫값을 말한다. 즉, 극대는 **국소적(local)**인 개념이고, 최댓값은 **전체(global)** 개념이다. 따라서 극대가 존재하더라도, 그것이 전체 정의역에서 가장 큰 값일 필요는 없다.

예를 들어, 함수 $f(x) = -2x^3 + 3x^2$는 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 연속이다.

이 함수의 그래프에서 살펴보면 극댓값 1보다 더 큰 값인 최댓값 5가 구간의 끝점 $x = -1$에서 나왔고, 극솟값 0보다 더 작은 값인 최솟값 -4도 끝점 $x = 2$에서 나왔다.

따라서 함수의 그래프를 해석할 때에는 극값은 그래프의 국소적으로 가장 큰 값 또는 가장 작은 값이고, 최댓값·최솟값은 그래프 전체를 바라봤을 때 가장 높은 점 또는 가장 낮은 점이라는 것을 구분하여 이해해야 한다.



개념

극댓값과 극솟값은 항상 존재하나요?

극댓값과 극솟값은 항상 존재하는 것이 아니다.

예를 들어, 함수 $f(x) = x$를 열린구간 $(0, 1)$에서 생각해 보자. 이 함수는 x의 값이 커질수록 $f(x)$의 값도 커지므로, $0 < x < 1$인 범위 안에서 $f(x)$는 계속 증가한다. 그러나 $x = 1$에서의 함숫값은 정의되지 않았기 때문에, $f(x)$는 이 구간에서 가장 큰 값을 갖지 않는다. 즉, 극댓값이 존재하지 않는다.

마찬가지로 $x = 0$ 근처에서는 x가 작아질수록 $f(x)$의 값도 작아지지만, $x = 0$ 자체는 정의역에 포함되지 않기 때문에 이 구간에서는 가장 작은 값도 존재하지 않는다. 따라서 극솟값도 존재하지 않는다.

이처럼 함수의 정의역이 열린구간인 경우에는 극댓값 또는 극솟값이 존재하지 않을 수

있다.

개념 **상수함수의 극값은 무엇인가요?**

상수함수는 모든 x에 대해 함숫값이 항상 같은 함수로 그래프가 수평 직선이 되는 경우이다. 극댓값과 극솟값의 정의에 따르면, 어떤 점 $x=a$에서 $f(x)$가 근처의 모든 점들보다 크거나 작으면 그 점에서 극댓값 또는 극솟값을 가진다고 한다.

그런데 상수함수는 모든 점에서 함숫값이 같기 때문에, 어떤 점을 기준으로 보더라도 그 근처의 함숫값들과 항상 같다. 즉, 어느 점을 중심으로 보아도 극댓값의 조건도 만족하고, 극솟값의 조건도 만족한다.

따라서 상수함수는 정의역에 속한 **모든 점이 극댓값을 가지면서 동시에 극솟값도 갖는** 특이한 함수이다.

개념 **미분가능한 함수의 극값(극댓값과 극솟값)은 어떻게 찾을 수 있나요?**

미분가능한 함수의 극값을 구하려면, 먼저 극값과 미분계수 사이의 관계를 이해할 필요가 있다.

❶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극댓값을 가질 때 절댓값이 충분히 작은 수 h $(h\neq 0)$에 대하여 $f(a+h)\leq f(a)$이므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geq 0,\quad \lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0$$

이다. 그런데 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로 좌극한과 우극한이 같다. 즉,

$$0\leq \lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leq 0$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0$$

❷ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극솟값을 가질 때 극댓값과 같은

방법으로 $f'(a)=0$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

극값과 미분계수

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.



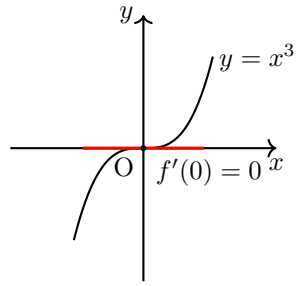
$f'(a)=0$인 점이 항상 극댓값이나 극솟값이 되나요?

$f'(a)=0$이라고 해도, $x=a$에서 반드시 극댓값이나 극솟값이 생기는 것은 아니다. 이유는 도함수가 0이 되었다고 해도, 함숫값의 증가 또는 감소가 멈추지 않고 계속 같은 방향으로 진행될 수도 있기 때문이다.

예를 들어, 함수 $f(x)=x^3$을 생각해 보자. 이 함수는 모든 구간에서 미분가능하며, 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x)=3x^2$$

따라서 $f'(0)=0$이지만, $x=0$에서의 함숫값은 극댓값도 아니고 극솟값도 아니다. 왜냐하면 $x<0$일 때도 증가하고, $x>0$일 때도 계속 증가하기 때문이다. 즉, 도함수가 0이 되어도 함수의 증가 또는 감소가 멈추지 않고 계속될 수 있다는 것이다.



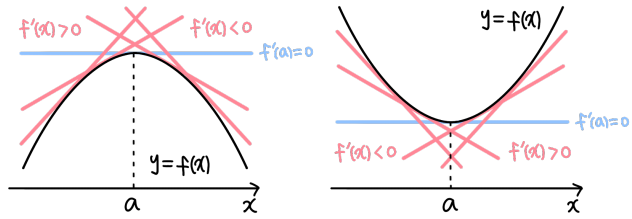
정리하자면,

$f'(a)=0$은 극값이 될 수 있는 조건일 뿐, 극값의 충분조건은 아니다.

개념

극댓값과 극솟값은 어떻게 알 수 있나요?

함수 $f(x)$가 $x=a$인 점에서 미분가능하고, 또 $f'(a)=0$이라면, $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값일 가능성이 있다. 이때, $f'(x)$의 부호가 $x=a$를 기준으로 어떻게 바뀌는지를 보면 극댓값인지 극솟값인지를 알 수 있다.



❶ $x=a$를 기준으로 $f'(x)$의 부호가 **양수에서 음수로** 바뀌면, 함수는 증가하다가 감소하는 모양이므로 $x=a$에서 **극댓값**을 가진다.

❷ $x=a$를 기준으로 $f'(x)$의 부호가 **음수에서 양수로** 바뀌면, 함수는 감소하다가 증가하는 모양이므로 $x=a$에서 **극솟값**을 가진다.

즉, 도함수 $f'(x)$의 부호 변화를 보면 원래 함수 $f(x)$의 극값의 종류를 판별할 수 있다.

따라서 극값의 판별법을 적용하여 예제에서 제시된 함수의 극값을 다음과 같이 구할 수 있다.

함수 $f(x)=-x^3+3x^2$의 극값을 구하시오.

풀이 함수 $f(x)=-x^3+3x^2$는 모든 실수에서 미분가능하다. 그러므로 이 함수의 극값을 구하기 위하여 도함수가 $f'(x)=0$을 만족하는 x 값을 구한다.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(-x^3+3x^2)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

이므로 $x=0$과 $x=2$가 극값의 후보가 된다. 도함수의 부호를 이용하여 함수의 증가와 감소를 조사하면 다음과 같다.

- $x<0$에서는 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.
- $0<x<2$에서는 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
- $x>2$에서는 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 다시 감소한다.

이로부터 $x=0$에서는 함수가 감소하다가 증가하므로 극솟값을 갖고, $x=2$에서는

함수가 증가하다가 감소하므로 극댓값을 갖는다. 따라서 함수 $f(x) = -x^3 + 3x^2$은 $x = 0$에서 극솟값 $f(0) = 0$을 갖고, $x = 2$에서 극댓값 $f(2) = 4$를 갖는다.

답 극솟값 : 0, 극댓값 : 4

개념

함수에서 최댓값과 최솟값은 어떻게 찾나요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면, 최대 · 최소 정리에 의해 반드시 최댓값과 최솟값이 존재한다. 이때 최댓값과 최솟값은 반드시 극댓값이나 극솟값일 필요는 없으며, 구간의 양 끝점 a나 b에서 나올 수도 있다.

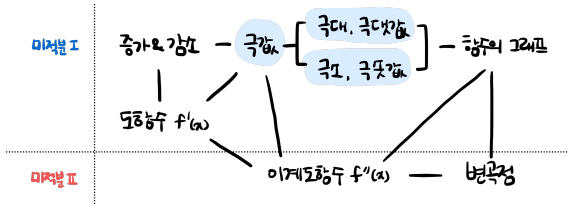
즉, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라면 $f(x)$의 **극댓값**, **극솟값**, $f(a)$, $f(b)$ 중 가장 큰 값을 $f(x)$의 최댓값이라 하고, 가장 작은 값을 $f(x)$의 최솟값이라 한다. 따라서 함수가 주어졌을 때, 함수의 그래프를 확인해보면 최댓값과 최솟값이 각각 어디서 나오는지 시각적으로 확인할 수 있다.

이처럼 닫힌구간에서 연속함수는 최대 · 최소 정리에 의해 가장 높은 지점과 가장 낮은 지점이 항상 존재하고 극값의 판정을 활용하여 실제로 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

개념

극값과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

함수의 극값(극대, 극댓값, 극소, 극솟값)은 함수의 증가와 감소, 미분계수, 미분가능, 함수의 그래프 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



사실 함수의 **극값**은 그 점을 포함한 어떤 열린구간에서 즉, 국소적으로 가장 큰 함숫값(**극댓값**)이나 가장 작은 함숫값(**극솟값**)을 의미한다. 극댓값의 대표적인 예로 함수가 증가하다가 감소하는 지점에서의 함숫값을 들 수 있고, 극솟값의 대표적인 예로 함수가 감소하다가 증가하는 지점에서의 함숫값을 들 수 있다. 상수함수는 모든 점에서 극댓값과 극솟값을 갖는다.

한편 미분가능한 함수의 경우 어떤 점에서 극값을 가지면 그 점에서 함수의 미분계수는 0이 된다. 그러므로 미분가능한 함수의 그래프에서 극대점이나 극소점을 찾으려면 미분계수가 0이 되는 점을 찾은 뒤, 극점이 아닌 점을 제외하면 된다. 이때 미분계수가 0이 되는 점 중에서 극점이 아닌 점은 그 점을 경계로 함수의 증가와 감소가 바뀌지 않는 점 즉, 그 점을 경계로 미분계수의 부호가 바뀌지 않는 점이다.

극대점과 극소점은 함수의 그래프를 그리거나 함수의 최댓값과 최솟값을 찾는데 필요한 중요한 정보를 제공한다.

부정적분不定積分; indefinite integral 과 적분상수積分常數; integral constant

정의

부정적분과 적분상수는 무엇인가요?

일반적으로 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x) = f(x)$$

일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분**이라고 한다.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하고, 또 다른 부정적분을 $G(x)$라 하면

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x)$$

이므로

$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

그런데 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로 그 상수를 C라 하면 다음이 성립한다.

$$G(x) - F(x) = C, \quad \text{즉} \quad G(x) = F(x) + C$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $f(x)$의 모든 부정적분을

$$F(x) + C \quad (C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로

$$\int f(x)\,dx$$

와 같이 나타내고, '$f(x)$**의 부정적분**' 또는 '**integral** $f(x)dx$' 라고 읽는다. 즉, $F'(x) = f(x)$일 때,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C\text{는 상수})$$

이다. 이때 C를 **적분상수**라고 한다.

또, 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 '$f(x)$**를 적분한다**' 고 하며, 그 계산법을

적분법이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부정적분

$F'(x)=f(x)$ 일 때, 부정적분은 다음과 같이 나타낸다.

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad (C\text{는 상수})$$

예 구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+5$, $h(x)=x^2-1$ 의 도함수는 모두 $f'(x)=g'(x)=h'(x)=2x$ 로 같다. 즉, 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+5$, $h(x)=x^2-1$ 은 모두 함수 $2x$ 의 **부정적분**이다. 즉, 부정적분은 유일하게 존재하는 것이 아니다. 이와 같이 함수 $2x$ 의 부정적분은 무수히 많고, 이들은 모두 상수항만 다름을 알 수 있다. 이를 적분상수 C 로 표현하면, 함수 $2x$ 의 부정적분은 $\int 2x\,dx = x^2+C$ 이다.

❷ $(5x)'=5$ 이므로 $\int 5\,dx = 5x+C$ 이다.

의미 부정적분과 적분상수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

적분상수 '부(不)' 는 '아니다' , '없다' 는 뜻이며, '정(定)' 은 '정하다' , '일정한' 는 의미를 가진다. 따라서 '부정(不定)' 은 '일정하지 아니하다' 는 뜻이다. '적(積)' 은 '쌓다' , '누적하다' 는 의미이며, '분(分)' 은 '나누다' , '부분' 을 뜻한다. 즉, '적분(積分)' 은 전체를 작은 부분으로 나누어 쌓는 연산을 말하고, '부정적분' 은 값이 일정하게 정해지지 않는 적분이다.



또한, 영어로는 indefinite integral이라 하며, indefinite는 '정해지지 않은' , integral 은 '적분' 을 뜻한다.

기호 $\int$는 독일의 수학자 라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)가 처음으로 사용했으며, '합'을 뜻하는 라틴어 'Summa'의 첫 글자를 길게 늘여 쓴 것이다.

적분상수 '적분상수(積分常數)'은 부정적분 결과에 항상 붙는 상수 값이다. 또한, 영어 integral constant에서 integral은 적분, constant는 상수를 의미한다.

개념 **부정적분은 미분의 역연산이라는 말은 무슨 뜻인가요?**

함수 $f(x)$의 부정적분은

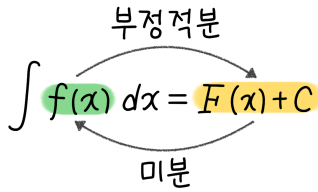
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

이고, 이 식의 의미는 $f(x)$는 어떤 함수 $F(x)$를 미분해서 얻은 것이고, 함수 $F(x)$는 $f(x)$를 적분해서 얻을 수 있다는 뜻이다. 결국,

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x)$$

와 같이, 부정적분을 다시 미분하면 원래의 함수 $f(x)$로 되돌아간다.

이러한 이유로 부정적분은 '미분의 역과정'이라고 부른다. 즉, 부정적분은 미분과 역연산 관계로 다음과 같다.



개념 **부정적분과 미분의 순서를 바꾸어도 결과는 같을까요?**

'미분과 부정적분은 서로 역과정이니까, 함수 $f(x)$를 먼저 적분한 다음 미분한 것과, 먼저 미분한 다음 적분한 결과는 같을까?'라는 질문을 자연스럽게 생각해볼 수 있다.

이를 비교해 보면 다음과 같다.

❶ **부정적분 후, 미분**

함수 $f(x)$를 먼저 부정적분한 다음 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x)$$

즉, 부정적분 후 미분은 원래 함수 $f(x)$로 정확히 되돌아온다.

❷ 미분 후, 부정적분

반대로, 함수 $f(x)$를 먼저 미분한 다음 그 결과를 다시 적분하면 다음과 같다:

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = \int f'(x)\, dx = f(x) + C$$

즉, 미분 후 적분은 원래 함수에 적분상수 C가 더해진 형태로 나온다.

> 따라서 미분과 적분은 서로 역연산 관계이지만, 순서에 따라 적분상수 C의 유무 차이가 발생하므로 이를 정확히 이해하고 구분할 필요가 있다.

개념

함수에 상수가 곱해져 있거나 여러 함수가 더해진 경우, 부정적분은 어떻게 하나요?

미분에서는 다음과 같은 성질이 성립한다. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 미분 가능할 때,

❶ $(kf(x))' = kf'(x)$ (k는 상수)

❷ $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

❸ $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

이처럼 미분에서 여러 항을 각각 따로 미분할 수 있었듯이, 부정적분에서도 함수의 실수배, 합, 차에 대하여 항별로 나누어 적분할 수 있다. 이러한 성질은 위 미분의 공식으로부터 자연스럽게 유도되어진다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 부정적분이 존재할 때, 다음이 성립한다.

❶ $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

❷ $\int \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

❸ $\int \{f(x) - g(x)\}\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$

즉, 여러 항으로 이루어진 식도 항마다 따로따로 부정적분한 다음 더하거나 빼면 쉽게 전체의 부정적분을 구할 수 있다.



그럼 함수끼리 곱해져 있는 경우에도 이렇게 나누어 적분할 수 있나요?

두 함수가 곱해진 형태인 $x \sin x$, xe^x 같은 함수는 위와 같은 단순한 방법으로 적분할 수

없다. 이 경우에는 곱의 미분 공식

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

을 거꾸로 이용하는 방법이 필요한데, 이는 미적분II에서 배우는 '부분적분법'이라는 방법이다. 자세한 내용은 부분적분법에서 확인해 보자.

개념

다항함수의 부정적분은 무엇인가요?

함수 $f(x) = x^n$에서 n이 양의 정수일 때,

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$$

이 성립하므로, x^n의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (C\text{: 적분상수})$$

특히 상수함수 $g(x) = 1$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int 1\,dx = x + C \quad (C\text{: 적분상수})$$

따라서 이 두 가지 성질을 이용하면 다항함수의 부정적분을 항별로 구할 수 있다. 즉, 다항함수의 각 항에 대해 위의 식을 적용하여 적분한 뒤 더하면 전체 부정적분을 구할 수 있다.

예를 들어 $\int(3x^2 - 2x + 5)\,dx$처럼 여러 항으로 이루어진 다항식이 있다면, 각 항을 나누어 적분해서

$$\int(3x^2 - 2x + 5)\,dx = 3\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + \int 5\,dx$$

와 같이 계산하면 된다.

더 알아보기

부정적분의 적분상수가 가지는 기하적 의미는 무엇인가요?

함수 $f(x)$의 부정적분은 일반적으로 $F(x)+C$의 형태로 나타난다. 여기서 C는 적분상수라고 부르며, 이 값에 따라 부정적분의 그래프는 달라질 수 있다.

예를 들어, 함수 $f(x)=x^2-4$의 부정적분 중 하나는

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$$

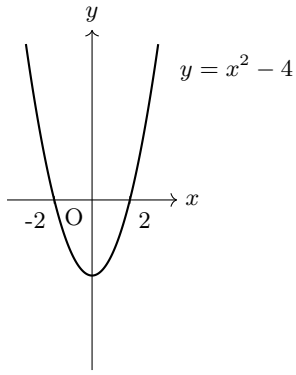
이다.

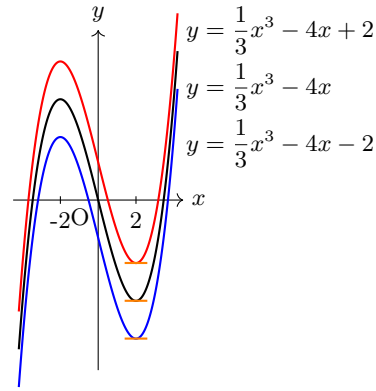
그런데 부정적분은 여러 개일 수 있으며, 이들은 모두 $F(x)+C$의 형태로 표현된다. 즉,

$$g(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+C$$

는 $f(x)$의 모든 부정적분을 나타내며, 적분상수 C가 달라질 때마다 그래프는 y축 방향으로 위나 아래로 평행이동하게 된다.

따라서 적분상수 C는 부정적분의 그래프에서 위치만 달라지게 하는 상수이며, 함수의 전체적인 모양(곡선의 형태)은 바뀌지 않는다. 즉, C의 값에 따라 그래프는 수직 방향으로 평행이동될 뿐이며, 이는 C가 그래프의 위치만 결정하는 역할을 한다는 것을 의미한다.





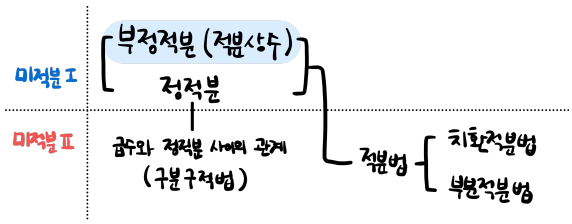
또한, $\{F(x)+C\}'=f(x)$가 항상 성립한다는 것은 적분상수 C의 값에 관계없이 접선의 기울기(즉, 도함수 $f(x)$)는 모든 점에서 동일하다는 것을 나타낸다. 결과적으로 $F(x)+C$는 모두 $f(x)$의 부정적분이며, 이들 사이의 차이는 오직 수직 위치에

불과하다.

개념

부정적분과 적분상수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

부정적분과 적분상수는 미분가능, 도함수, 정적분, 미적분의 기본정리, 치환적분법, 부분적분법 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



어떤 함수 $F(x)$가 미분가능하고 그 도함수가 $f(x)$라면, $F(x)$에 임의의 상수 즉, **적분상수** C를 더한 $F(x)+C$가 바로 $f(x)$의 **부정적분** $\int f(x)\,dx$이다. 즉, 어떤 함수의 도함수를 찾는 것은 그 함수를 미분한 결과를 찾는 것이고, 어떤 함수의 부정적분을 찾는 것은, 그 역과정으로서, 미분한 결과가 그 함수가 되는 함수를 찾는 것이다. 이처럼 부정적분의 개념 그 자체는 미분 즉, 도함수와 직접적인 관련이 있지만, 미적분의 기본정리를 통해 넓이를 구하는 이론인 정적분과 연결된다. 즉, 어떤 함수 $f(x)$의 부정적분을 찾을 수 있으면, 함수 어떤 구간에서 $f(x)$와 x으로 둘러싸인 영역의 넓이 즉, 정적분을 쉽게 계산할 수 있다.

한편 합성함수의 미분법, 두 함수의 곱의 미분법을 이용하면 미분 공식이 알려진 함수 이외의 좀 더 복잡하고 다양한 형태의 함수의 부정적분을 구할 수 있는데, 이들 적분법을 각각 치환적분법, 부분적분법이라 부른다.

심화(참고)

- **부정적분에서 '원시함수'와 '피적분함수'는 무엇인가요?**

  원시함수는 주어진 함수 $f(x)$를 미분해서 얻어지는 함수 $F(x)$를 말한다. 다시 말해, $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$를 만족하는 함수 $F(x)$가 $f(x)$의 원시함수이다. 예를 들어, $f(x)=2x$의 원시함수는 $F(x)=x^2$이다.

  피적분함수는 부정적분에서 적분 기호 $\int$ 뒤에 오는 함수 $f(x)$를 말한다. 즉, $\int f(x)\,dx$에서 $f(x)$가 바로 피적분함수이다.



부정적분과 원시함수는 같은 뜻인가요?

교과서에서는 함수 $f(x)$를 도함수로 가지는 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 정의하고 있으나, 엄밀하게 말하여 이것은 원시함수의 정의이다.

일반적으로 함수 $f(x)$의 부정적분은 $F(x)+C$의 형태로 나타낸다. 여기서 $F(x)$는 $f(x)$의 원시함수, C는 적분상수이다. 즉, $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$를 만족하는 어떤 특정한 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 원시함수라 하고, 그 원시함수에 임의의 상수 C를 더한 표현인 $F(x)+C$를 $f(x)$의 부정적분이라 한다.

이처럼 원시함수는 하나의 특정한 함수이고, 부정적분은 그 원시함수들을 모아놓은 함수의 집합이라 할 수 있으므로 두 개념은 원래는 서로 같은 것이 아니다.

그러나 일반적으로 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 연속이면,

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$$

가 성립하므로, 고등학교 수준에서는 부정적분과 원시함수를 동일한 개념으로 사용한다.

정적분定積分; definit integral

정의

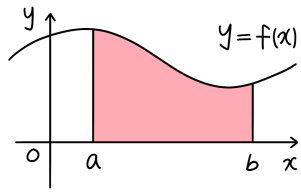
정적분은 무엇인가요?

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 정적분을 정의해보자.

(i) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$일 때

함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x = a$와 $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

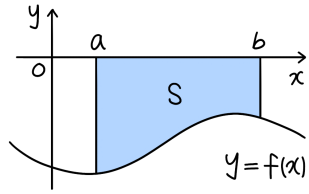
$$\int_a^b f(x)\,dx$$



(ii) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \leq 0$일 때

함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 할 때, $-S$를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이것을 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -S$$



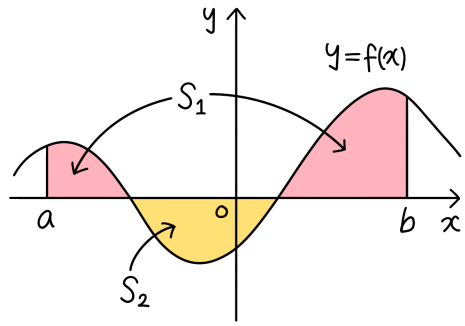
(i)과 (ii)를 확장하여 일반적으로 연속인 함수 $f(x)$의 정적분을 다음과 같이 정의한다.

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형 중에서 $f(x) \geq 0$인 부분의 넓이를 S_1, $f(x) \leq 0$인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 - S_2$를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2$$

와 같이 나타낸다.

이때 닫힌구간 $[a, b]$를 **적분 구간**이라 하고, 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$의 값을 구하는 것을 '**함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다**' 고 한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

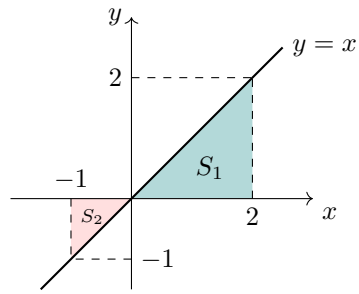
정적분

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형 중에서 $f(x) \geq 0$인 부분의 넓이를 S_1, $f(x) \leq 0$인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분은

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2$$

예 **구체적인 예와 함께 설명해 주세요.**

정적분 $\int_{-1}^{2} x\,dx$의 값을 구해보자. 먼저 정적분의 정의를 이용하여 $f(x) \geq 0$인 부분의 넓이 S_1와 $f(x) \leq 0$인 부분의 넓이 S_2를 구해보자.



넓이 S_1은 $0 \le x \le 2$일 때, 함수 $f(x) = x$의 그래프와 x축 및 $x = 2$로 둘러싸인 도형의 넓이로 다음과 같다.

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

넓이 S_2는 $-1 \le x \le 0$일 때, 함수 $f(x) = x$의 그래프와 x축 및 $x = -1$로 둘러싸인 도형의 넓이로 다음과 같다.

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

따라서

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = S_1 - S_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이다.

의미

정적분이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'정(定)'은 '정하다', '결정하다' 는 뜻이며, '적(積)' 은 '쌓다', '누적하다'를, '분(分)'은 '나누다'를 뜻한다. 즉 정적분은 어떤 구간을 정해 두고 그 구간에서 함수 값을 작게 나누어 쪼갠 뒤, 그 조각들을 모두 쌓아 올려 전체의 누적값을 구하는 것을 의미한다.



또한, definite integral에서 definite는 '일정한', '한정된'을 의미하고, integral은

'적분'을 뜻하므로, definite integral은 값이 일정하게 정해지는 적분을 의미한다.

개념

정적분에서 '아래끝'과 '위끝'는 무엇인가요?

정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$에서 a를 **아래끝**, b를 **위끝**이라고 한다.



아래끝과 위끝이 같으면 어떻게 되나요?

정적분에서 아래끝과 위끝이 같은 경우, 즉 $a=b$일 때, 정적분의 값을 0으로 정의한다.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

이때 $x=a$에서의 세로선분 하나로는 면적이 형성되지 않기 때문에, 넓이가 0이라고 보고 정적분의 값도 0으로 정한다. 즉, 아래끝과 위끝이 같을 때는 면적이 존재하지 않으므로, 이 경우의 정적분은 기하적으로도 의미가 잘 맞아떨어진다.



아래끝과 위끝의 순서가 바뀌면 어떻게 되나요?

정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$에서 $a>b$일 때는 다음과 같이 적분구간 $[b,a]$에서 정적분의 값에 부호를 바꾸어 정의한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

즉, 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$에서 아래끝 a와 위끝 b의 순서를 바꾸면 정적분의 부호가 바뀐다.

개념

정적분에서 적분변수는 꼭 x여야 하나요?

정적분에서 적분변수는 x 대신 다른 문자를 사용해도 되며, 정적분의 값은 위끝과 아래끝에 의하여 결정된다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds$$

개념

정적분과 미분의 관계는 어떤가요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

이 식은 '정적분은 미분의 역과정이다' 라는 사실을 잘 보여주는 공식으로, x에 따라 변하는 정적분 $\int_a^x f(t)\,dt$를 새로운 함수 $F(x)$라고 하면, 이 함수 $F(x)$를 미분하면 원래 함수 $f(x)$가 다시 나타난다는 뜻이다.

즉, 정적분을 통해 어떤 함수 $f(x)$를 쌓아 올려 만든 함수 $F(x)$는, 미분하면 다시 $f(x)$로 되돌아간다. 이 관계를 통해 정적분과 미분이 서로 '역연산' 관계에 있음을 알 수 있다.

이 내용은 이후 '미적분의 기본정리' 의 핵심 아이디어이기도 하다.

개념

부정적분과 정적분의 관계는 어떤가요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$는 함수 $f(x)$의 부정적분을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

여기서 $F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분(즉, 원시함수)로,

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

를 만족하는 함수이다.

이 과정을 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

함수 $f(x)$의 정적분 $\int_a^x f(t)\,dt$를 새로운 함수 $S(x)$라고 하면, 정적분과 미분의 관계로부터

$$\frac{d}{dx}S(x) = f(x)$$

가 성립하므로, $S(x)$는 $f(x)$의 부정적분이다.

따라서 어떤 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$에 대해 $S(x) = F(x) + C$ (단, C는 적분상수)가

성립한다. 이때 $x=a$를 대입하면 $S(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$이므로,

$$0=F(a)+C \quad \Rightarrow \quad C=-F(a)$$

따라서

$$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)$$

이 식에 $x=b$를 대입하면,

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

가 되며, 이것이 바로 부정적분을 이용한 정적분 계산 공식이다.

이 공식을 기호로 간단히

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b$$

와 같이 나타내며, 이를 **미적분의 기본정리**라고 한다.

따라서 미적분의 기본정리를 사용하여 정적분의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

정적분 $\int_0^1 (x^2+4x+3)\,dx$의 값을 구하시오.

풀이 먼저, 주어진 함수의 부정적분을 구하면 다음과 같다.

$$\int (x^2+4x+3)\,dx=\frac{x^3}{3}+2x^2+3x+C$$

따라서, 정적분의 값을 계산하면

$$\int_0^1 (x^2+4x+3)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1^3}{3}+2\times 1^2+3\times 1\right)-\left(\frac{0^3}{3}+2\times 0^2+3\times 0\right)=\frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

개념

함수에 상수가 곱해져 있거나 여러 함수가 더해진 경우, 정적분은 어떻게 하나요?

정적분에서도 함수의 실수배, 합, 차에 대하여 항별로 나누어 적분할 수 있다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라 할 때, 함수의 실수배, 합, 차의 정적분은 다음과 같다.

❶ $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (단, k는 실수)

❷ $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

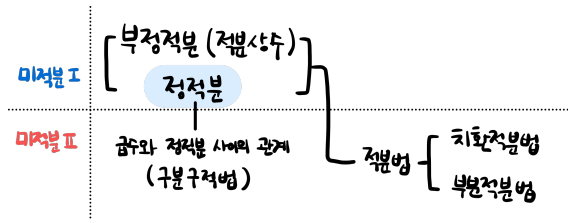
❸ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

즉, 여러 항으로 이루어진 식도 항마다 따로따로 부정적분한 다음 더하거나 빼면 쉽게 전체의 정적분을 구할 수 있다.

개념

정적분과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

정적분은 부정적분, 미적분의 기본정리, 구분구적법 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



닫힌구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 **정적분**은 그 구간에서 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이를 이용하여 정의한다. $f(x)$의 그래프가 선분이나 직선이 아닌 곡선인 경우 그와 같은 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 계산하려면 본질적으로 극한 즉, 무한급수의 이론을 이용하는 **구분구적법**의 아이디어가 필요하고, 그로 인해 많은 경우 그 계산이 상당히 어렵고 복잡하다. 그런데 만약 함수 $f(x)$의 **부정적분**을 찾을 수만 있다면 이런 복잡한 넓이 계산 즉, 정적분 계산을 쉽고 간단하게 할 수 있는데, 이를 가능하게 해주는 것이 바로 미적분의 기본정리이다. 이처럼 넓이를 구하는 이론인 정적분 그 자체는 미분의 역과정에 해당하는 부정적분과 무관해보이지만 미적분의 기본정리를 통해 서로 밀접한 관련을 맺게 되는 것이다.

● 정적분을 정의하는 다른 방법은 없나요?

2022 개정 교육과정에서는 함수로 만들어지는 영역의 넓이를 이용하여 정적분을 정의하였다. 교육과정이 변해옴에 따라 정적분은 고등학생들이 쉽게 이해하기 위하여 여러가지 방식을 활용하여 정의를 채택해왔다. 여기서는 정적분을 정의하는 다른 방법을 소개하고자 한다.

❶ 미적분의 기본정리를 이용한 정적분의 정의

정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$는 일반적으로 함수 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$를 이용해

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

와 같이 계산한다. 이는 뉴턴-라이프니츠 정리에 따른 계산법으로 2015 개정 교육과정에서 다루는 기본적인 정의이다.

❷ 구분구적법을 이용한 정적분의 정의

구분구적법을 이용하여 정적분을 정의하는 방식은 2009 개정 교육과정에서의 정적분의 정의이다.

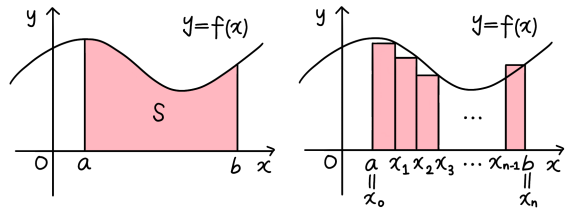
구분구적법

어떤 도형을 간단한 도형으로 잘게 나누어 각 부분의 넓이 또는 부피의 합을 구하고 그 합의 극한값으로 원래 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법을 구분구적법이라 한다.
따라서 다음과 같이 구분구적법에 의하여 도형의 넓이나 부피를 구한다.

① 주어진 도형을 충분히 작은 n개의 기본 도형으로 세분한 다음 이 기본 도형들의 넓이 또는 부피의 합 S_n을 구한다.

② 1번에서 구한 어림값 S_n의 극한 S를 구하여 구하려는 도형의 넓이 또는 부피인 S를 구한다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하자.



(1) 닫힌구간 $[a, b]$를 n등분 하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례대로

$$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad x_n = b$$

라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라 하면,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

이다.

(2) 각 소구간의 오른쪽 끝점에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

(3) 여기서 n이 한없이 커질 때, S_n의 값은 구하는 도형의 넓이 S에 한없이 가까워지므로

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 성립한다.

따라서 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad (\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x)$$

일반적으로 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 극한값 $\lim_{n\to\infty} f(x_k)\Delta x$는 항상 존재하고, 이 극한값은 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$임이 알려져 있다.



구분구적법을 통한 정적분의 정의는 급수와 어떤 관계가 있나요?

구분구적법으로 정의된 정적분의 정의는 다음과 같고, 이로부터 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 알 수 있다.

> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음이 성립한다.
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad (\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x)$$

즉, 정적분은 무한히 많은 작은 면적의 합, 즉 무한급수의 극한과 같은 방식으로 넓이를 정의하는 것이다. 이것이 정적분과 급수가 구분구적법을 매개로 연결되는 이유이며, 2022 개정 교육과정에서는 미적분II 교과목에서 다루어지는 내용이다.

❸ 리만합을 이용한 정적분의 정의

미적분 이론을 체계적으로 정립한 수학자는 독일의 수학자 리만(Riemann, G. F. B., 1826~1866)으로 정적분의 원론적인 정의 방식은 '리만합(Riemann sum)'을 이용한 정의이다. 리만합을 이용한 정적분의 정의는 위에서 소개한 구분구적법을 이용한 정적분의 정의보다 일반화된 정의로, 기본적인 아이디어는 주어진 함수에 대하여 x축의 정의역 구간을 잘게 자른 각 소구간 위에 그래프의 위쪽 또는 아래쪽에 직사각형을 만들어 채워 넣고, 이들의 넓이를 모두 더한 값의 상한과

하한이 같은 값이 되면 적분 가능하다는 것이다. 이때 상한과 하한이 일치하는 값이 함수의 정적분 값이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 이 구간을 n개로 다음과 같이 분할하자.

- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- 각 소구간의 길이는 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- 각 소구간에서 임의의 점 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$를 선택

이때 리만합은 다음과 같이 정의된다:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

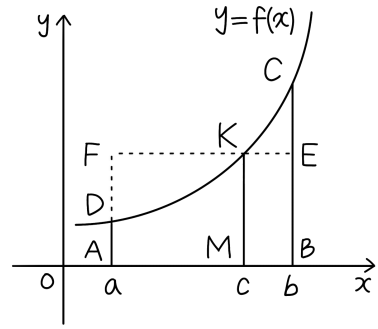
이 합을 무한히 많은 구간으로 쪼개고($n \to \infty$), 분할의 최대 길이 $\max \Delta x_i \to 0$일 때, 이 리만합의 극한이 존재하면, 이를 정적분으로 정의한다:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

정적분은 이처럼 부정적분의 값 차이로도, 또는 리만합(구분구적법/분할구적법)의 극한 값으로도 다양하게 정의된다.

● 적분에 대한 평균값 정리는 무엇인가요?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) > 0$이라 하자.



이때 영역 ABCD의 넓이, 즉 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$의 값과 가로의 길이가 $b-a$이고 세로의 길이가 $f(c)$인 직사각형 ABEF의 넓이 $f(c)(b-a)$가 같게 되는 c가 $a < c < b$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

즉, 다음과 같은 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

이 정리는 정적분이 평균값을 가지는 함숫값 $f(c)$에 구간 길이 $(b-a)$를 곱한 것과 같음을 의미하며, 함수의 평균적인 높이를 갖는 지점 c가 구간 (a,b) 안에 적어도 하나 존재함을 보장한다.

확률과통계

머 리 말

이 자료는 2022 개정 교육과정의 〈확률과 통계〉에서 다루는 다음의 수학 용어들을 설명하고 안내하기 위해 마련되었습니다.

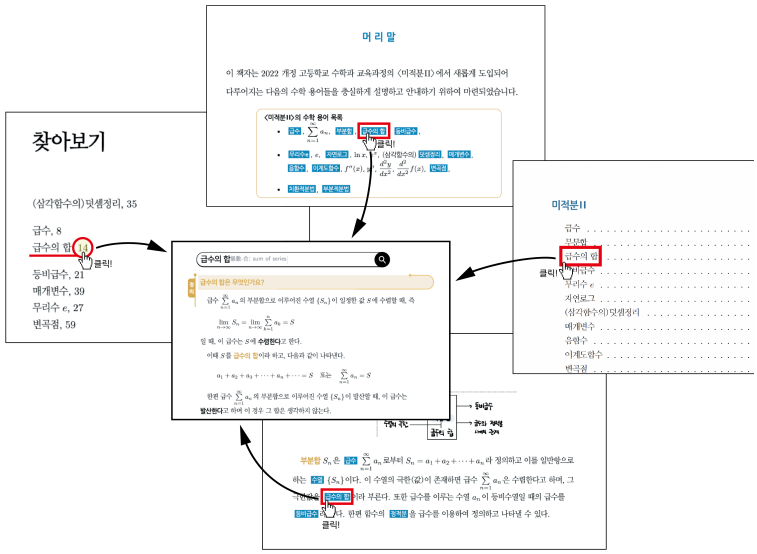
〈확률과 통계〉의 수학 용어 목록

- 중복순열, 중복조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형,
- 시행, 통계적 확률, 수학적 확률, 여사건, 배반사건, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행,
- 확률변수, 이산확률변수, 확률분포, 연속확률변수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 정규분포, 표준정규분포, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 모비율, 표본비율, 추정, 신뢰도, 신뢰구간

각 수학 용어에 대한 설명/안내 자료를 찾아가는 방법은 다음과 같습니다.

용어 설명 찾아가는 방법

(방법1) 위 목록의 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법2) [차례]에 있는 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법3) 맨 뒤 [찾아보기]에 있는 용어 옆 숫자(쪽수)를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법4) 자료 본문에서 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.



고등학생이 각 수학 용어를 이해하는 과정에서 자연스럽게 제기할 수 있는 질문 및 교사가 고등학생의 수학적 사고를 유도하기 위해 제기할 수 있는 질문을 중심으로 묻고 답하는 문답 방식으로 자료를 구성하였습니다. 이 자료가 고등학교 수학 용어 및 관련 학습 내용에 대하여 학생 스스로 질문을 던지고 질문에 대한 답을 탐색하는 습관을 형성하는데 기여하고, 수학 교사가 학생의 이런 습관 형성과 의미 있는 수학적 사고 활동을 안내하는 데 활용되기를 바랍니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점

이 자료는 고등학생이 각 수학 용어를 정확하고 명료하게 이해하기 위해 필요한 용어의 뜻(정의), 표현, 구체적인 예 등의 기본적인 내용 뿐 아니라 더 알아보기 질문을 통해 그 용어에 대한 고등학생의 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용, 더 나아가 용어 관련 다양한 참고 자료와 대학 수준의 보다 심화 확장된 내용까지 심화(참고)를 통해 폭넓게 다루고자 하였습니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점을 살펴보면 다음과 같습니다.

[자료의 짜임새]

	기본	더 알아보기	심화(참고)
내용	고등학생의 수학 용어에 대한 정확하고 명료한 이해에 필요한 정의, 의미, 예 등의 기본 내용으로 구성	고등학생의 수학 용어에 대한 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용으로 구성	대학 수준의 심화 학습을 원하는 고등학생, 수업을 준비하는 교사(혹은 예비교사)를 위한 [기본]과 [더 알아보기]의 내용을 더욱 심화한 내용 및 참고 자료로 활용 가능한 내용으로 구성
특징	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 모든 내용이 용어가 도입되는 과목 교육과정의 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 범위를 벗어날 수 있음. 단, 설명에 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙은 해당 과목 교육과정 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용 및 이때 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어날 수 있음

[자료의 활용]

고등학생	수학 용어에 대한 교과서 중심의 기본적이고 핵심적인 의미와 내용을 이해를 원하는 학생은 기본에 해당하는 내용을 읽고 공부하면 됩니다. 기본에 해당하는 내용을 토대로 좀 더 깊이 있는 이해를 원하는 학생은 더 알아보기의 내용을 읽으면 도움이 될 수 있습니다. 심화(참고)의 내용은 참고 자료로서 "아, 이런 내용도 있구나." 정도로 이해하거나, 읽지 않아도 됩니다.
(예비)교사	기본에 해당하는 내용은 모든 학생에게 가르쳐야 할 내용입니다. 더 알아보기와 심화(참고)의 내용은 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정 범위를 벗어난 학생의 질문에 답하거나 심화 탐구 활동 자료로 활용 가능합니다.

[활용 시 유의점]

더 알아보기와 심화(참고)의 내용 중에는 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어나는 내용이 포함되어 있습니다. 특히 심화(참고)의 내용은 대학 학부 수준의 내용을 포함하기도 합니다. 그러므로 고등학교 수학 교사가 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용할 때는 신중한 주의가 필요합니다. 특히 평가에 교육과정의 범위를 벗어나는 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용하지 않도록 유의할 필요가 있습니다.

중복순열重複順列; repeated permutation

정의

중복순열이란 무엇인가요?

서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허용하여 r개를 택하여 나열하는 것을 **중복순열**이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호

$$_n\Pi_r$$

로 나타낸다. 이때 서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허용하여 r개를 택하여 나열하는 중복순열의 수는 r개의 자리에 올 수 있는 것이 각각 n개씩이므로 곱의 법칙에 의하여

$$_n\Pi_r = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{개}} = n^r$$

이다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ $_3\Pi_4 = 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81, \quad _4\Pi_3 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

❷ 서로 다른 3개의 원소에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 나열하는 중복순열의 수는

$$_3\Pi_4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$$

이고, 서로 다른 4개의 원소에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하는 중복순열의 수는

$$_4\Pi_3 = 4 \times 4 = \times 4 = 4^3 = 64$$

이다.

❸ 두 개의 숫자 1, 2를 중복하여 사용하는 것을 허용할 때 네 자리 자연수를 만드는 방법의 수는 각 자리에 올 수 있는 숫자가 1과 2 두 가지이므로

$$_2\Pi_4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

이다.



중복순열이 적용되는 상황에는 또 어떤 것이 있나요?

중복순열을 활용하는 예를 더 살펴보자.

❶ 중복순열은 유한집합의 부분집합의 개수를 구하는데 활용 가능하다. 이를테면 원소가 4개인 집합의 부분집합의 총 개수는

$$ {}_2\Pi_4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3^4 = 16 $$

이다. 일반적으로 원소가 n개인 집합의 부분집합의 총 개수는

$$ {}_2\Pi_n = 2^n $$

이다.

❷ 또 중복순열을 이용하면 유한집합을 정의역으로 하고 공역 역시 유한집합인 함수의 개수를 구할 수 있다. 이를테면 원소가 2개인 집합에서 원소가 4개인 집합으로의 함수의 총 개수는

$$ {}_4\Pi_2 = 4 \times 4 = 4^2 = 16 $$

이다. 일반적으로 원소가 m개인 집합을 정의역, 원소가 n개인 집합을 공역으로 하는 함수의 총 개수는

$$ {}_n\Pi_m = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m\text{개}} = n^m $$

이다.

이와 같이 중복순열은 서로 다른 몇 개의 대상을 중복을 허용하면서 선택한 뒤 순서 있게 나열하는 것으로 해석되는 모든 경우에 적용 가능하다.

의미

중복순열이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

중복순열(**重複順列**)은 말 그대로 중복(**重複**)을 허용하는 순열(**順列**)로서 겹치는 것(**重複**)을 허용하면서 순서있게 나열하는 것(**順列**)을 의미한다.

重 複 順 列

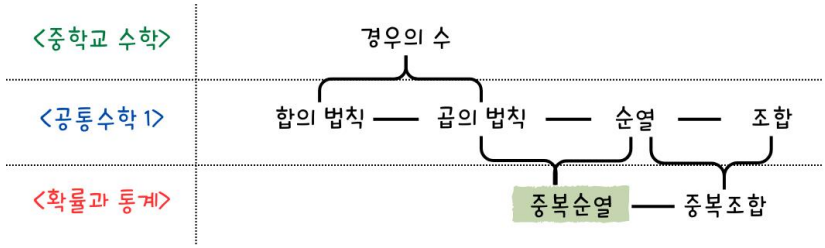
무거울 중 겹칠 복 순할 순 벌일 열

중복순열을 영어로는 repeated permutation이라고 한다. repeated에는 '중복된'이라는 뜻이 있고 permutation은 '순열' 즉, 순서있게 나열하는 것을 뜻한다. 그러므로 repeated permutation은 중복된 순열이고, 이것을 줄여서 중복순열이라 하는 것이다.

개념

중복순열과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

중복순열은 합의 법칙, 곱의 법칙, 순열, 중복조합 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



실제로 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하한 뒤 나열하는 **중복순열**은 서로 다른 n개에서 서로 다른 r개를 택하여 나열하는 순열과는 달리 중복을 허락하여 r개를 택한 뒤 나열하는 것이다. 중복순열의 수는 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 순서없이 택하는 중복조합 각각을 나열하는 방법의 수를 합의 법칙을 이용하여 모두 더하여 계산할 수도 있지만, 공식 ${}_n\Pi_r = n^r$을 이용하면 훨씬 간단하게 구할 수 있다. 이 공식은 곱의 법칙을 이용하여 곧바로 얻을 수 있다.

중복조합重複組合; repeated combination

정의

중복조합이란 무엇인가요?

서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 것을 **중복조합**이라 하고, 이 중복조합의 수를 기호

$$ {}_n\mathrm{H}_r $$

로 나타낸다. 이때 서로 다른 n개의 원소에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 다음과 같다.

$$ {}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ $ {}_3\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = \dfrac{7!}{5!\,2!} = 21 $, $ {}_5\mathrm{H}_3 = {}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7!}{3!\,4!} = 35 $

❷ 네 개의 숫자 $1, 2, 3, 4$ 중에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 방법의 수는

$$ {}_4\mathrm{H}_6 = {}_9\mathrm{C}_6 = \frac{9!}{6!\,3!} = 84 $$

이다.

❸ 똑같은 공 7개를 서로 다른 세 상자 A, B, C에 나누어 넣는 방법의 수는 세 문자 A, B, C 중에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$ {}_3\mathrm{H}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = \frac{9!}{7!\,2!} = 36 $$

이다.

❹ 똑같은 공 7개를 빈 상자가 없도록 서로 다른 세 상자 A, B, C에 넣는 방법의 수는 각 상자에 공을 한 개씩 먼저 넣고 남은 4개의 공을 세 상자 A, B, C에 넣는 방법의 수와 같으므로

$$ {}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15 $$

이다.

5 $(x+y+z)^5$을 전개하여 동류항끼리 정리하면 각 항은 5차식이다. 이때 항의 개수는 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수

$$ {}_3\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = \frac{7!}{5!\,2!} = 21 $$

이다.

6 방정식 $x+y+z=7$의 음이 아닌 정수해 (x, y, z)의 개수는 세 문자 (x, y, z) 중에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$ {}_3\mathrm{H}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = \frac{9!}{7!\,2!} = 36 $$

이다.

개념

${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이 성립하는 이유를 설명해 주세요.

3개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 4개의 문자를 택하는 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_4$를 구해보자. 선택할 문자를 4개의 ●로 나타내고, 이들 4개의 ●를 세 묶음으로 나누어 첫 묶음에 있는 ●의 수는 a의 개수, 두 번째 묶음에 있는 ●의 수는 b의 개수, 마지막 묶음에 있는 ●의 수는 c의 개수를 나타내기로 하자. 이때 세 묶음으로 분류하기 위해서는 두 개의 칸막이 |가 필요하다. 역으로 4개의 ●와 두 개의 |로 이루어진 각각의 순열에 대하여 3개의 문자 a, b, c에서 4개의 문자를 택하는 방법이 하나씩 대응됨을 알 수 있다. 예를 들어 a, b, c를 각각

$$ 1,\ 2,\ 1 $$

개 택하는 중복조합은

● | ● ● | ●

에 대응하고,

$$ 3,\ 1,\ 0 $$

개 택하는 중복조합은



에 대응하며,

$$4,\ \ 0,\ \ 0$$

개 택하는 중복조합은



에 대응한다. 따라서 구하는 방법의 수는 같은 것이 있는 순열의 수 공식에서

$$\frac{\{4+(3-1)\}!}{4!(3-1)!}=\frac{6!}{4!2!}=15$$

이고, 이것은 ${}_{4+(3-1)}\mathrm{C}_4$와 같음을 알 수 있다. 이와 같이 일반적으로 서로 다른 n개의 원소에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 r개의 ●와 $(n-1)$개의 칸막이 |로 이루어진 순열의 수와 같다. 따라서 다음이 성립한다.

$$_n\mathrm{H}_r=\frac{(r+(n-1))!}{r!(n-1)!}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

또한, n개의 수 $1,2,3,\cdots,n$에서 중복을 허락하여 r개를 꺼낸 한 경우를

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_r\quad(1\le a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_r\le n)\tag{1}$$

라 하자. 이때

$$b_1=a_1,\quad b_2=a_2+1,\quad b_3=a_3+2,\quad\cdots,\quad b_r=a_r+(r-1)\tag{2}$$

이라 하면

$$1\le b_1<b_2<b_3<\cdots<b_r\le n+r-1\tag{3}$$

이다. 위에서 (1)의 조건을 만족하는 $a_1,a_2,\cdots,a_r$이 주어지면 (2)를 적용하여 (3)의 조건을 만족하는 $b_1,b_2,\cdots,b_r$이 결정되고, 역으로 (3)의 조건을 만족하는 $b_1,b_2,\cdots,b_r$이 주어지면 (1)의 조건을 만족하는 $a_1,a_2,\cdots,a_r$이 결정된다. 그러므로 (1)의 조건을 만족하도록 $a_1,a_2,\cdots,a_r$을 뽑는 방법의 수는 (3)의 조건을 만족하도록 $b_1,b_2,\cdots,b_r$을 뽑는 방법의 수와 같다.

한편 (3)의 조건을 만족하도록 $b_1, b_2, \cdots, b_r$을 뽑는 방법의 수는 $n+r-1$개의 수 $1, 2, \cdots, n+r-1$에서 r개를 뽑는 방법의 수이므로, ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이고, 따라서

$$ {}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

이다.

의미 중복조합이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

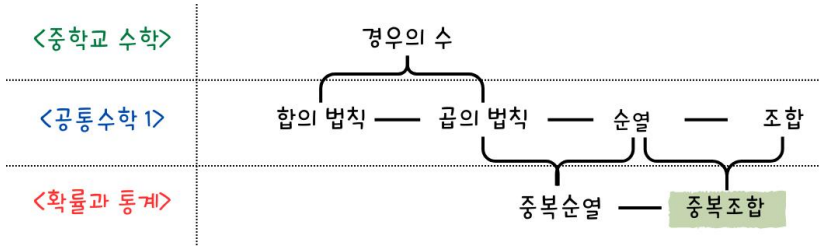
중복조합(重複組合)은 말 그대로 중복(重複)을 허용하는 조합(組合)으로서 겹치는 것(重複) 즉, 같은 대상을 여러 번 겹쳐 선택하는 것을 허용하면서 한데 모아 순서 없이 결합하는 것(組合)을 의미한다.

重	複	組	合
무거울 중	겹칠 복	짤 조	합할 합

중복조합을 영어로는 repeated combination이라고 한다. repeated에는 '중복된'이라는 뜻이 있고 combination은 '조합' 즉, 한데 모아 순서 없이 결합하는 것을 뜻한다. 그러므로 repeated permutation은 중복된 조합이고, 이것을 줄여서 중복조합이라 하는 것이다.

개념 중복조합과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

중복조합은 합의 법칙, 곱의 법칙, 조합, 순열, 중복순열 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



실제로 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 **중복조합**은 서로 다른 n개에서 서로 다른 r개를 택하는 조합과는 달리 중복을 허락하여 r개를 택하는 것이다.

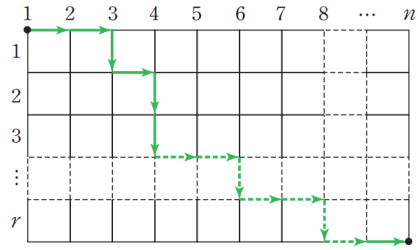
중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$은 $(n+r-1)$개 중 같은 것이 각각 r개, $(n-1)$개 있을 때 $(n+r-1)$개를 나열하는 **순열**의 수로 구할 수도 있고, 서로 다른 $(n+r-1)$개 중에서 서로 다른 r개를 택하는 조합의 수로 구할 수도 있는데, 이는 이들 두 경우의 수가 같기 때문이다. 즉, 중복조합의 수는 순열을 이용하여 구할 수도 있고 조합을 이용하여 구할 수도 있다. 그리고 순열의 수와 조합의 수는 둘 다 **합의 법칙**과 **곱의 법칙**을 통해 얻어진다.

심화(참고)

● **중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$을 구하는 다른 방법은 없나요?**

중복조합의 수 즉, 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 선택하는 방법의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$은 바둑판 모양 도형의 한 끝점에서 다른 끝점으로 가는 최단경로의 수를 세어 구할 수도 있다.

그림과 같이 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$개의 위치에서 세로 방향으로 n개의 선을 긋고 가로 방향으로는 r개의 칸이 만들어지도록 선을 그어 만든 바둑판 모양의 도형이 있을 때,



이 도형의 왼쪽 맨 위 끝점에서 오른쪽 맨 아래 끝점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수를 생각해보자.

(1) 이 도형의 왼쪽 맨 위 끝점에서 오른쪽 맨 아래 끝점까지 최단거리로 이동하려면 세로로 r개의 칸을 이동해야 하는데 세로로 이동할 수 있는 위치는 총 n개이다. 그러므로 최단경로의 수는 n개의 위치 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중에서 세로로 이동하는 위치를 중복을 허락하여 r개를 선택하는 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$과 같다.

(2) 한편, 이 도형의 왼쪽 맨 위 끝점에서 오른쪽 맨 아래 끝점까지 최단거리로 이동하려면 어떤 방법으로 가든지 가로 방향으로 $(n-1)$개, 세로 방향으로 r개의 선분을 지나야 한다. 즉, 총 $(n-1+r)$개의 선분 중에서 세로 방향으로 지나는 r개의 선분을 선택하면 되므로 최단경로의 수는 ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이 된다.

따라서

$$ {}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

이다.

이항정리二項定理; binomial theorem , 이항계수二項係數; binomial coefficient

정의

이항정리와 이항계수가 무엇인가요?

n이 자연수일 때 $(a+b)^n$을 전개하면

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

로 나타낼 수 있다. 이것을 **이항정리**라 한다. 이 전개식에서 각 항의 계수

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ \ldots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \ldots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

을 **이항계수**라 하고, 항 ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$을 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항이라 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

$$(1)\ (a+b)^1 = \sum_{r=0}^{1} {}_1\mathrm{C}_r a^{1-r}b^r = {}_1\mathrm{C}_0 a + {}_1\mathrm{C}_1 b$$
$$= a+b$$

$$(2)\ (a+b)^2 = \sum_{r=0}^{2} {}_2\mathrm{C}_r a^{2-r}b^r = {}_2\mathrm{C}_0 a^2 + {}_2\mathrm{C}_1 ab + {}_2\mathrm{C}_2 b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3)\ (a+b)^3 = \sum_{r=0}^{3} {}_3\mathrm{C}_r a^{3-r}b^r = {}_3\mathrm{C}_0 a^3 + {}_3\mathrm{C}_1 a^2 b + {}_3\mathrm{C}_2 ab^2 + {}_3\mathrm{C}_3 b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(4)\ (a+b)^4 = \sum_{r=0}^{4} {}_4\mathrm{C}_r a^{4-r}b^r = {}_4\mathrm{C}_0 a^4 + {}_4\mathrm{C}_1 a^3 b + {}_4\mathrm{C}_2 a^2 b^2 + {}_4\mathrm{C}_3 ab^3 + {}_4\mathrm{C}_4 b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + +b^4$$



$(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$과 $a^r b^{n-r}$의 계수가 같은데 왜 그런가요?

$(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$과 $a^r b^{n-r}$의 계수는 각각

$${}_n\mathrm{C}_r \text{ 과 } {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

이다. 그런데

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} $$

이므로, 두 항 $a^{n-r}b^r$ 과 $a^r b^{n-r}$ 의 계수는 항상 같다.

개념

이항정리와 이항계수는 어디에 활용되나요?

이항정리를 활용하면 두 개의 항으로 이루어진 식의 거듭제곱을 전개할 수 있을 뿐 아니라 굳이 전개하지 않더라도 전개식의 각 항의 계수를 찾을 수 있다. 예를 들어 $(2x-\frac{5}{x})^4$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 찾아보자.

$(2x-\frac{5}{x})^4$ 의 전개식에서 일반항은

$$ {}_4\mathrm{C}_r(2x)^{4-r}\left(-\frac{5}{x}\right)^r = {}_4\mathrm{C}_r 2^{4-r}(-5)^r x^{4-2r} $$

이다. 이때, $x^{4-2r} = x^2$ 에서

$$ 4-2r=2\,, \quad r=1 $$

이다. 따라서 x^2 의 계수는

$$ {}_4\mathrm{C}_1 2^3(-5) = 4\times 8\times(-5) = -160 $$

이다.

또 이항정리를 이용하면 등식

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n $$

이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

증명 이항정리에 의하여

$$ (1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n $$

이 성립한다. 이 등식은 $x=1$ 일 때에도 성립하므로 $x=1$ 을 대입하면

$$ 2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n $$

을 얻는다.

위 등식은 원소가 n개인 집합의 부분집합의 개수 2^n이 원소의 개수가 0개인 부분집합의 개수, 1개인 부분집합의 개수, 2개인 부분집합이 개수, …, n개인 부분집합의 개수를 모두 더한 것과 같음을 나타낸다.

의미

이항정리와 이항계수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

이항정리(二項定理)는 말 그대로 두 개의 항(二項)으로 이루어진 식에 대한 정리(定理)로서 두 항(二項)의 거듭제곱 전개에 대한 법칙을 다루는 정리(定理)를 의미한다.



이항정리를 영어로는 binomial theorem이라고 한다. binomial에는 '두 개의 항 즉, 이항'이라는 뜻이 있고 theorem은 '정리'를 의미한다. 즉, binomial theorem은 두 항으로 이루어진(binomial) 식의 거듭제곱 전개에 대한 법칙을 다루는 정리(theorem)를 의미한다.

한편 이항계수(二項係數)는 말 그대로 두 개의 항 즉 ,이항(二項)으로 이루어진 식의 거듭제곱을 전개하였을 때 나오는 항들의 계수(係數)를 의미한다.

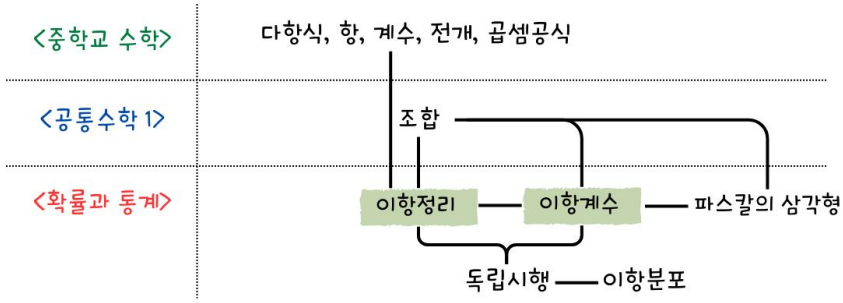


이항계수를 영어로는 binomial coefficient라고 한다. binomial에는 '두 개의 항 즉, 이항'이라는 뜻이 있고 coefficient는 '계수'를 의미한다. 즉, binomial coefficient는 두 항으로 이루어진(binomial) 식의 거듭제곱 전개에서 나타나는 항들의 계수(coefficient)를 의미한다.

개념

이항정리와 이항계수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

이항정리, 이항계수는 조합, 파스칼의 삼각형, 독립시행과 밀접한 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 다항식의 곱셈공식, 전개, 항의 계수 등의 용어 및 개념과도 관련이 있다.



이항정리 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ 에서 각 **이항계수** ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r (r=0,1,2,\cdots,n)$ 는 서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 택하는 조합의 수이다. 1과 각 자연수 n 에 대한 이항계수들로 이루어진 삼각형 모양의 수 배열을 일컬어 파스칼의 삼각형이라 한다. 파스칼의 삼각형과 등식 ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ 을 이용하면 조합의수 ${}_n\mathrm{C}_r$ 을 구할 수 있다. 특히 독립시행에서 어떤 사건이 일어날 확률은 이항정리와 이항계수를 이용하여 구할 수 있다. 독립시행에서 사건이 일어날 확률은 이항분포를 따르는 확률변수의 각 값 즉, 변수에 대한 함숫값 즉, 확률값이기도 하다.

심화(참고)

- **삼항정리나 사항정리도 있나요?**

  이항정리는 두 개의 항으로 이루어진 식의 거듭제곱 $(a+b)^n$ 을 전개한 식이다. 이와 유사하게 세 개의 항으로 이루어진 식의 거듭제곱 $(a+b+c)^n$ 을 전개한 식을 생각할 수 있다.

  $$(a+b+c)^n=\{(a+b)+c\}^n$$

  을 전개하면, 이항정리에 의해 c^r 항은

  $${}_n\mathrm{C}_r(a+b)^{n-r}c^r$$

  이다. 또 $(a+b)^{n-r}$ 의 전개식에서 b^q 항은

  $${}_{n-r}\mathrm{C}_q a^{n-r-q}b^q={}_{n-r}\mathrm{C}_q a^p b^q \ (p+q+r=n)$$

이다. 따라서 $(a+b+c)^n$ 의 전개식에서 $a^p b^q c^r$ 의 계수는

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_r \times {}_{n-r}\mathrm{C}_q &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \times \frac{(n-r)!}{q!(n-r-q)!} \\ &= \frac{n!}{r!q!(n-r-q)!} \\ &= \frac{n!}{p!q!r!} \quad (p+q+r=n) \end{aligned}$$

이다.이를 삼항정리라고 한다. 삼항정리와 마찬가지 방법으로 사항정리, 오항정리도 생각할 수 있다.

일반적으로 삼항정리 이상을 다항정리라고 부른다.

파스칼의 삼각형파스칼의 三角形; Pascal's triangle

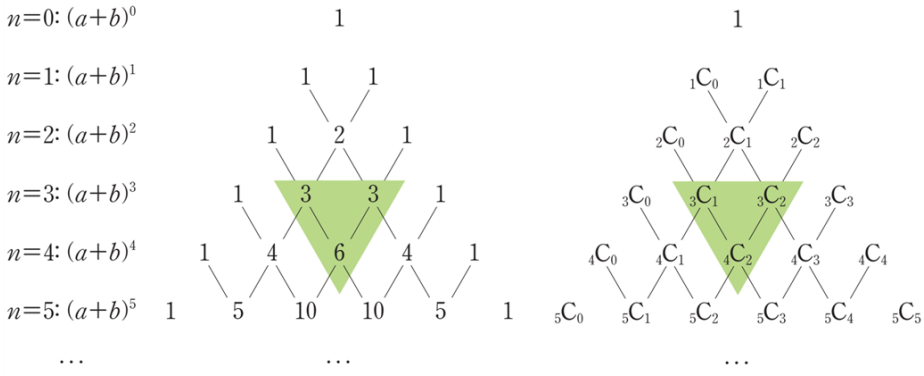
정의

파스칼의 삼각형이 무엇인가요?

$n=0,1,2,3,4,\cdots$ 일 때, $(a+b)^n$ 의 전개식은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

이때 각 항의 계수 즉, 이항계수를 차례대로 배열하면 다음과 같다.



이와 같은 이항계수의 배열을 **파스칼의 삼각형**이라 한다.

개념

파스칼의 삼각형에는 어떤 성질이 있나요?

파스칼의 삼각형에는 다음과 같은 성질들이 있다.

❶ 수의 좌우 배열이 대칭적이다. 즉,

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} $$

이다.

❷ 조합의 수를 구할 수 있다. 즉, 등식

$$ {}_nC_r + {}_nC_{r+1} = {}_{n+1}C_{r+1} $$

이 성립하므로, 이를 이용하여 인접한 두 항의 합으로 그 아래 행에 있는 조합의 수를 찾을 수 있다.

❸ 모든 행의 첫째 항과 마지막 항은 항상 1이다. 즉,

$$ {}_nC_0 = {}_nC_n = 1 $$

이다.

❹ 각 행의 모든 수의 합은 2의 거듭제곱이다. 즉,

$$ {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n $$

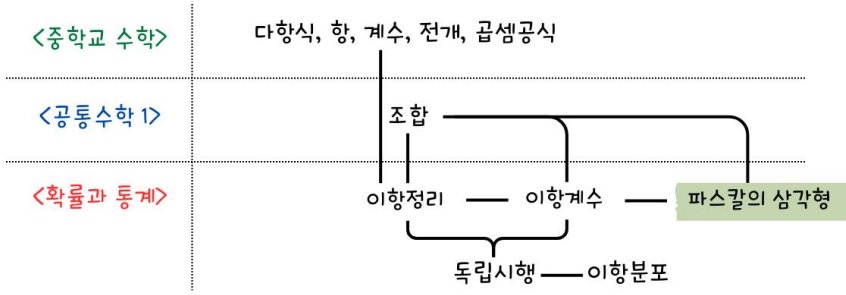
이다.

의미 **파스칼의 삼각형이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.**

파스칼의 삼각형(三角形)은 프랑스의 수학자이자 철학자인 파스칼(Pascal, B.;1623~1662)이 삼각형(三角形) 모양의 수 배열을 연구했기 때문에 그의 이름을 따 붙여진 명칭이다. 그런데 삼각형 모양의 이런 수 배열을 처음으로 연구한 사람은 파스칼이 아니다. 파스칼보다 훨씬 이전에 중국과 아라비아에서 이미 그러한 수 배열을 연구했다고 한다. 파스칼의 삼각형을 영어로는 Pascal's triangle이라 한다. 글자 그대로 파스칼의(Pascal's) 삼각형(triangle)인 것이다.

개념 **파스칼의 삼각형과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?**

파스칼의 삼각형은 조합, 이항정리, 이항계수와 밀접한 관련이 있고, 〈중학교 수학〉에서 다루는 다항식의 전개, 항의 계수 등의 용어 및 개념과도 관련이 있다.



실제로 **파스칼의 삼각형**은 두 개의 항으로 이루어진 식의 거듭제곱 전개식을 설명하는 이항정리에서 전개식의 이항계수들을 삼각형 모양으로 나열한 일종의 수 배열이다. 파스칼의 삼각형을 통해 두 개의 항으로 이루어진 식의 거듭제곱의 전개식을 찾을 수 있을 뿐 아니라 조합의 여러 성질도 눈으로 직접 확인할 수 있다.

심화(참고)

● **파스칼의 삼각형의 다른 성질은 없나요?**

앞서 살펴본 것 이외에 파스칼의 삼각형의 성질을 좀 더 살펴보면 다음과 같다.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

❶ 파스칼의 삼각형에서 1부터 오른쪽(왼쪽) 아래의 대각선 방향으로 n개의 수를 더한 값은 그 방향의 $(n+1)$번째 수의 왼쪽(오른쪽)에 있는 수와 같다. 예를 들어

(1) 맨 위의 1부터 오른쪽 아래의 대각선 방향으로 5개의 수를 더한 값은

$$1+{}_1\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4=1+1+1+1+1=5$$

이고, 그 방향의 6번째 수의 왼쪽에 있는 수는

$$_5\mathrm{C}_4 = 5$$

이므로 두 값은 서로 같다. 다른 예로,

(2) 2번째 행 맨 왼쪽의 1부터 오른쪽 아래의 대각선 방향으로 5개의 수를 더한 값은

$$_1\mathrm{C}_0 + {}_2\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

이고, 그 방향의 6번째 수의 왼쪽에 있는 수는

$$_6\mathrm{C}_4 = 15$$

이므로, 두 값은 서로 같다.

❷ 파스칼의 삼각형의 대각선을 따라 수를 더하면 피보나치 수열을 찾을 수 있다. 실제로

맨 위의 ①,

2번째 행의 맨 왼쪽의 ①,

3번째 행의 맨 왼쪽의 1과 오른쪽 대각선 방향의 1의 합 즉, $_2\mathrm{C}_0 + {}_1\mathrm{C}_1 =$ ②,

4번째 행의 맨 왼쪽의 1과 오른쪽 대각선 방향의 2의 합 즉, $_3\mathrm{C}_0 + {}_2\mathrm{C}_1 =$ ③,

5번째 행의 맨 왼쪽의 1과 오른쪽 대각선 방향의 3, 1의 합 즉, $_4\mathrm{C}_0 + {}_3\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_2 =$ ⑤,

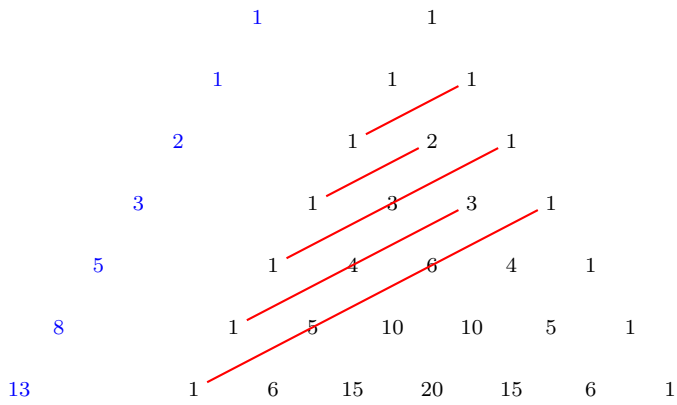
6번째 행의 맨 왼쪽의 1과 오른쪽 대각선 방향의 4, 3의 합 즉, $_5\mathrm{C}_0 + {}_4\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2 =$ ⑧,

$\vdots$

은 피보나치수열

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots$$

을 이룬다.



시행試行; trial / experiment

정의

시행이 무엇인가요?

주사위나 동전 던지기와 같이 그 결과가 우연에 의하여 정해지고, 같은 조건에서 반복할 수 있는 실험이나 관찰을 **시행**이라 한다.

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라 한다. 또 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 한 개의 주사위를 던지는 시행에서

(1) 나오는 점의 개수의 표본공간 S는

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

(2) 점의 개수가 짝수로 나오는 사건 E는

$$E = \{2, 4, 6\},$$

(3) 점의 개수가 홀수로 나오는 사건 O는

$$O = \{1, 3, 5\},$$

(4) 근원사건은

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

이다.

❷ 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10장의 카드에서 임의로 한 장의 카드를 뽑는 시행에서

(1) 표본공간 S는

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

(2) 소수가 적힌 카드를 뽑는 사건 P는

$$P = \{2, 3, 5, 7\},$$

(3) 근원사건은

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}$$

이다.

의미

시행이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

시행(試行)에서 시(試)는 '시험하다' 또는 '시도하다'를 뜻하고, 행(行)은 '행하다', '실행하다'는 뜻을 가진다. 시행(試行)은 수학에서 우연에 의해 결과가 결정되는 실험이나 관찰을 행한다는 것을 의미하는데, 일상에서는 어떤 일을 시(試)험삼아서 행(行)하여 본다는 것을 의미한다.

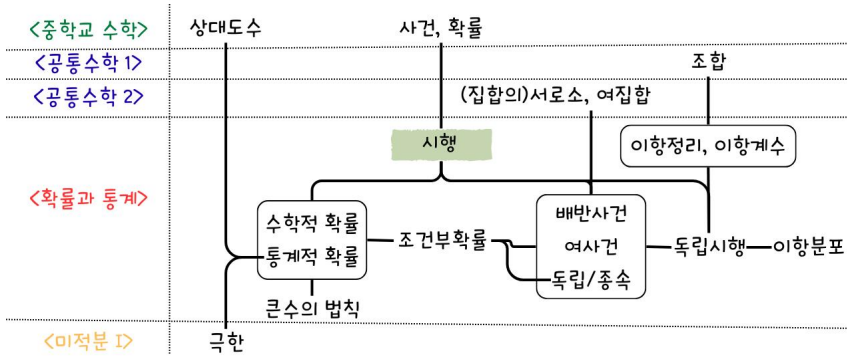


시행을 영어로는 trial 또는 experiment라고 한다. trial에는 '시도'라는 뜻이 있고 experiment에는 '실험'이라는 뜻이 있다. 주사위나 동전을 던지는 것이 하나의 시도나 실험이기에 시행을 trial 또는 experiment라고 한 것으로 보인다.

개념

시행과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

시행은 배반사건, 여사건, 수학적 확률, 통계적 확률, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행 등 확률 관련 모든 용어 및 개념의 기초 용어로서 이들 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



배반사건, **여사건**은 모두 사건의 한 종류이고, 이들 사건은 모두 표본공간의 부분집합으로서 **시행**의 결과로 나타난다. 어떤 사건이 일어날 가능성을 수로 나타내는 확률에는 각 근원사건이 일어날 가능성이 같을 때 표본공간의 원소의 개수에 대한 사건의 원소의 개수의 비로 정의되는 **수학적 확률**도 있고, 사건이 일어나는 상대도수의 극한으로 정의되는 **통계적 확률**도 있다. 한편 어떤 시행에서 조건에 따라 표본공간이 달라지는 경우가 있는데, 그 경우 사건이 일어날 확률이 달라질 수 있다. 사건 A가 일어났다는 조건 하에 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률**이라 부른다. 사건 A가 일어났다는 조건이 있든 없든 사건 B가 일어날 확률이 동일할 때 두 사건은 서로 **독립**이라 하고, 독립이 아닐 경우 두 사건은 서로 **종속**이라 한다. 어떤 시행이 매회 같은 조건에서 반복되는 경우 각 회의 시행이 그 이전의 시행의 결과에 영향을 받지 않을 때 이런 시행을 **독립시행**이라 한다. 독립시행에서 각 시행의 결과는 서로 배타적인 배반사건으로 한 사건이 일어나는 경우와 일어나지 않는 경우 즉, 그 여사건인 경우로 구분된다.

배반사건排反事件; exclusive event 여사건餘事件; complementary event

정의

배반사건과 여사건은 무엇인가요?

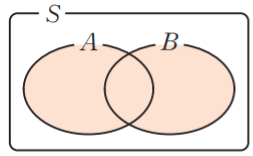
표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 기호로

$$A \cup B$$

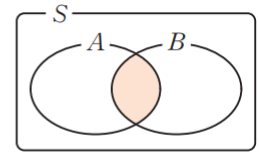
와 같이 나타낸다. 또 두 사건 A와 B가 모두 일어나는 사건을 기호로

$$A \cap B$$

와 같이 나타낸다.

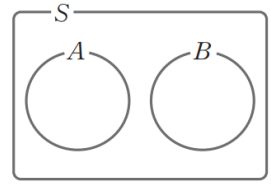


$A \cup B$

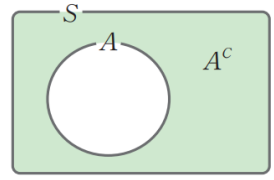


$A \cap B$

특히 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 $A \cap B = \varnothing$일 때, A와 B는 서로 배반이라 하고, 이 두 사건을 서로 **배반사건**이라 한다.



또 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라 하고, 기호로 A^c와 같이 나타낸다.



이때 $A \cap A^c = \varnothing$이므로 A와 그 여사건 A^c는 서로 배반사건이다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 2 이하의 눈이 나오는 사건을 A, 4 이상의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

이다. 이때,

❶ $A \cap B = \varnothing$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

❷ 사건 A의 여사건 A^c은 $\{3, 4, 5, 6\}$이고, 사건 B의 여사건 B^c은 $\{1, 2, 3\}$이다.

더 알아보기

A, B가 서로 배반사건이면, 그 여사건도 서로 배반사건이지 않나요?

위의 예에서 $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 5, 6\}$는 서로 배반사건이지만, 그 여사건인 $A^c = \{3, 4, 5, 6\}$, $B^c = \{1, 2, 3\}$은 $A^c \cap B^c = \{3\} \neq \varnothing$이므로 서로 배반사건이 아님을 알 수 있다.

이처럼 일반적으로 A, B가 서로 배반사건이어도 그 여사건들은 서로 배반사건이 아니다.

A, B가 서로 배반사건일 때 그 여사건도 서로 배반사건인 경우는 두 사건이 서로의 여사건인 경우 즉, $A^c = B$인 경우 뿐이다.

의미

배반사건과 여사건이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

배반사건(排反事件)에서 배(排)는 '밀치다' 또은 '제외하다'를 뜻하고, 반(反)은 '돌아서다' , '반대한다' 는 뜻을 가지며, 사건(事件)은 일어난 일 즉, 확률에서의 사건을 의미한다. 결국 배반사건(排反事件)은 서로 밀쳐내어 배(排)타적이고 돌아서서 반(反)대되어 동시에 일어날 수 없는 사건(事件)을 의미한다.



배반사건을 영어로는 exclusive event이라고 한다. exclusive에는 '배타적인'이라는 뜻이 있고 event는 '사건'을 뜻하므로 exclusive event는 서로 배타적인 사건을 의미한다.

한편 여사건(餘事件)에서 여(餘)는 '남다'라는 뜻을 가지고 있고, 수학에서는 여집합과 같이 전체에서 어떤 것을 뺀 나머지를 나타낼 때 사용된다. 그리고 사건(事件)은 말 그대로 일어난 일 즉, 확률에서의 사건을 의미한다. 결국 여사건(餘事件)은 어떤 사건의 여(餘) 집합이 되는 사건(事件)을 의미한다.

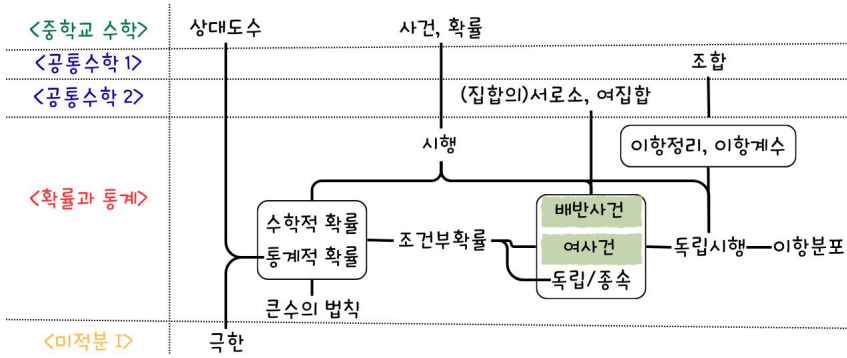


여사건을 영어로는 complementary event이라고 한다. complementary에는 '보완적인'이라는 뜻이 있고 event는 '사건'을 뜻한다. 결국 complementary event는 어떤 사건이 있을 때 그 사건을 보완하여 전체를 이루게 하는 사건을 의미한다.

개념

배반사건, 여사건과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

배반사건, 여사건은 시행, 수학적 확률, 통계적 확률, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



배반사건은 어떤 **시행**에서 두 사건이 동시에 일어나지 않을 때 그 두 사건을 일컫는 용어이고, **여사건**은 어떤 사건에 대하여 그 사건이 일어나지 않는 사건을 일컫는 용어로서, 어떤 사건과 그 여사건은 서로 배반사건이다. 두 사건 A, B가 서로 배반사건일 때, 사건 $A \cup B$가 일어날 **수학적 확률**과 **통계적 확률**은 둘 다 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$이고, 어떤 사건 A의 여사건 A^c의 수학적 확률과 통계적 확률은 둘 다 $1-\mathrm{P}(A)$이다. 한편 어떤 시행에서 조건에 따라 표본공간이 달라지는 경우가 있는데, 그 경우 사건이 일어날 확률이 달라질 수 있다. 사건 A가 일어났다는 조건 하에 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률**이라 부른다. 사건 A가 일어났다는 조건이 있든 없든 사건 B가 일어날 확률이 동일할 때 두 사건은 서로 **독립**이라 하고, 독립이 아닐 경우 두 사건은 서로 **종속**이라 한다. 즉, 사건 A가 일어났다는 조건 하에 사건 B가 일어날 확률과 A의 여사건인 A^c가 일어났다는 조건 하에 사건 B가 일어날 확률이 서로 같을 때 두 사건 A, B는 서로 독립이고, 그렇지 않을 경우 종속인 것이다. 그리고 어떤 시행이 매회 같은 조건에서 반복되는 경우 각 회의 시행이 그 이전의 시행의 결과에 영향을 받지 않을 때 이런 시행을 **독립시행**이라 한다. 독립시행에서 각 시행의 결과는 서로 배타적인 배반사건으로 한 사건이 일어나는 경우와 일어나지 않는 경우 즉, 그 여사건인 경우로 구분된다.

수학적 확률數學的確率; mathematical probability

정의

수학적 확률이란 무엇인가요?

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다. 특히 어떤 시행의 표본공간 S에서 하나의 원소로만 이루어진 사건 즉, 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

를 사건 A가 일어날 **수학적 확률**이라 한다.

참고로 $\mathrm{P}(A)$에서 P는 확률을 뜻하는 Probability의 첫 글자이다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 하나의 동전을 던지는 시행에서

표본공간은 $S=\{\text{앞면}, \text{뒷면}\}$이고,

근원사건은 $\{\text{앞면}\}$, $\{\text{뒷면}\}$

으로 일어날 가능성이 같다. 이때 앞면이 나오는 사건 $A=\{\text{앞면}\}$가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{2}$$

이다.

❷ 하나의 주사위를 던지는 시행에서

표본공간은 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$이고,

근원사건은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$

으로 일어날 가능성이 같다. 이때 3의 배수의 눈이 나오는 사건 $A=\{3,6\}$이 일어날

수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

이다.

개념 **수학적 확률에는 어떤 성질이 있나요?**

❶ 수학적 확률에는 다음과 같은 기본 성질이 있다.

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $\quad 0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

(2) 사건 A가 반드시 일어날 때, $\quad \mathrm{P}(A)=1$

(3) 사건 A가 절대로 일어나지 않을 때, $\quad \mathrm{P}(A)=0$

❷ 또 다음과 같은 덧셈정리가 성립한다.

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

❸ 한편 임의의 사건 A와 그 여사건 A^c에 대해여 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)$$

위의 기본 성질, 덧셈정리, 여사건의 확률에 대한 성질은 모두 수학적 확률 뿐 아니라 통계적 확률에서도 그대로 성립한다.

의미 **수학적 확률이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.**

수학적 확률(數學的確率)에서 수(數)는 '수', '수를 세다', 학(學)은 '배우다', '연구하다'를 뜻하고, 이들을 결합한 수학(數學)은 수를 연구하는 학문 즉, 수학을 의미한다. 또 확(確)은 '확실하다', '틀림없다, 률(率)은 '비율', '비'를 뜻하며, 이들을 결합한 확률(確率)은 확실한 정도나 비율 즉, 어떤 사건이 일어날 가능성인 확률을 의미한다. 그리고 적(的)은 ' 에 관한', ' 의 성질을 가진'을 뜻하는 접미사이다. 따라서 수학적 확률(數學的確率)은

수학적(數學的)으로 정의된 확률(確率)을 의미한다.

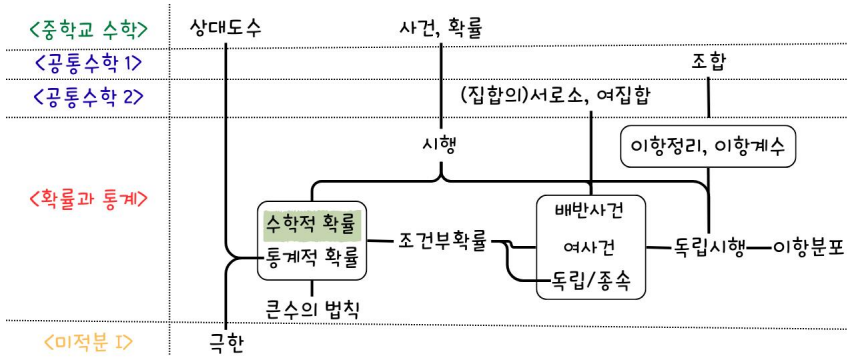
數	學	的	確	率
수(셈) 수	배울 학	과녁 적	굳을 확	비율 률/율

수학적 확률을 영어로는 mathematical probability라고 한다. mathematical은 '수학적'을 뜻하고 probability은 '확률'을 뜻하므로, mathematical probability는 글자 그대로 수학적 확률을 의미한다.

개념

수학적 확률과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

수학적 확률은 시행, 배반사건, 여사건, 통계적 확률, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



수학적 확률은 시행의 결과로 나타나는 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때 표본공간의 원소의 개수에 대한 사건의 원소의 개수의 비로 정의된다. 그러나 근원사건이 일어날 가능성이 같지 않거나 같다고 보기 어려운 경우 수학적 확률을 적용할 수 없다. 수학적 확률과 달리, 사건이 일어나는 상대도수의 극한으로 정의되는 통계적 확률은 이런 경우에도 적용할 수 있다. 수학적 확률과 통계적 확률 둘 다 확률의 기본성질, 덧셈정리, 여사건의 확률에 대한 성질 등을 만족시킨다. 이에 따라 두 사건 A, B가 서로 배반사건일 때, 사건 $A \cup B$가 일어날 수학적 확률과 통계적 확률은 둘 다 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$이고, 어떤 사건 A의 여사건 A^c의 수학적 확률과 통계적 확률은 둘 다 $1-\mathrm{P}(A)$이다. 한편, 어떤

시행에서 조건에 따라 표본공간이 달라지는 경우가 있는데, 그 경우 사건이 일어날 확률이 달라질 수 있다. 사건 A가 일어났다는 조건 하에 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률**이라 부른다. 사건 A가 일어났다는 조건이 있든 없든 사건 B가 일어날 확률이 동일할 때 두 사건은 서로 **독립**이라 하고, 독립이 아닐 경우 두 사건은 서로 **종속**이라 한다. 어떤 시행이 매회 같은 조건에서 반복되는 경우 각 회의 시행이 그 이전의 시행의 결과에 영향을 받지 않을 때 이런 시행을 **독립시행**이라 한다.

심화(참고)

● **어떤 시행에서 표본공간은 한 가지뿐인가요?**

두 학생 A와 B가 가위바위보 게임을 한다고 할 때, A가 이길 수학적 확률을 다음과 같이 서로 다른 방법으로 구해보자.

(방법 1) 가위바위보 게임 결과 A가 이기는 사건을 a, B가 이기는 사건을 b, 비기는 사건을 c라 하면, 이 시행의 표본공간은

$$S = \{a,\ b,\ c\}$$

으로 표본공간의 원소의 개수는 3이고, A가 이기는 사건의 원소의 개수는 1이다. 따라서 A가 이길 수학적 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

(방법 2) 두 학생 A와 B가 내는 가위바위보의 순서쌍은

(가위, 가위), (가위, 바위), (가위, 보),
(바위, 가위),), (바위, 바위), (바위, 보),
(보, 가위), (보, 바위), (보, 보)

로 9개이다. 그러므로 이 시행은 표본공간의 원소의 개수는 9이고, A가 이기는 사건은 {(가위, 보), (바위, 가위), (보, 바위)}이므로 원소의 개수가 3이다. 따라서 A가 이길 수학적 확률은 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$이다.

위의 두 방법(방법 1)과(방법 2)에서 표본공간은 서로 다르고 원소의 개수도 3개와 9개로 서로 다르다. 그러나 두 방법 모두 각 근원사건이 일어날 가능성이 같아야 한다는 수학적 확률 정의의 전제를 모두 만족하고, 사건 A의 수학적 확률도 일치한다. 이런 점에서 어떤 시행에서 표본공간은 유일하지 않을 수 있음을 알 수 있다.

주의할 점 다른 예로 숫자 1과 2가 하나씩 적힌 검은 공 2개와 흰 공 1개가 들어있는 주머니에서 1개의 공을 꺼내는 시행에서 흰 공을 꺼내는 사건의 확률을 생각해보자. 이 시행에서

① 표본공간을 S_1 ={검은 공, 흰 공}이라 하면, 구하는 확률은 $\frac{1}{2}$,

② 표본공간을 S_2 ={1번 검은 공, 2번 검은공, 흰 공}이라 하면, 구하는 확률은 $\frac{1}{3}$

이 된다. 그런데 ② 에서 S_2 는 3 개의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같으므로 표본공간이 되지만, ① 에서 S_1 은 근원사건이 일어날 가능성이 서로 다르므로 표본공간이 되지 않는다.

따라서 이 시행에서 흰 공을 꺼내는 사건의 확률은 $\frac{1}{2}$ 이 아니라 $\frac{1}{3}$ 이고, 표본공간은 S_2 한 가지뿐이다.

결국 어떤 시행에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같다면 이들 근원사건으로 이루어진 집합은 표본공간이 되지만, 각 근원사건이 일어날 가능성이 같지 않다면 이들 근원사건으로 이루어진 집합은 표본공간이 될 수 없다.

통계적 확률統計的確率; statistical probability , 큰 수의 법칙law of large[great] numbers

정의

통계적 확률과 큰 수의 법칙이란 무엇인가요?

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

특히 어떤 시행을 n번 반복하였을 때, 사건 A가 일어난 횟수 r_n에 대하여 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n}=p$이면

$$\mathrm{P}(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n}=p$$

를 사건 A가 일어날 **통계적 확률**이라 한다.

그러나 실제로 통계적 확률을 구할 때 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수는 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 $\frac{r_n}{n}$의 값을 통계적 확률로 사용한다.

한편 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수를 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수는 수학적 확률 p에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 이것을 **큰 수의 법칙**이라 한다.

큰 수의 법칙

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. 그러면 임의의 양수 h에 대하여 n의 값이 한없이 커지면 확률

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)$$

의 값은 1에 한없이 가까워진다.

큰 수의 법칙에 의하면 시행의 횟수 n이 충분히 클 때 사건 A의 통계적 확률 즉, 상대도수

$\frac{X}{n}$는 수학적 확률 p에 가까워진다. 그러므로 자연 현상이나 사회 현상에서 수학적 확률을 구하기 곤란한 경우 통계적 확률을 사용한다.

예 **구체적인 예를 들어 설명해 주세요.**

❶ 한 개의 윷짝을 1000번 던졌을 때, 평평한 안쪽 면이 350번, 둥근 바깥쪽 면이 650번 나왔다. 이 윷짝을 다시 던질 때, 바깥쪽 면이 나올 통계적 확률은

$$\frac{650}{1000} = 0.65$$

이다.

❷ 어느 야구 선수가 통산 3120타석에서 80개의 홈런을 쳤고, 2루타와 3루타를 포함하여 총 720개의 안타를 쳤다고 할 때, 이 선수가 안타를 칠 통계적 확률은

$$\frac{720}{3120} = \frac{3}{13}$$

이고, 홈런을 칠 통계적 확률은

$$\frac{80}{3120} = \frac{1}{39}$$

이다.

개념 **통계적 확률에는 어떤 성질이 있나요?**

❶ 통계적 확률에는 다음과 같은 기본 성질이 있다.

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $\quad 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

(2) 사건 A가 반드시 일어날 때, $\quad \mathrm{P}(A) = 1$

(3) 사건 A가 절대로 일어나지 않을 때, $\quad \mathrm{P}(A) = 0$

❷ 또 다음과 같은 덧셈정리가 성립한다.

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면, 즉 $A \cap B = \varnothing$이면

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

❸ 한편 임의의 사건 A와 그 여사건 A^c에 대해여 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$$

위의 기본 성질, 덧셈정리, 여사건의 확률에 대한 성질은 모두 통계적 확률 뿐 아니라 수학적 확률에서도 성립한다.

개념

수학적 확률 이외에 통계적 확률은 왜 필요한가요?

수학적 확률은 어떤 시행에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같다는 가정 하에 정의되는 확률이다. 그러나 우리 주변의 여러 가지 현상 중에는 각 근원사건이 일어날 가능성이 같지 않거나 같다고 보기 어려운 시행도 많이 있다. 예를 들어 윷놀이에서 윷짝을 던질 때, 평평한 안쪽 면과 둥근 바깥쪽 면이 나올 가능성은 같지 않다. 주사위를 던지는 시행 역시 그 주사위가 불량품일 경우 여섯 개의 면이 나올 가능성이 같지 않을 수도 있다. 이와 같은 경우에는 많은 자료를 수집하여 조사하거나 같은 시행을 여러 번 반복 하여 얻어지는 상대도수의 값 즉, 통계적 확률을 통해 그 사건이 일어날 확률을 구할 수 있다.

의미

통계적 확률이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

통계적 확률(統計的確率)에서 통(統)은 '하나로 모으다', '총괄하다', 계(計)는 '세다', '계산하다'를 뜻하고, 이들을 결합한 통계(統計)는 자료를 모아 계산하고 분석하는 것을 의미한다. 또 확(確)은 '확실하다', '틀림없다, 률(率)은 '비율', '비'를 뜻하며, 이들을 결합한 확률(確率)은 확실한 정도나 비율 즉, 어떤 사건이 일어날 가능성인 확률을 의미한다. 그리고 적(的)은 ' 에 관한', ' 의 성질을 가진'을 뜻하는 접미사이다. 따라서 통계적 확률(統計的確率)은 실험이나 관찰을 통해 자료를 모아 계산하고 분석하는 방식 즉, 통계적(統計的) 관찰이나 실험의 결과로 얻어진 확률(確率)을 의미한다. 이런 점에서 통계적 확률을 실험적 확률 또는 경험적 확률이라 부르기도 한다.

統 計 的 確 率

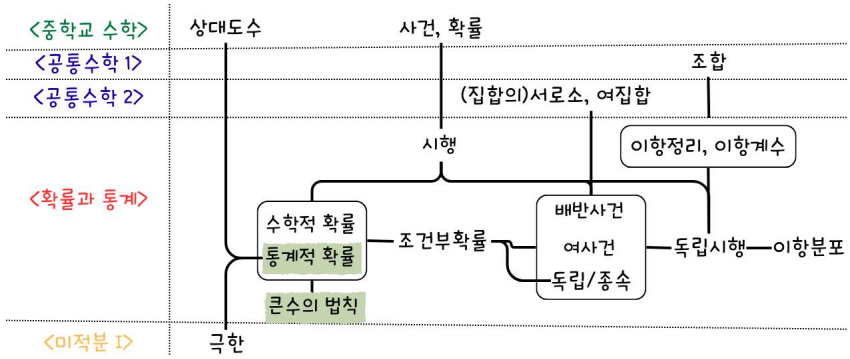
거느릴 통 셀 계 과녁 적 굳을 확 비율 률/율

통계적 확률을 영어로는 statistical probability라고 한다. statistical은 '통계적'을 뜻하고 probability은 '확률'을 뜻하므로, statistical probability는 글자 그대로 통계적 확률을 의미한다.

개념

통계적 확률과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

통계적 확률은 시행, 배반사건, 여사건, 수학적 확률, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



사건이 일어나는 상대도수의 극한으로 정의되는 **통계적 확률**은 수학적 확률과 달리 시행의 결과로 나타나는 각 근원사건이 일어날 가능성이 같지 않거나 같다고 보기 어려운 경우에도 적용 가능하다는 점에서 실생활 상황에서 종종 활용된다. 그러나 통계적 확률과 수학적 확률 둘 다 확률의 기본성질, 덧셈정리, 여사건의 확률에 대한 성질 등을 만족한다. 이에 따라 두 사건 A, B가 서로 배반사건일 때, 사건 $A \cup B$가 일어날 통계적 확률과 수학적 확률은 둘 다 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$이고, 어떤 사건 A의 여사건 A^c의 통계적 확률과 수학적 확률은 둘 다 $1-\mathrm{P}(A)$이다.

● **수학적 확률이나 통계적 확률 이외에 다른 확률도 있나요?**

수학적 확률은 표본공간의 각 원소가 일어날 가능성이 같다는 전제 하에 정의되지만, 실생활을 포함한 각종 사회현상이나 자연현상에서는 표본공간의 각 원소가 일아날 가능성이 같지 않거나 같다고 보기 어려운 경우가 많다. 이런 경우 '통계적 확률'을 종종 사용한다. 통계적 확률은 어떤 시행을 반복했을 때 시행 횟수에 대한 사건이 일어난 횟수의 비인 상대도수의 극한으로 정의된다. 그러나 상대도수의 극한을 구하려면 시행을 한없이 많이 해야하는데 이것은 불가능하므로 시행 횟수가 충분히 클 때의 상대도수의 값을 통계적 확률로 사용한다. 그런데 시행 횟수가 얼마나 커야 하는지는 명료하게 정해진 바가 없다.

수학적 확률과 통계적 확률을 더 일반화하고 추상화하여 확률을 다음과 같이 정의할 수도 있다.

어느 시행에서 표본공간이 $S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 이고, S의 각 원소가 나올 확률을

$$\mathrm{P}(\{x_i\})=p_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

이라 할 때, 확률 p_i가

(i) $0 \le p_i \le 1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

을 만족하면, 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는 A 각 원소가 나올 확률의 합이다.

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{x_i \in A} \mathrm{P}(\{x_i\})$$

예를 들어, 병뚜껑을 던지는 경우 안쪽 면이 나올 확률을 $\frac{3}{5}$, 바깥쪽 면이 나올 확률을 $\frac{2}{5}$라고 하면, 이것은 위의 정의를 만족한다.

이로부터 확립된 확률이 러시아의 수학자 콜모고로프(Kolmogorov, A. N.; 1903–1987)가 확립한 확률의 공리적 정의 즉, '공리적 확률'이다.

공리적 확률

사건 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 함수 P가 다음 세 조건 즉, 공리를 만족할 때, 이 함수 P를 확률이라 한다.

(i) $\mathrm{P}(A) \ge 0$

(ii) $\mathrm{P}(S)=1$

(iii) $A \cap B = \emptyset$이면, $\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

조건부확률條件附確率; conditional probability

정의

조건부확률이란 무엇인가요?

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률**이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

와 같이 나타낸다.

사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 다음과 같이 구한다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

그리고

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

이므로, 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

1 당첨 제비가 2개 들어 있는 4개의 제비 중에서 갑이 먼저 1개를 뽑고, 남은 3개 중에서 을이 1개를 뽑는다고 하자. 갑이 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 을이 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

이다. 따라서 갑이 당첨 제비를 뽑았을 때 을이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

이다.

❷ 한 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수가 3 이하인 사건을 A, 짝수인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

이다. 따라서 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈이 3 이하일 때, 그것이 짝수일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

이다.

개념

조건부확률에는 어떤 성질이 있나요?

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)},$$

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

이것을 확률의 곱셈정리라고 한다.

확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

의미 조건부확률이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

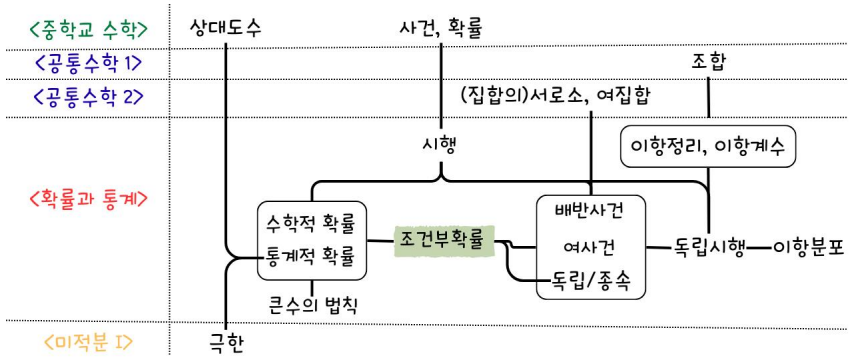
조건부확률(條件附確率)에서 조(條)는 '가지', '항목', 건(件)은 '조건', '사항'를 뜻하고, 이들을 결합한 조건(條件)은 어떤 일이 성립하기 위한 제한된 상황이나 전제 즉, 말 그대로 조건을 의미한다. 여기에 부(附)는 '붙다', '덧붙이다', '관련되다'를 뜻하므로 조건부(條件附)는 '조건이 붙은'이라는 의미를 지닌다. 한편 확(確)은 '확실하다', '틀림없다, 률(率)은 '비율', '비'를 뜻하며, 이들을 결합한 확률(確率)은 확실한 정도나 비율 즉, 어떤 사건이 일어날 가능성인 확률을 의미한다. 따라서 조건부확률(條件附確率)은 조건(條件)이 붙은(附) 확률(確率) 즉, 어떤 사건이 일어났을 때라고 하는 조건이 주어졌을 때의 확률을 의미한다.

條	件	附	確	率
가지 조	물건 건	붙을 부	굳을 확	비율 률/율

조건부확률을 영어로는 conditional probability라고 한다. conditional은 '조건이 있는'을 뜻하고 probability은 '확률'을 뜻하므로, conditional probability는 글자 그대로 조건이 주어진 확률을 의미한다.

개념 조건부확률과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

조건부확률은 시행, 배반사건, 여사건, 수학적 확률, 통계적 확률, 종속, 독립, 독립시행 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률**은 어떤 시행에서 사건 A가 일어났다는 전제 하에 사건 B가 일어날 확률이다. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 0이고, 사건 B가 일어났을 때 사건 A의 조건부확률 역시 0이다. 조건부확률은 어떤 시행에서 조건에 따라 표본공간이 달라지는 경우 사건이 일어날 확률이 달라질 수 있음을 보여주는 개념이다. 사건 A가 일어났다는 조건이 있든 없든 사건 B가 일어날 확률이 동일할 때 즉, 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$와 사건 A의 여사건이 일어났을 때 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A^c)$가 같을 때 두 사건은 서로 독립이라 하고, 독립이 아닐 경우 두 사건은 서로 종속이라 한다. 이때 적용되는 확률은 표본공간의 원소의 개수에 대한 사건의 원소의 개수의 비로 정의되는 수학적 확률일 수도 있고, 사건이 일어나는 상대도수의 극한으로 정의되는 통계적 확률일 수도 있다. 수학적 확률과 통계적 확률 둘 다 확률의 기본성질, 확률의 덧셈정리, 여사건의 확률에 대한 성질 등을 모두 만족한다. 한편 어떤 시행이 매회 같은 조건에서 반복되는 경우 각 회의 시행이 그 이전의 시행의 결과에 영향을 받지 않을 때 이런 시행을 독립시행이라 한다.

독립獨立; independent , 종속從屬, dependent

정의

두 사건이 서로 독립과 종속이라는 건 무슨 뜻인가요?

두 사건 A, B에 대하여 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B|A^c) = \mathrm{P}(B),$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B^c) = \mathrm{P}(A)$$

일 때 두 사건 A, B는 서로 **독립** 또는 독립사건이라 한다.

또 두 사건 A, B가 서로 독립이 아닐 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A) \neq \mathrm{P}(B) \quad \text{또는} \quad \mathrm{P}(A|B) \neq \mathrm{P}(A)$$

일 때 두 사건 A, B는 서로 **종속** 또는 종속사건이라 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 처음 던졌을 때 짝수의 나오는 사건을 A, 두 번째 던졌을 때 1 또는 2의 눈이 나오는 사건을 B라 하면, 두 사건은 서로 영향을 미치지 않으므로 서로 독립이다. 실제로 $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$이고

$$\mathrm{P}(B) = \frac{2}{6} = \mathrm{P}(B|A)$$

이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

❷ 크기와 모양이 같은 흰 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 공을 한 개 꺼내 색을 확인한 뒤 다시 집어 넣는다. 그 뒤 공을 다시 한 개 꺼낼 때, 처음에 꺼낸 공과 두 번째 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률은 얼마일까?

(풀이) 처음에 흰 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 흰 공이 나오는 사건을 B라 하면, 두

사건은 서로 영향을 미치지 않으므로 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}$$

이다. 따라서 두 공이 모두 흰 공일 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$는

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

이다.

개념

독립인지 종속인지를 판별하는 다른 방법은 없나요?

두 사건 A, B가 서로 독립인지 종속인지 판단하는 방법으로 다음 정리가 있다.

독립사건의 곱셈정리

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 확률의 곱셈정리에 의해 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

역으로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$

이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$가 성립한다. 따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

그러므로 세 확률 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이면 두 사건 A, B는 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이면 두 사건 A, B는 서로 종속임을 판단할 수 있다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 나오는 사건을 A, 1 또는 2의 눈이 나오는 사건을 B라고 하자.

$A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,2\}$, $A\cap B=\{2\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{6},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

이다. 그런데

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}=\mathrm{P}(A\cap B)$$

이 성립한다. 따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

❷ 크기와 모양이 같은 흰 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 공을 한 개 꺼내 색을 확인한 뒤 다시 집어 넣는다. 그 뒤 공을 다시 한 개 꺼낼 때, 처음에 꺼낸 공과 두 번째 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률은 얼마일까?

풀이 처음에 흰 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 흰 공이 나오는 사건을 B라 하면, 두 사건은 서로 영향을 미치지 않으므로 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$$

이다. 따라서 두 공이 모두 흰 공일 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$는

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

이다.



처음 꺼낸 공을 다시 집어 넣지 않으면 결과가 달라지나요?

만약 처음 꺼낸 공을 다시 집어 넣지 않으면, 처음에 흰 공이 나오는 사건 A가 두 번째에 흰 공이 나오는 사건 B에 영향을 미치므로 두 사건은 서로 종속이다. 이 경우

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5},\quad \mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{4}$$

이므로, 두 공이 모두 흰 공일 확률 $\mathrm{P}(A \cap B)$는

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

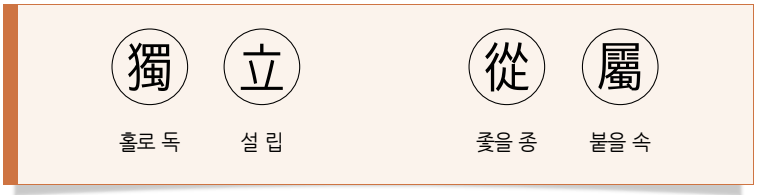
이다. 따라서 처음 꺼낸 공을 다시 집어 넣지 않을 경우 결과가 달라짐을 알 수 있다.

의미

독립과 종속이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

독립(獨立)에서 독(獨)은 '혼자', '다른 것에 의존하지 않음'을 뜻하고, 립立)은 '서다', '성립하다'를 뜻하므로, 이들을 결합한 독립(獨立)은 다른 것에 의존하지 않고 독자적으로 성립한다는 의미를 지닌다. 이런 의미에서 두 사건이 서로 독립사건이라는 것 역시 두 사건이 서로 영향을 미치지 않고 독자적으로 성립하는 사건이라는 의미를 갖는다.

한편 종속(從屬)에서 종(從)은 '따라가다', '의존하다'을 뜻하고, 속(屬)은 '속하다', '관계 맺다'를 뜻하므로, 이들을 결합한 종속(從屬)은 다른 것에 의존하거나 다른 것과 관계를 맺고 있어 영향을 받는다는 의미를 지닌다. 이런 의미에서 두 사건이 서로 종속사건이라는 것 역시 두 사건이 서로의 발생 가능성에 영향을 미치는 사건이라는 의미를 갖는다.

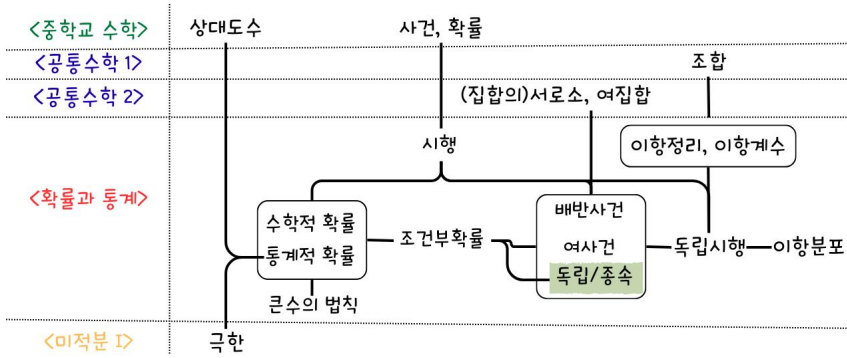


독립과 종속을 영어로는 independent와 dependent라고 한다. independent는 '독립적인'을 뜻하고 dependent는 independent와 서로 반대말로 '독립적이지 않은', '종속적인'을 뜻한다. 그러므로 independent events와 dependent events는 각각 말 그대로 서로 독립적인 사건과 서로 종속적인 사건을 뜻한다.

개념

독립과 종속과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

독립, 종속은 시행, 배반사건, 여사건, 수학적 확률, 통계적 확률, 조건부확률, 독립시행 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



어떤 **시행**에서 두 사건이 서로 **독립**이라는 것은 서로 영향을 미치지 않는다는 것을 의미하고, **종속**이라는 것은 서로 영향을 미친다는 것을 의미한다. 즉, 사건 A가 일어났다는 조건이 있든 없든 사건 B가 일어날 확률이 동일할 때, 다시 말해서 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률** $\mathrm{P}(B|A)$와 사건 A의 **여사건**이 일어났을 때 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A^c)$가 같을 때 두 사건 A, 는 서로 독립이고, 독립이 아닐 경우 두 사건은 서로 종속이다. 이때 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 사건 A가 일어났다는 전제하에 사건 B가 일어날 확률을 의미한다. 두 사건 A, B가 서로 **배반사건**이면 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 0이고, 사건 B가 일어났을 때 사건 A의 조건부확률 역시 0이다. 이때 적용되는 확률은 표본공간의 원소의 개수에 대한 사건의 원소의 개수의 비로 정의되는 **수학적 확률**일 수도 있고, 사건이 일어나는 상대도수의 극한으로 정의되는 **통계적 확률**일 수도 있다. 수학적 확률과 통계적 확률 둘 다 확률의 기본성질, 확률의 덧셈정리, 여사건의 확률에 대한 성질 등을 모두 만족한다. 한편 어떤 시행이 매회 같은 조건에서 반복되는 경우 각 회의 시행이 그 이전의 시행의 결과에 영향을 받지 않을 때 이런 시행을 **독립시행**이라 한다.

심화(참고)

- **독립사건과 배반사건의 차이점은 무엇이고 둘 사이에는 어떤 관계가 있나요?**

  두 사건이 서로 독립사건 또는 독립이라는 것은 두 사건이 서로의 일어날 가능성 즉, 확률에 영향을 미치지 않는 사건으로서

$$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B|A^c) = \mathrm{P}(B),$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B^c) = \mathrm{P}(A),$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

임을 뜻하고,

두 사건이 서로 배반사건 또는 배반이라고 하는 것은 두 사건이 동시에 일어나지 않는다는 것 즉,

$$A \cap B = \varnothing,$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = 0$$

을 뜻한다.

두 사건 A, B가 모두 공집합이 아닌 사건인 경우, 이들 두 사건이 서로 배반사건이면 두 사건은 결코 서로 독립이 될 수 없다. 그 이유는 다음과 같다.

만약 공집합이 아닌 두 사건 A, B가 서로 배반사건이라면, 즉 $A \cap B = \varnothing$이면

$$\mathrm{P}(A) > 0, \quad \mathrm{P}(B) > 0, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = 0$$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = 0$$

이 된다. 따라서

$$\mathrm{P}(B|A) \neq \mathrm{P}(B)$$

이 되어 두 사건 A, B는 서로 독립이 될 수 없다.

독립시행獨立試行; independent trial

정의

독립시행이란 무엇인가요?

한 개의 동전이나 주사위를 여러 번 던지는 것처럼 매번 같은 조건에서 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 영향을 주지 않는 시행을 **독립시행**이라 한다.

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p, 그 여사건이 일어날 확률을 q라 할 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은

$$ {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r} \quad (r=0,1,2,\cdots,n) $$

이다.

여기서 ${}_n\mathrm{C}_r$는 $(p+q)^n$의 전개식에서 $p^r q^{n-r}$ 항의 이항계수이고, $q=1-p$이다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 한 개의 동전을 10번 던지는 독립시행에서 앞면이 3번 나오는 경우의 수는

$$ {}_{10}\mathrm{C}_3 $$

이고, 이때 각 경우의 확률은 모두

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 $$

이다. 따라서 한 개의 동전을 10번 던지는 독립시행에서 앞면이 3번 나올 확률은

$$ {}_{10}\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{2^{10}} = \frac{15}{128} $$

이다.

❷ 한 개의 주사위를 4번 던지는 독립시행에서 1의 눈이 2번 나오는 경우의 수는

$$ {}_4\mathrm{C}_2 $$

이고, 이때 각 경우의 확률은 모두

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

이다. 따라서 한 개의 주사위를 4번 던지는 독립시행에서 1의 눈이 2번 나올 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$$

이다.

의미

독립시행이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

독립시행(獨立試行)에서 독(獨)은 '혼자', '다른 것에 의존하지 않음'을 뜻하고, 립(立)은 '서다', '성립하다'를 뜻하므로, 이들을 결합한 독립(獨立)은 다른 것에 의존하지 않고 독자적으로 성립한다는 의미를 지닌다. 또 시(試)는 '시험하다' 또는 '시도하다'를 뜻하고, 행(行)은 '행하다', '실행하다'는 뜻을 가지므로, 이들을 결합한 시행(試行)은 수학에서 우연에 의해 결과가 결정되는 실험이나 관찰을 행한다는 것을 의미하는데, 일상에서는 어떤 일을 시(試)험삼아서 행(行)하여 본다는 것을 의미한다. 결국 독립시행(獨立試行)은 서로 영향을 미치지 않고 독립(獨立)적으로 반복되는 시행(試行)을 의미한다.

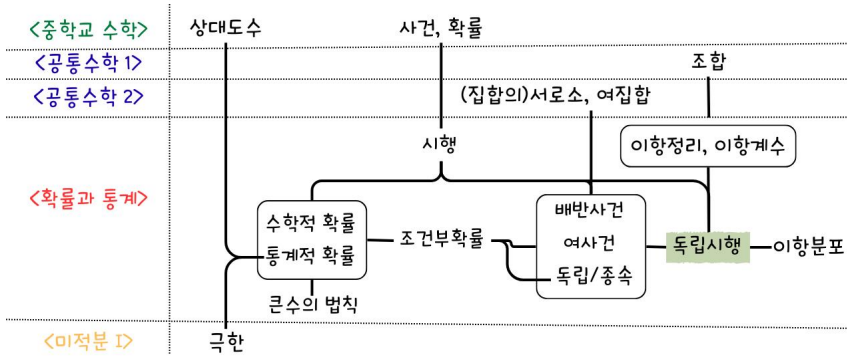


독립시행을 영어로는 independent trial이라고 한다. independent는 '독립적인'을 뜻하고 trial에는 '시도', '시행'이라는 뜻이 있다. 그러므로 independent trial은 글자 그대로 독립적인 시행을 뜻한다.

개념

독립시행과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

독립시행은 이항정리, 이항계수, 시행, 배반사건, 여사건, 수학적 확률, 통계적 확률, 조건부확률, 독립, 종속, 이항분포 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



독립시행은 한 시행이 매회 같은 조건에서 반복되는 경우 즉, 각 회의 시행이 그 이전의 시행의 결과에 영향을 받지 않을 때의 반복되는 시행을 말한다. 즉, 여러 번 반복되는 시행들이 서로 영향을 미치지 않을 때 반복되는 시행들을 일컫는 용어가 바로 독립시행인 것이다. 독립시행에서 각 시행의 결과는 서로 배타적인 배반사건으로 한 사건이 일어나는 경우와 일어나지 않는 경우 즉, 그 여사건인 경우로 구분된다. 이때, 어떤 사건이 일어날 확률을 p라고 하면 일어나지 않을 확률은 $1-p$이다. 한 시행이 n번 반복되는 독립시행에서 일어날 확률이 p인 사건 A가 r번 일어나는 경우의 수와 확률은 이항정리에 의해 각각 이항계수 ${}_n\mathrm{C}_r$과 ${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$이 되고, 이 확률은 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따르는 확률변수의 각 값 즉, 변수에 대한 함숫값 즉, 확률값이기도 하다. 한편 어떤 한 시행에서 두 사건이 서로 영향을 미치지 않을 때 이들 두 사건은 서로 독립이라 하고, 독립이 아닐 경우 종속이라 는 것은 서로 영향을 미친다는 것을 의미한다. 그리고 사건 A가 일어났다는 조건이 있든 없든 사건 B가 일어날 확률이 동일할 때, 다시 말해서 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$와 사건 A의 여사건이 일어났을 때 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A^c)$가 같을 때 두 사건 A, 는 서로 독립이고, 독립이 아닐 경우 두 사건은 서로 종속이다. 그리고 이때 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 사건 A가 일어났다는 전제 하에 사건 B가 일어날 확률을 의미한다. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 0이고, 사건 B가 일어났을 때 사건 A의 조건부확률 역시 0이다. 이때 적용되는 확률은 표본공간의 원소의 개수에 대한 사건의 원소의 개수의 비로 정의되는 수학적 확률일 수도 있고, 사건이 일어나는 상대도수의

극한으로 정의되는 **통계적 확률**일 수도 있다. 수학적 확률과 통계적 확률 둘 다 확률의 기본성질, 확률의 덧셈정리, 여사건의 확률에 대한 성질 등을 모두 만족한다.

확률변수確率變數; random variable ,
이산확률변수離散確率變數; discrete random variable ,
확률분포確率分布; probability distribution

정의

확률변수, 이산확률변수, 확률분포가 무엇인가요?

어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 수를 대응시키는 함수를 **확률변수**라고 한다. 확률변수는 보통 대문자 X, Y, Z 등으로 나타내고, 확률변수가 가지는 값은 소문자 x, y, z 등으로 나타낸다.

확률변수 X가 가지는 값들을 셀 수 있을 때, 이 확률변수 X를 **이산확률변수**라고 한다. 또, X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호

$$\mathrm{P}(X=x)$$

와 같이 나타낸다.

이산확률변수 X가 $x_i (i=1,2,\dots,n)$을 가질 확률을 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$라고 할 때, $x_1, x_2, \dots, x_n$과 확률 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 사이의 대응 관계를 확률변수 X의 **확률분포**라 하고, $\mathrm{P}(X=x_i)\ (i=1,2,\dots,n)$을 이산확률변수 X의 **확률질량함수**라고 한다.

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 동전 2개를 던지는 시행에서 표본공간은 4개의 원소 (앞면, 앞면), (앞면, 뒷면), (뒷면, 앞면), (뒷면, 뒷면)를 갖는다.

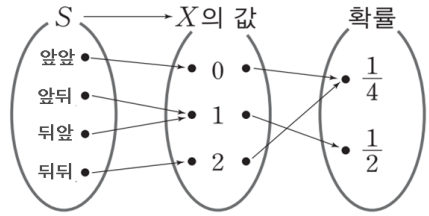
표본공간의 각 원소에 앞면의 개수 0, 1, 2 중 하나를 대응시키는 확률변수를 X라 하면 X는 이산확률변수이고, X(앞면, 앞면) $=2$, X(앞면, 뒷면) $=1$, X(뒷면, 앞면) $=1$,

X(뒷면, 뒷면) = 0이 된다.

그러므로 이산확률변수 X가 0, 1, 2를 가질 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$$

이다.



따라서 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

2 주사위 2개를 던지는 시행에서 표본공간은 36개의 순서쌍 (1,1), (1,2), ⋯, (6, 5), (6, 6)을 원소로 갖는다.

표본공간의 각 원소에 순서쌍의 두 성분의 차를 대응시키는 확률변수를 X라 하면 X는 이산확률변수이고, 그 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이다.

그러므로 이산확률변수 X가 0, 1, 2, 3, 4, 5를 가질 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{6}{36},\quad \mathrm{P}(X=1)=\frac{10}{36},\quad \mathrm{P}(X=2)=\frac{8}{36},$$
$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{6}{36},\quad \mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{36},\quad \mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{36}$$

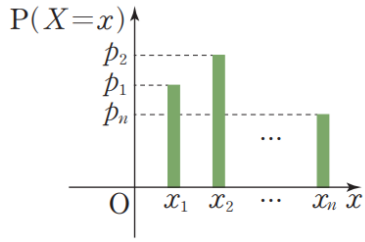
이다. 따라서 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

개념

이산확률변수의 확률분포를 시각적으로 나타낼 수도 있나요?

이산확률변수의 확률분포를 X의 각 값 x_i에 그 확률 p_i를 대응키는 표로 나타낼 수 있었다. 이 표는 순서쌍 $(x_1,\ p_1)$, $(x_2,\ p_2)$, $\cdots$, $(x_n,\ p_n)$으로 나타낼 수 있고, 이들 순서쌍은 다시 좌표평면의 점이나 선분(막대)으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.



개념

이산확률변수와 확률분포는 어떤 성질을 가지고 있나요?

확률분포표에서 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$는 $X=x_i$인 사건에 대한 확률이므로 확률의 기본 성질에 의해 다음 성질을 만족한다.

이산확률변수와 확률분포의 성질

$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$일 때,

(1) $0\le p_i\le 1$ (2) $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$

의미

확률변수, 이산확률변수, 확률분포라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

확률변수 확률변수(確率變數)에서 확(確)은 '확실하다', '틀림없다, 률(率)은 '비율', '비'를 뜻하며, 이들을 결합한 확률(確率)은 확실한 정도나 비율 즉, 어떤 사건이 일어날 가능성인 확률을 의미한다. 한편 변(變)은 '변하다', '달라지다, 수(數)는 '수', '숫자'를 뜻하며, 이들을 결합한 변수(變數)는 변하거나 달라지는 수를 의미한다. 결국 확률변수(確率變數)는 변수(變數)가 택하는 각각의 값에 확률(確率)을 대응시킨다는 의미를 지닌다.

確	率	變	數
굳을 확	비율 률/율	변할 변	셈(수) 수

확률변수를 영어로는 random variable이라고 한다. random에는 '임의의', '무작위의'라는 뜻이 있고 variable은 '변수'를 뜻한다. 그러므로 random variable은 어떤 시행에서 무작위로(random) 나타나는 표본공간의 각 원소에 대응시킨 수를 변수(variable)로 취급하여 각 변수의 값에 확률을 대응시키는 상황을 설명하기 위해 도입된 용어라 할 수 있다.

이산확률변수 이산확률변수(**離散確率變數**)에서 이(**離**)는 '떨어지다', '분리되다'를 뜻하고, 산(**散**)은 '흩어져 있다'를 뜻하므로 이들을 결합한 이산(**離散**)은 연속적이지 않고 분리되어(**離**) 흩어져 있음(**散**)을 의미한다. 그러므로 이산확률변수(**離散確率變數**)는 연속적이지 않은 이산(**離散**)적인 값들을 갖는 확률변수(**確率變數**)를 의미한다.



이산확률변수를 영어로는 discrete random variable이라고 한다. discrete에는 '분리된', '구분되는'이라는 뜻이 있고, random variable은 확률변수를 뜻한다. 그러므로 discrete random variable은 연속적이지 않고 따로 따로 분리되어 떨어져 있는 값을 갖는 확률변수를 의미한다.

확률분포 확률분포(**確率分布**)에서 확(**確**)은 '확실하다', '틀림없다, 률(**率**)은 '비율', '비'를 뜻하며, 이들을 결합한 확률(**確率**)은 확실한 정도나 비율 즉, 어떤 사건이 일어날 가능성인 확률을 의미한다. 한편 분(**分**)은 '나누다'를 뜻하고, 포(**布**)는 '펼치다', '퍼뜨리다'를 뜻하며, 이들을 결합한 분포(**分布**)는 어떤 것이 나누어져 퍼져있는 상태를 의미한다. 결국 확률분포(**確率分布**)는 확률변수의 각 값에 대응되는 확률(**確率**)이 전체적으로 어떻게 분포(**分布**)되어 있는가를 나타내는 것을 의미한다.

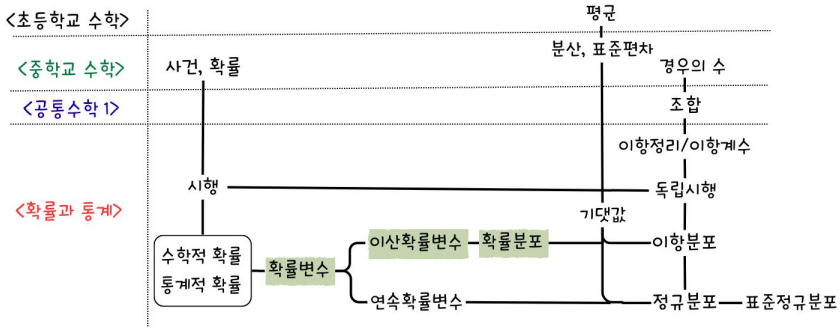


확률분포를 영어로는 probability distribution이라고 한다. probability는 '확률'을 뜻하고, distribution은 '분포'를 뜻한다. 그러므로 probability distribution은 글자 그대로 확률분포로 번역된다.

개념

확률변수, 이산확률변수, 확률분포와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

확률변수는 통계의 가장 기초가 되는 개념이자 용어로서 통계에서 다루는 거의 모든 용어 및 개념과 관련이 있고, 특히 이산확률변수와 확률분포는 기댓값(평균), 분산과 표준편차, 이항분포와 직접적으로 밀접한 관련이 있다.



확률변수는 크게 **이산확률변수**와 연속확률변수로 구분할 수 있다. 이산확률변수 X의 **확률분포**가 주어지면, X의 값과 그 확률의 곱의 총합으로 이산확률변수 X의 기댓값(평균)을 찾을 수 있고, 분산과 표준편차 역시 구할 수 있다. 확률분포 중 독립시행의 사건이 일어나는 횟수를 확률변수로 하는 확률분포를 이항분포라고 한다. 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수의 평균과 분산은 각각 np와 $np(1-p)$이다.

심화(참고)

- **확률변수는 변수인가요? 아니면 함수인가요?**

  확률변수 X는 어떤 시행의 표본공간 S의 각 원소에 하나의 수 x를 대응시키는 함수

  $$X : S \to \{0, 1, 2, \cdots\}$$

  이다. 그런데 확률분포를 다루려면 확률변수의 각 값 즉, 함수 X의 각 함숫값 x에 그 값의 확률을 대응시키는 확률질량함수 $\mathrm{P}(X = x)$를 생각해야 한다. 이때 확률변수의 각 값 x는 확률질량함수 $\mathrm{P}(X = x)$의 정의역의 원소로서 (독립)변수이다. 이런 점에서 함수의 일종인 X를 확률변수라고

부른다. 정리하자면, 확률변수 자체는 변수가 아니라 함수이다. 그리고 이 함수의 함숫값 즉, 확률변수의 각 값이 확률질량함수의 (독립)변수이다.

연속확률변수連續確率變數; continuous random variable

정의

연속확률변수가 무엇인가요?

확률변수 X가 어떤 범위에 속한 모든 실숫값을 가질 때, 그 확률변수 X를 **연속확률변수**라고 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 시간, 온도, 키, 몸무게 등은 어떤 범위에 속하는 임의의 실숫값을 연속적으로 가지므로 이들은 모두 연속확률변수이다.

❷ 예를 들어 어느 전철역에 10분 간격으로 도착하는 전철을 타려고 할 때 전철역에 도착해서 전철을 기다리는 시간을 확률변수 X라 하면, X가 가질 수 있는 값의 범위는 $0 \le X \le 10$이고, X는 0 이상 10 이하의 모든 실숫값을 가지므로 연속확률변수이다.

개념

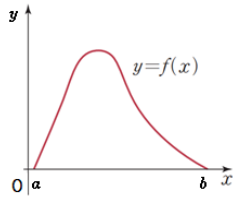
연속확률변수의 확률분포는 어떻게 나타낼 수 있나요?

연속확률변수 X가 구간 $[a, b]$의 임의의 실수 x를 값으로 가지고, 이 범위에서 함수 $y = f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족하면 $y = f(x)$를 연속확률변수 X의 **확률밀도함수**라고 한다. 이산확률변수의 확률분포를 확률질량함수와 표로 나타내었다면, 연속확률변수의 확률분포는 확률밀도함수와 그 그래프로 나타난다.

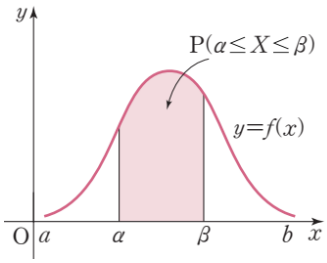
확률밀도함수와 연속확률변수의 확률분포

(i) 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이다.

(ii) 곡선 $y = f(x)$, x축, 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다.



이때 연속확률변수 X가 α 이상 β 이하의 값을 가질 확률 $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)$는 좌표평면에서 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = \alpha$, $x = \beta$로 둘러싸인 부분의 넓이이다.





구체적인 예를 들어 설명해주세요.

확률변수 X가 구간 $[0,\ 2]$의 모든 실숫값 x를 갖는다고 할 때, 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}x \quad (0\le x\le 2)$$

는 두 조건

(i) 구간 $[0,\ 2]$의 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$,

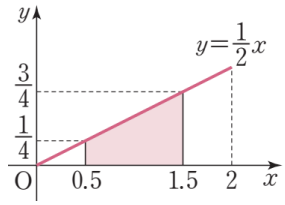
(ii) $y=\frac{1}{2}x$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$

을 만족하므로 X의 확률밀도함수이다.

이때, X가 0.5 이상 1.5 이하의 값을 가질 확률

$$\mathrm{P}\,(0.5\le X\le 1.5)$$

는 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0.5$, $x=1.5$로 둘러싸인 부분의 넓이이다.



따라서

$$\mathrm{P}(0.5\le X\le 1.5)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) \times 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

이다.

의미

연속확률변수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

연속확률변수(連續確率變數)에서 연(連)은 '이어지다', '연결되다를 뜻하고, 속(續)은 '계속되다', '끊이지 않다'를 뜻하며, 이들을 결합한 연속(連續)은 끊어지지 않고 계속 이어짐을 의미한다. 또 확(確)은 '확실하다', '틀림없다, 률(率)은 '비율', '비'를 뜻하며, 이들을 결합한 확률(確率)은 확실한 정도나 비율 즉, 어떤 사건이 일어날 가능성인 확률을 의미한다. 한편 변(變)은 '변하다', '달라지다, 수(數)는 '수', '숫자'를 뜻하며, 이들을 결합한 변수(變數)는 변하거나 달라지는 수를 의미한다. 결국 확률변수(確率變數)는 변수(變數)가 택하는 각각의 값에 확률(確率)을 대응시킨다는 의미를 지니고, 연속확률변수(連續確率變數)는 연속된 값을 갖는 확률변수 즉, 연속(連續)된 구간에서 그 구간의 모든 실수 값을 가지는 확률변수(確率變數)를 의미한다.

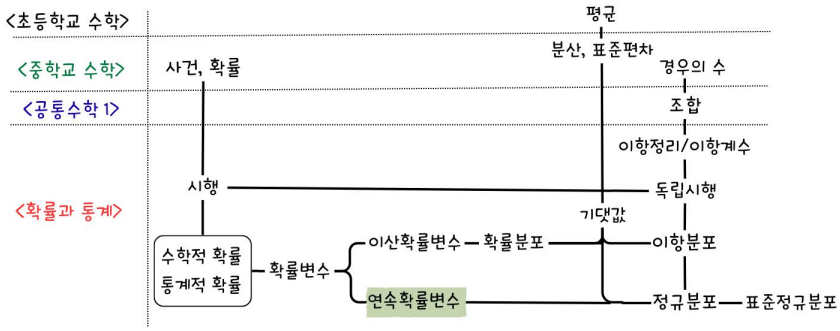
連	續	確	率	變	數
잇닿을 연	이을 속	굳을 확	비율 률/율	변할 변	셈(수) 수

연속확률변수를 영어로는 continuous random variable이라고 한다. continuous에는 '연속된'이라는 뜻이 있고, random variable은 '확률변수'를 뜻한다. 그러므로 continuous random variable은 연속된 확률변수 즉, 연속된 구간에서 그 구간의 모든 실수 값을 가지는 확률변수를 의미한다.

개념

연속확률변수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

연속확률변수는 확률변수, 이산확률변수, 이항분포, 정규분포, 표준정규분포 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.

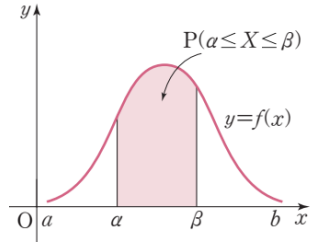


확률변수는 크게 **이산확률변수**와 **연속확률변수**로 구분할 수 있다. 이산확률변수와는 달리 연속확률변수는 어떤 범위의 임의의 실수 값을 가지는 확률변수이다. 연속확률변수의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 일 때 이 확률변수는 **정규분포** $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다고 한다. 독립시행에서 사건이 일어나는 횟수를 확률변수로 하는 확률분포를 **이항분포**라고 하는데, 평균과 분산이 각각 np와 $np(1-p)$인 이항분포를 $\mathrm{B}(n,p)$와 같이 나타낸다. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다. 이 정규분포를 따르는 연속확률변수 X의 평균과 분산은 각각 m과 σ^2이다. 정규분포 중 특히 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 한다. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준화하여 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꿀 수 있다.

심화(참고)

- **연속확률변수와 확률밀도함수의 성질을 적분의 언어로 나타내면?**

  연속확률변수가 어떤 범위의 값들을 가질 확률은 그 구간에서 확률밀도함수의 그래프와 x축 사이의 넓이가 됨을 살펴보았다.



  이처럼 좌표평면에서 곡선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 적분으로 나타내고 설명할 수 있다.

연속확률변수의 확률밀도함수와 확률분포

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ $(a \le x \le b)$는 아래 성질을 만족한다.

(i) 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$

(iii) $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \quad (a \le \alpha \le \beta \le b)$

그리고 연속확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

연속확률변수의 평균, 분산, 표준편차

(i) 평균 $\quad \mathrm{E}(X) = m = \displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx$

(ii) 분산 $\quad \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big((X-m)^2\big) = \displaystyle\int_a^b (x-m)^2 f(x)\,dx$

(iii) 표준편차 $\quad \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

기댓값期待값; expectation value / expected value

정의

기댓값이 무엇인가요?

이산확률변수 X 의 확률분포가

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

와 같을 때, X 의 값과 그 확률의 곱의 총합

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

를 이산확률변수 X 의 **기댓값** 또는 평균이라 하고, 기호

$$\mathrm{E}(X)$$

로 나타낸다. 이때 $\mathrm{E}(X)$ 에서 E는 Expectation의 첫글자이다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 동전 2개를 던지질 때 나오는 앞면의 개수를 확률변수 X 라 하면, X 의 확률분포는

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

와 같고, X 의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$ 는

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

이다.

❷ 주사위 2개를 던져 나오는 두 눈의 수의 차를 확률변수 X 라 하면, X 의 확률분포는

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

와 같고, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= 0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}\\ &= \frac{70}{36}=\frac{35}{18}\end{aligned}$$

이다.



그럼 이산확률변수의 분산과 표준편차는 어떻게 구하나요?

이산확률변수 X의 평균을

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m$$

이라고 할 때, X의 분산 $\mathrm{V}(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$는 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= E\big((X-m)^2\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2\\ &= \mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2\end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

개념

기댓값(평균)에는 어떤 성질이 있나요?

확률변수 X와 상수 a, b에 대하여 $aX+b$의 기댓값 즉, 평균은

$$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$$

와 같다. 그 이유는 다음과 같다.

이유 이산확률변수 X의 확률분포가

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

일 때, $aX+b$의 확률분포는

Y	ax_1+b	ax_2+b	ax_3+b	$\cdots$	ax_n+b	합계
$\mathrm{P}(Y=y_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

와 같다. 따라서 확률변수 $aX+b$의 평균은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i \\ &= a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i + b\sum_{i=1}^{n}p_i \\ &= a\mathrm{E}(X)+b\end{aligned}$$

이다.



그럼 $aX+b$의 분산과 표준편차는 어떻게 되나요?

확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$, 표준편차 $\sigma(X)$와 상수 $a,\ b$에 대하여 $aX+b$의 분산 $\mathrm{V}(aX+b)$와 표준편차 $\sigma(aX+b)$는

$$\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

와 같다.

예를 들어, 확률변수 X의 평균이 m, 표준편차가 σ일 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$의 평균과 분산을 구하여 보면

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X) - \frac{m}{\sigma} = \frac{m}{\sigma} - \frac{m}{\sigma} = 0$$

$$\mathrm{V}(Z) = \mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X) = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2 = 1$$

이다. 이와 같이 평균이 0이고 표준편차가 1인 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 서로 다른 분포를 가지는 확률변수가 취하는 값들을 비교할 때 자주 사용된다.

의미 기댓값이라는 용어의 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

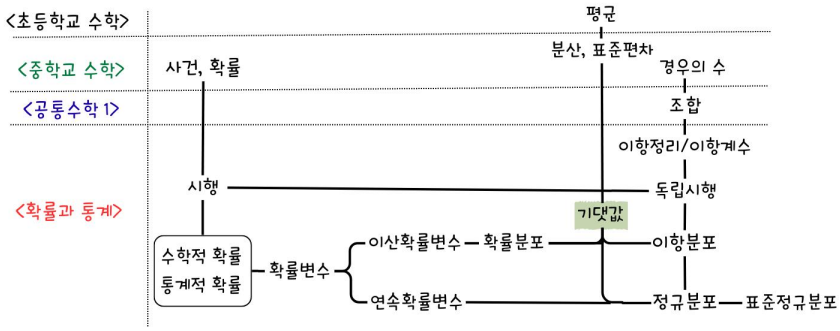
기댓(期待)값에서 기(期)는 '기약하다', '바라다'를 뜻하고, 대(待)에는 '기다리다'는 뜻이 있다. 이들을 결합하여 기댓(期待)값은 바라고 기대되는 값을 의미한다.

期	待	값
기약할 기	기다릴 대	

기댓값을 영어로는 expectation value 또는 expected value라고 한다. expectation/expected에는 '기대/기대되는'이라는 뜻이 있고 value는 '값'을 뜻한다. 그러므로 expectation value 또는 expected value는 글자그대로 기대/기대되는 값을 의미한다. 즉, 이산확률변수가 취할 수 있는 값이 평균적으로 얼마나 될지 기대한다는 의미에서 기댓값이라고 하는 것이다. 기댓값을 평균이라 하기도 한다.

개념 기댓값과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

기댓값 즉, 평균은 확률변수, 이산확률변수, 확률분포, 이항분포, 정규분포, 표준정규분포 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



이산확률변수 X의 **확률분포**가 주어졌을 때, X의 **기댓값** 즉, 평균은 X의 값과 그 확률의 곱의 총합으로 구할 수 있고, 분산과 표준편차 역시 구할 수 있다. 독립시행에서 사건이 일어나는 횟수를 **확률변수**로 하는 확률분포를 **이항분포**라고 하는데, 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 기댓값(평균)과 분산은 각각 $\mathrm{E}(X) = np$와 $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$

이다. 한편 이산확률변수와는 달리 어떤 범위의 임의의 실수 값을 가지는 확률변수를 **연속확률변수**라고 하는데, 연속확률변수의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 일 때 이 확률변수는 **정규분포** $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다고 한다. 이때 m은 X의 기댓값 즉, 평균이다. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 기댓값 즉, 평균이 np이고 분산이 $np(1-p)$인 정규분포 $\mathrm{N}(np,np(1-p))$를 따른다. 정규분포 중 특히 기댓값 즉, 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 한다. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준화하여 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꿀 수 있다. 즉, 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따르는 확률변수 X는 시행 횟수 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,np(1-p))$를 따르고, 이것은 다시 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 확률변수 Z로 표준화할 수 있다.

이항분포二項分布; binomial distribution

정의

이항분포가 무엇인가요?

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x) = {}_n\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (x=0,1,2,\ldots,n)$$

이다. 여기서 $q=1-p$라고 하면, X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n p^n$	1

위의 표에서 각각의 확률은 $(q+p)^n$을 이항정리를 이용하여 전개한 식

$$(q+p)^n = {}_n\mathrm{C}_0 q^n + {}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n p^n$$

의 우변의 각 항과 같다. 이와 같은 확률분포를 **이항분포**라 하고, 이를 기호로

$$\mathrm{B}(n,p)$$

로 나타낸다. 이때 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따른다고 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

한 개의 주사위를 3번 던지는 시행에서 1의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x) = {}_n\mathrm{C}_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} \quad (x=0,1,2,3)$$

이고, X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_3\mathrm{C}_0 \left(\frac{5}{6}\right)^3$	${}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$	${}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$	${}_3\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3$	1

이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\frac{1}{6}\right)$을 따른다.

개념

이항분포에는 어떤 성질이 있나요?

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, X의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

이항분포의 평균, 분산, 표준편차

❶ 평균 $\quad \mathrm{E}(X) = np$

❷ 분산 $\quad \mathrm{V}(X) = npq \quad (q = 1 - p)$

❸ 표준편차 $\quad \sigma(X) = \sqrt{npq} \quad (q = 1 - p)$

예를 들어 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(3, \frac{1}{6}\right)$을 따를 때, 평균 $\mathrm{E}(X)$, 분산 $\mathrm{V}(X)$, 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{V}(X) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

의미

이항분포라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

이항분포(二項分布)는 말 그대로 두 개의 항(二項)으로 이루어진 확률분포(分布) 즉, 두 가지 가능한 결과 즉, 성공 또는 실패가 나타나는 시행을 반복했을 때의 확률분포를 의미한다.

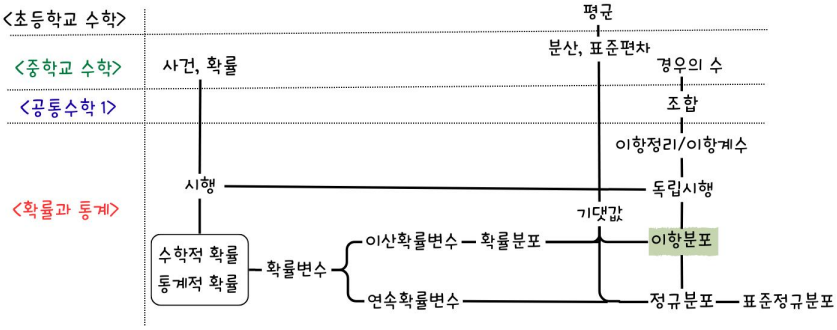
二	項	分	布
둘 이	항(마디) 항	나눌 분	펼 포

이항분포를 영어로는 binomial distribution이라고 한다. binomial에는 '두 개의 항 즉, 이항'이라는 뜻이 있고 distribution은 '분포'를 의미한다. 즉, binomial distribution 글자 그대로 이항분포로 번역된다.

개념

이항분포 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

이항분포는 독립시행, 확률변수, 이산확률변수, 연속확률변수, 확률분포, 기댓값, 정규분포, 표준정규분포 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



독립시행에서 사건이 일어나는 횟수를 **확률변수**로 하는 **확률분포**를 **이항분포**라고 한다. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, X의 **기댓값** 즉, 평균과 분산은 각각 np와 $np(1-p)$이다.

한편 **이산확률변수**와는 달리 어떤 범위의 임의의 실수 값을 가지는 확률변수를 **연속확률변수**라고 하는데, 연속확률변수의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 일 때 이 확률변수는 **정규분포** $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, np(1-p))$를 따른다. 정규분포 중 특히 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 한다. 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준화하여 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$따르는 확률변수 Z로 바꿀 수 있다. 즉, 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수 X는 시행 횟수 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, np(1-p))$를 따르고, 이것은 다시 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$를 따르는 확률변수 Z로 표준화할 수 있다.

정규분포正規分布; normal distribution

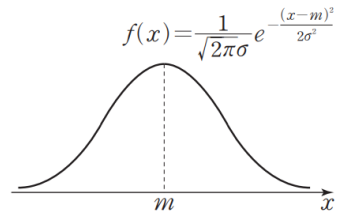
정의

정규분포란 무엇인가요?

모든 실숫값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, X의 확률분포를 **정규분포**라 하고, $f(x)$의 그래프를 정규분포곡선이라 한다.



여기서 e는 그 값이 2.718281…인 무리수이고, 상수 m과 σ $(\sigma>0)$는 각각 확률변수 X의 평균과 표준편차임이 알려져 있다.

이처럼 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로

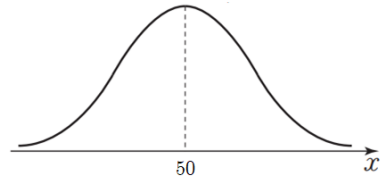
$$\mathrm{N}(m,\sigma^2)$$

과 같이 나타내고, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$를 따른다고 한다.

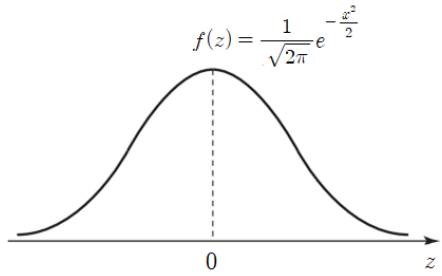
예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

❶ 정규분포 $\mathrm{N}(50,10^2)$을 따르는 확률변수 X의 평균은 50, 표준편차는 10이다.



❷ 정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 확률변수 Z의 평균은 0, 표준편차는 1이다.



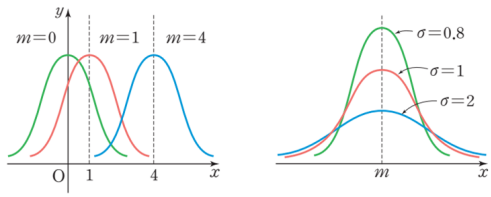
개념

정규분포에는 어떤 성질이 있나요?

강수량, 기온, 무게 등과 같이 자연 현상이나 사회 현상에서 나타나는 자료들의 분포는 정규분포곡선과 같이 종 모양의 곡선에 가까워지는 경우가 많다. 정규분포는 평균 m과 표준편차 σ에 의하여 정해지고, 정규분포를 따르는 확률밀도함수의 그래프 즉, 정규분포곡선은 다음과 같은 성질을 갖는다.

정규분포곡선의 성질

- 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고 $x=m$에서 최댓값을 가진다.
- 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
- m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커지면 곡선의 높이가 낮아져 옆으로 더 퍼지고, σ의 값이 작아지면 곡선의 높이가 올라가면서 더 뾰족해진다.
- σ의 값이 일정할 때, m의 값의 값에 따라 곡선의 위치가 좌우로 변하지만 모양은 변하지 않는다.



한편 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X는 평균이 0, 분산이 1인 정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꿀 수 있는데, 이를 정규분포의 표준화라고 부르기도 한다.

정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

실제로 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

$$Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

이라 하면, $\mathrm{E}(X) = m$, $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$이므로

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X-m) = \frac{1}{\sigma}(\mathrm{E}(X)-m) = 0$$

$$\mathrm{V}(Z) = \mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X) = 1$$

이다. 따라서 확률변수 Z는 평균이 0, 분산이 1인 정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

의미

정규분포라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

정규분포(正規分布)에서 정규(正規)는 표준적인 기준이나 규정에 맞는 정상적인 상태를 의미하므로 정규분포(正規分布)는 표준적인 기준에 부합하는 형태로 값이 퍼져 있는 분포를 의미한다. 자연 현상이나 사회 현상에서 평균을 중심으로 대칭적으로 자료가 분포하는 형태를 의미한다.

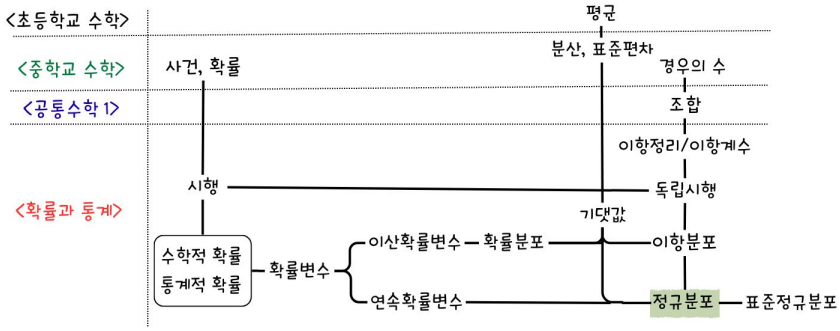
正	規	分	布
바를 정	법 규	나눌 분	펼 포

정규분포를 영어로는 normal distribution이라고 한다. normal에는 '보통의', '정상적인'이라는 뜻이 있고 distribution은 '분포'를 뜻하므로, normal distribution은 사회 현상이나 자연 현상에서 나타나는 보통의 또는 정상적인 분포를 의미한다고 볼 수 있다. 이런 의미에서 정규분포를 정상분포라 부르기도 한다.

개념

정규분포 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

정규분포는 독립시행, 확률변수, 이산확률변수, 연속확률변수, 확률분포, 기댓값, 표준정규분포 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



확률변수 중 어떤 범위의 임의의 실수 값을 가지는 확률변수를 **연속확률변수**라고 하는데, 특히 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$일 때 X는 **정규분포** $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다고 한다. 이때 X의 **기댓값** 즉, 평균과 분산은 각각 m과 σ^2이다.

한편 **이산확률변수** X가 **독립시행**에서 사건이 일어나는 횟수일 때, X의 **확률분포**를 **이항분포**라고 한다. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, X의 기댓값 즉, 평균과 분산은 각각 np와 $np(1-p)$이다. 이때 n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,np(1-p))$를 따른다. 정규분포 중 특히 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 한다. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준화하여 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$따르는 확률변수 Z로 바꿀 수 있다. 즉, 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따르는 확률변수 X는 시행 횟수 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,np(1-p))$를 따르고, 이것은 다시 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$를 따르는 확률변수 Z로 표준화할 수 있다.

표준정규분포標準正規分布; standard normal distribution

정의

표준정규분포란 무엇인가요?

정규분포 중에서 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 하고, 이것을 기호로

$$\mathrm{N}(0,\ 1)$$

로 나타낸다.

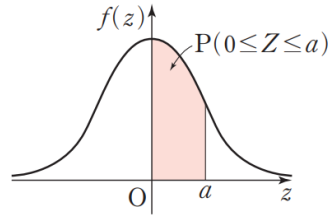
확률변수 Z가 표준정규분포를 따르면 Z의 확률밀도함수는

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (z\text{는 모든 실수})$$

이다. 이때 Z가 0 이상 a 이하의 값을 가질 확률

$$\mathrm{P}(0\le Z\le a)$$

는 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고, 그 값은 표준정규분포표에 주어져 있다.



예

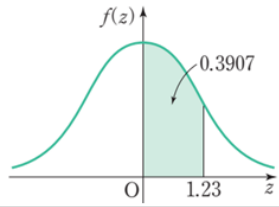
구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

확률변수 Z가 $\mathrm{N}(0,1)$을 따를 때,

❶ 표준정규분포표로부터

$$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.23)=0.3907$$

임을 알 수 있다.



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

❷ 표준정규분포표로부터

$$\mathrm{P}(Z \leq 1.23) = 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.23) = 0.5 + 0.3907 = 0.8907$$

임을 알 수 있다.

개념

표준정규분포에는 어떤 성질이 있나요?

표준정규분포는 평균이 0이고 표준편차가 1인 정규분포로서, 정규분포를 따르는 모든 확률변수 X는 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z로 바꿀 수 있는데, 이를 정규분포의 표준화라고 부르기도 한다.

정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

실제로 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

$$Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

이라 하면, $\mathrm{E}(X) = m$, $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$이므로

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X-m) = \frac{1}{\sigma}(\mathrm{E}(X)-m) = 0$$

$$\mathrm{V}(Z) = \mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X) = 1$$

이다. 따라서 확률변수 Z는 평균이 0, 분산이 1인 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

정규분포의 표준화를 통해 서로 다른 정규분포를 따르는 확률변수의 값들의 상대적인 위치를 비교할 수 있다.

개념

이항분포와 표준정규분포도 서로 관련이 있나요?

이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$의 그래프는 p가 일정할 때, n의 값이 커짐에 따라 점점 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$의 정규분포곡선에 가까워진다는 사실이 알려져 있다. 이때 $q = 1-p$이다.

또, 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$를 따르는 확률변수 X는 평균이 0, 분산이 1인 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$를 따르는 확률변수 Z로 바꿀 수 있다.

따라서 이산확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따르고, 이 정규분포를 따르는 확률변수 X는 다시 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$를 따르는 확률변수 $Z = \dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$로 표준화할 수 있다.

이항분포와 표준정규분포의 관계

이산확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$를 따른다.

예를 들어, 한 개의 주사위를 180회 던지는 독립시행에서 1의 눈이 25회 이상 40회 이하로 나올 확률을 생각해보자.

1의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포

$$\mathrm{B}(180, \frac{1}{6})$$

을 따른다. 이때 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$과 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$$\mathrm{E}(X) = 180 \times \frac{1}{6} = 30, \quad \mathrm{V}(X) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 25 = 5^2$$

이다. $n = 180$은 충분히 크므로, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포

$$\mathrm{N}(30, 5^2)$$

을 따른다. 이때

$$Z = \frac{X - 30}{5}$$

라 하면, Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$를 따르므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(25 \le X \le 40) &= \mathrm{P}\left(\frac{25 - 30}{5} \le \frac{X - 30}{5} \le \frac{40 - 30}{5}\right) \\ &= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 2) \\ &= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

이다.

의미 표준정규분포라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

표준정규분포(標準正規分布)는 글자 그대로 정규분포 중에서 표준(標準)이 되는 또는 표준으로 삼는 정규분포(正規分布)를 의미한다.

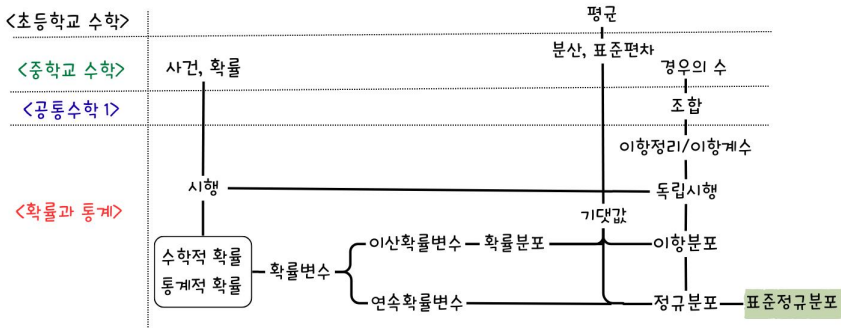
標	準	正	規	分	布
표할 표	준할 준	바를 정	법 규	나눌 분	펼 포

표준정규분포를 영어로는 standard normal distribution이라고 한다. starndard에는 '표준적인'이라는 뜻이 있고, normal에는 '보통의', '정상적인'이라는 뜻이 있으며, distribution은 '분포'를 뜻하므로, standard normal distribution 글자 그대로 표준적인 정규분포 즉, 표준정규분포로 번역된다.

개념

표준정규분포와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

표준정규분포는 독립시행, 확률변수, 이산확률변수, 연속확률변수, 확률분포, 기댓값, 정규분포 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



확률변수 중 어떤 범위의 임의의 실수 값을 가지는 확률변수를 연속확률변수라고 하는데, 특히 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 일 때 X는 **정규분포** $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다고 한다. 이때 X의 기댓값 즉, 평균과 분산은 각각 m과 σ^2이다.

한편 이산확률변수 X를 독립시행에서 사건이 일어나는 횟수라 할 때, X의 확률분포를 이항분포라고 한다. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, X의 기댓값 즉, 평균과 분산은 각각 np와 $np(1-p)$이다. 이때 n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,np(1-p))$를 따른다. 정규분포 중 특히 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라 한다. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준화하여

표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꿀 수 있다. 즉, 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따르는 확률변수 X는 시행 횟수 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, np(1-p))$를 따르고, 이것은 다시 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 확률변수 Z로 표준화할 수 있다.

모집단母集團; population , **표본**標本; sample ,
전수조사全數調査; total inspection / complete enumeration survey ,
표본조사(標本調査; sample survey , **임의추출**任意抽出; random sampling

정의

모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출은 각각 무엇인가요?

통계 조사에서 조사의 대상이 되는 집단 전체를 **모집단**이라 하고, 모집단 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라 한다.

한편 모집단에서 일부분만 택하여 조사하는 것을 **표본조사**라 하고, 표본조사하기 위하여 모집단에서 뽑은 일부분을 **표본**이라 한다. 또 표본에 포함된 대상의 개수를 표본의 크기라 하고, 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라 한다.

표본조사는 모집단에서 뽑은 표본을 조사하여 모집단의 성질을 추측하는 것이 목적이므로 모집단의 특성이 잘 반영되도록 표본을 뽑아야 한다. 모집단의 어느 한 부분에 편중되지 않고 모집단의 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 표본을 뽑는 것을 **임의추출**이라고 한다. 모집단에서 표본을 임의추출할 때에는 난수 주사위를 던지거나 제비를 뽑 는 방법도 있으나 난수표나 컴퓨터의 난수 생성 프로그램 등을 이용하여 표본을 추출하기도 한다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

전수조사는 조사 대상의 자료 전체에 대한 특성을 정확히 알 수 있는 반면, 조사하는 데 많은 비용과 시간이 소모된다. 정기적으로 실시되는 우리나라의 인구주택총조사, 기업의 연간 수입 및 수출량 조사 등은 전수조사의 대표적인 예이다.

표본조사는 자료의 특성을 근사적으로 알 수 있고 시간과 비용을 절약할 수 있다. TV 프로그램 시청률 조사, 정당의 지지율 조사, 전자제품의 수명 조사 등은 표본조사의 전형적인 예이다.

의미

모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

모집단 모집단(母集團)에서 모(期)는 '어머니', '근본'를 뜻하고, 집(集)에는 '모으다' ,

단(團)에는 '단체', '무리'라는 뜻이 있다. 이들을 결합하여 모집단(母集團)은 통계 조사의 근원(期)이 되는 전체 집단(集團)를 의미한다.



모집단을 영어로는 population이라고 한다. population에는 '한 지역의 전 주민'이라는 뜻이 있다. 조사 대상이 되는 집단 전체를 나타내기에 population이라고 한 것이다.

표본 표본(標本)에서 표(標)는 '표시하다', '기준을 삼다'를 뜻하고, 본(本)에는 '근원', '바탕'이라는 뜻이 있다. 이들을 결합하여 표본(標本)은 모집단의 본(本) 특성을 표(標)시하도록 전체에서 일부를 뽑은 것을 의미한다.



표본을 영어로는 sample이라고 한다. sample에는 '견본', '본보기'라는 뜻이 있어서 모집단에서 뽑은 일부분이 본보기가 된다는 것을 나타낸다고 볼 수 있다.

전수조사 전수조사(全數調査)에서 전수(全數)는 '모든 개체'를 뜻하고, 조사(調査)는 말 그대로 '조사한다'를 뜻한다. 그러므로 전수조사(全數調査)는 모집단에서 모든 개체(全數)를 빠짐없이 조사(調査)하는 방법을 일컫는 용어이다.



전수조사를 영어로는 total inspection 또는 complete enumeration survey라고 한다. total에는 '전체의', inspection에는 '검사, 조사'라는 뜻이 있으므로 total inspection은

전체적인 조사를 의미한다. 또 complete에는 '완전한', '전부의'라는 뜻이 있고, enumeration에는 '나열', '열거'의 뜻이 있으며, survery는 '조사'를 뜻한다. 그러므로 complete enumeration survey는 모집단 전체를 빠짐없이 나열하여 조사한다는 것을 의미한다.

표본조사 표본조사(**標本調査**)는 말 그대로 모집단을 대신하여 대표성 있는 모집단의 일부인 표본(**標本**)을 선택하여 조사(**調査**)한다는 것을 의미한다.



표본조사를 영어로는 sample survey이라고 한다. sample이 '표본', survey가 '조사'를 뜻하므로 sample survey는 글자그대로 표본조사를 뜻한다.

임의추출 임의추출(**任意抽出**)에서 임의(**任意**)는 특별한 의도 없이 아무렇게나, 또는 일부러 꾸미거나 뜻을 더하지 않는다는 것을 의미하고, 추출(**抽出**)은 빼내거나 뽑아낸다는 것을 뜻한다. 그러므로 임의추출(**任意抽出**)은 임의(**任意**)로 표본을 뽑아낸다(**抽出**)는 것을 의미한다.



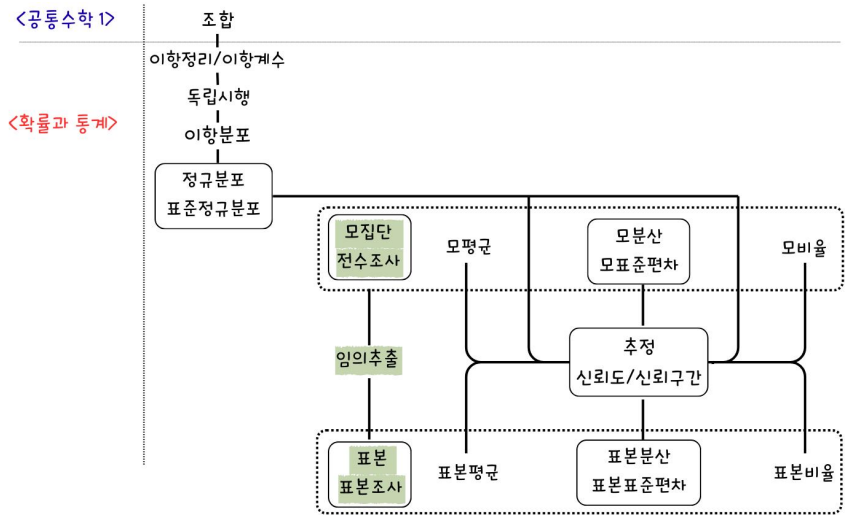
임의추출을 영어로는 random sampling이라고 한다. random에는 '무작위'라는 뜻이 있고 sampling은 '표본을 뽑음'을 뜻한다. 그러므로 random sampling은 무작위로 표본을 뽑는 것을 의미한다.

개념

모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출은 통계 조사의 기본 개념과 절차 및 방법을 기술하기 위한 최소한의 용어 및 개념으로서 정규분포, 표준정규분포, 모평균, 모분산,

모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 모비율, 표본비율, 추정, 신뢰도, 신뢰구간 등 통계 관련 거의 모든 용어 및 개념과 관련이 있다.



모집단에서의 **전수조사**가 어렵거나 불가능한 경우 또는 조사 시간과 비용을 줄이기 위해 모집단으로부터 **표본**을 **임의추출**하여 **표본조사**를 실시한다. 표본조사를 통해 얻은 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 표본비율 등의 정보를 이용하여 모집단의 특성을 나타내는 모평균, 모분산, 모표준편차, 모비율 등을 추정할 수 있다. 특히 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$를 이용하여 모평균이나 모비율이 포함될 것으로 추정되는 신뢰구간을 신뢰도에 따라 구할 수 있는데, 이는 모평균이 m이고 표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 모비율이 p인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율 $\hat{p}$은 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$를 따르기 때문이다. 보통 95% 신뢰도의 신뢰구간과 99% 신뢰도의 신뢰구간이 많이 활용된다.

모평균母平均;population mean , **모분산**母分散;population variance ,
모표준편차母標準偏差;population standard deviation , **모비율**母比率;population ratio

정의

모평균, 모분산, 모표준편차, 모비율이란 무엇인가요?

모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X 라 할 때, X 의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**라 하고, 이것을 기호로 각각

$$m,\ \sigma^2,\ \sigma$$

와 같이 나타낸다.

또 모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 자료의 비율을 **모비율**이라 하고, 이것을 보통 기호

$$p$$

로 나타낸다.

예

구체적인 예를 들어 설명해 주세요.

숫자 2, 4, 6이 각각 적힌 3장의 카드를 모집단으로 생각하고 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 수를 확률변수 X 라고 하면 확률변수 X 의 모평균, 모분산, 모표준편차를 구하면

$$m = \mathrm{E}(X) = 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{3} = 4,$$

$$\sigma^2 = \mathrm{V}(X) = 2^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{1}{3} - 4^2 = \frac{8}{3},$$

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

이고, 카드에 적힌 수가 2 이하인 카드의 모비율은 다음과 같다.

$$p = \frac{1}{3}$$

의미

모평균, 모분산, 모표준편차, 모비율이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

모평균 모평균(母平均)에서 모(母)는 '근원', '전체의 근본'을 뜻한다. 그러므로 모평균(母平均)은 모(母)집단 전체의 평균(平均)을 의미한다.

母	平	均
어미 모	평평할 평	고를 균

모평균을 영어로는 population mean이라고 한다. population에는 '모집단'이라는 뜻이 있고 mean은 '평균'을 뜻한다. 그러므로 population mean은 글자 그대로 모집단 평균으로 번역되고, 이를 줄여 모평균이라 하는 것이다.

모분산 모분산(母分散)에서 모(母)는 '근원', '전체의 근본'을 뜻한다. 그러므로 모분산(母分散)은 모(母)집단 전체의 분산(分散)을 의미한다.

母	分	散
어미 모	나눌 분	흩을 산

모분산을 영어로는 population variance라고 한다. population에는 '모집단'이라는 뜻이 있고 variance는 '분산'을 뜻한다. 그러므로 population variance는 글자 그대로 모집단 분산으로 번역되고, 이를 줄여 모분산이라 하는 것이다.

모표준편차 모표준편차(母標準偏差)에서 모(母)는 '근원', '전체의 근본'을 뜻한다. 그러므로 모표준편차(母標準偏差)는 모(母)집단 전체의 표준편차(標準偏差)를 의미한다.

母	標	準	偏	差
어미 모	표할 표	준할 준	치우칠 편	다를 차

모표준편차를 영어로는 population standard deviation이라고 한다. population에는

'모집단'이라는 뜻이 있고 standard deviation은 '표준편차'를 뜻한다. 그러므로 population standard deviation은 글자 그대로 모집단 표준편차로 번역되고, 이를 줄여 모표준편차라 하는 것이다.

모비율 모비율(母比率)에서 모(母)는 '근원', '전체의 근본'을 뜻한다. 그러므로 모비율(母比率)은 모(母)집단 전체에서의 비율(比率)을 의미한다.

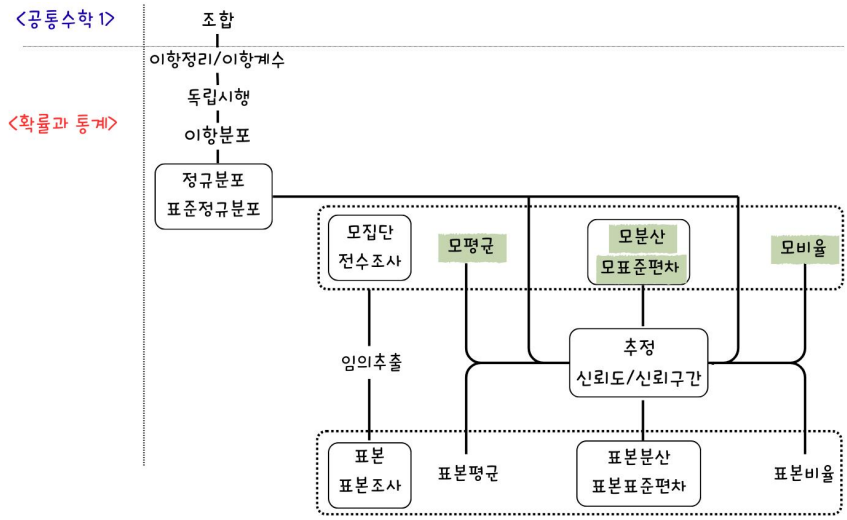
母	比	率
어미 모	견줄 비	비율 율(률)

모비율을 영어로는 population ratio라고 한다. population에는 '모집단'이라는 뜻이 있고 ratio는 '비, 비율'을 뜻한다. 그러므로 population ratio는 글자 그대로 모집단 비율로 번역되고, 이를 줄여 모비율이라 하는 것이다.

개념

모평균, 모분산, 모표준편차, 모비율과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

모평균, 모분산, 모표준편차, 모비율은 정규분포, 표준정규분포, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 모비율, 표본비율, 추정, 신뢰도, 신뢰구간 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



모집단에서의 전수조사가 어렵거나 불가능한 경우 또는 조사 시간과 비용을 줄이기 위해 모집단으로부터 표본을 임의추출하여 표본조사를 실시한다. 표본조사를 통해 얻은 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 표본비율 등의 정보를 이용하여 모집단의 특성을 나타내는 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**, **모비율** 등을 추정할 수 있다. 특히 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$를 이용하여 모평균이나 모비율이 포함될 것으로 추정되는 신뢰구간을 신뢰도에 따라 구할 수 있는데, 이는 모평균이 m이고 표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 모비율이 p인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율 $\hat{p}$은 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$를 따르기 때문이다. 보통 95% 신뢰도의 신뢰구간과 99% 신뢰도의 신뢰구간이 많이 활용된다.

표본평균標本平均;sample mean , **표본분산**標本分散;sample variance ,
표본표준편차標本標準偏差;sample standard deviation , **표본비율**標本比率;sample rate

정의

표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 표본비율이란 무엇인가요?

어떤 모집단에서 크기가 n인 표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 임의추출하였을 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**라 하고, 이것을 기호로 각각

$$\overline{X},\ S^2,\ S$$

와 같이 나타낸다.

또 크기가 n인 표본에서 조사하고자 하는 특성을 가진 표본의 비율을 **표본비율**이라 하고, 기호로

$$\hat{p}$$

와 같이 나타낸다.

$\overline{X}$, S^2, S, $\hat{p}$는 각각 다음과 같이 구한다.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2\}$$

$$S = \sqrt{S^2}$$

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \quad (X : \text{조사고자하 하는 특성을 가진 표본의 개수})$$

모집단에서 표본을 임의추출하였을 때, 모평균 m과 모비율 p는 상수이지만 표본평균 $\overline{X}$와 표본비율 $\hat{p}$은 추출한 표본에 따라 다른 값을 가질 수 있으므로 확률변수이다. 또 표본분산 S^2과 표본표준편차 S 역시 각각 하나의 확률변수이다.

예 **구체적인 예를 들어 설명해 주세요.**

숫자 2, 4, 6이 각각 적힌 3장의 카드를 모집단으로 생각하고 이 모집단에서 크기가 2인 표본 2, 4를 추출하면, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 각각

$$\overline{X} = \frac{1}{2} \times (2+4) = 3$$

$$S^2 = \frac{1}{2-1} \times \{(2-2)^2 + (4-2)^2\} = 4$$

$$S = \sqrt{4} = 2$$

이고, 카드에 적힌 수가 2 이하인 카드의 표본비율은

$$\hat{p} = \frac{1}{2}$$

이다.

개념 **표본평균 $\overline{X}$의 분포에 대해서 설명해 주세요.**

표본평균 $\overline{X}$는 추출한 표본에 따라 다른 값을 가질 수 있으므로 확률변수이다.

확률변수로서 표본평균 $\overline{X}$의 분포에 대하여 살펴보면, 모평균이 m이고 모분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분포는

❶ $\mathrm{E}(\overline{X}) = m, \quad \mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}, \quad \sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

❷ 모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$이면 $\overline{X}$는 정규분포

$$\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

을 따른다.

❸ 모집단의 분포가 정규분포가 아니더라도 표본의 크기 n이 충분히 크면 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포

$$\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

을 따른다.

개념

표본비율 $\hat{p}$의 분포에 대하여 설명해 주세요.

표본평균과 마찬가지로 표본비율 $\hat{p}$도 추출한 표본에 따라 다른 값을 가질 수 있으므로 확률변수이다. 확률변수로서 표본비율 $\hat{p}$의 분포에 대하여 살펴보자.

표본비율 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$에서 확률변수 X는 크기가 n인 표본 중에서 조사하고자 하는 특성을 가진 자료가 추출된 횟수이므로 X가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2, \cdots, n$이다.

한편 모집단에서 그 특성을 가진 자료의 비율 즉, 모비율을 p라 하면, 확률변수 X는 확률이 p인 n번의 독립시행에서 그 사건이 일어난 횟수이므로 X는 이항분포

$$\mathrm{B}(n, p)$$

를 따른다. 따라서 표본비율

$$\hat{p}=\frac{X}{n}$$

의 분포는 다음과 같이 나타난다.

❶ 기댓값(평균)

$$\mathrm{E}(\hat{p})=E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}np=p$$

❷ 분산

$$\mathrm{V}(\hat{p})=V\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{n^2}npq=\frac{pq}{n} \quad (\text{단, } q=1-p)$$

❸ 표준편차

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p})}=\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad (\text{단, } q=1-p)$$

❹ 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포

$$\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right) \quad (\text{단, } q=1-p)$$

를 따르고, $\hat{p}$을 표준화한 확률변수

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}} \quad (\text{단, } q=1-p)$$

는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

의미

표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 표본비율이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

표본평균 표본평균(標本平均)은 글자 그대로 표본(標本)들의 평균(平均)을 의미한다.

標	本	平	均
표할 표	근본 본	평평할 평	고를 균

표본평균을 영어로는 sample mean이라고 한다. sample에는 '표본'이라는 뜻이 있고 mean은 '평균'을 뜻한다. 그러므로 sample mean은 글자 그대로 표본평균으로 번역된다.

표본분산 표본분산(標本分散)은 글자 그대로 표본(標本)들의 분산(分散)을 의미한다.

標	本	分	散
표할 표	근본 본	나눌 분	흩을 산

표본분산을 영어로는 sample variance라고 한다. sample에는 '표본'이라는 뜻이 있고 variance는 '분산'을 뜻한다. 그러므로 sample variance는 글자 그대로 표본분산으로 번역된다.

표본표준편차 표본표준편차(標本標準偏差)는 글자 그대로 표본(標本)들의 표준편차(標準偏差)를 의미한다.

標	本	標	準	偏	差
표할 표	근본 본	표할 표	준할 준	치우칠 편	다를 차

표본표준편차를 영어로는 sample standard deviation이라고 한다. sample에는 '표본'이라는 뜻이 있고 standard deviation은 '표준편차'를 뜻한다. 그러므로 sample

standard deviation은 글자 그대로 표본표준편차로 번역된다.

표본비율 표본비율(標本比率)은 글자 그대로 표본(標本)에서의 비율(比率)을 의미한다.

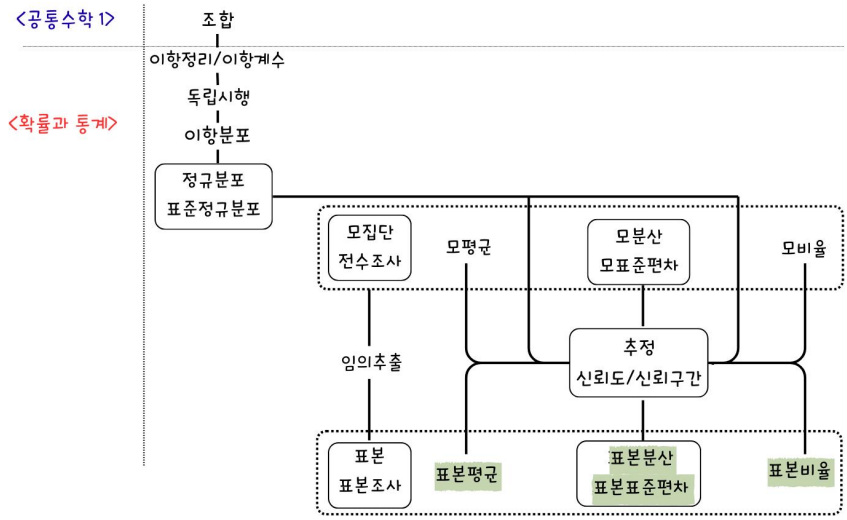
標	本	比	率
표할 표	근본 본	견줄 비	비율 율(률)

표본비율을 영어로는 sample rate라고 한다. sample에는 '표본'이라는 뜻이 있고 rate는 '비, 비율'을 뜻한다. 그러므로 sample rate는 글자 그대로 표본비율로 번역된다.

개념

표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 표본비율과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 표본비율은 정규분포, 표준정규분포, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 모비율, 추정, 신뢰도, 신뢰구간 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



모집단에서의 전수조사가 어렵거나 불가능한 경우 또는 조사 시간과 비용을 줄이기 위해 모집단으로부터 표본을 임의추출하여 표본조사를 실시한다. 표본조사를 통해 얻은 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**, **표본비율** 등의 정보를 이용하여 모집단의 특성을 나타내는 모평균, 모분산, 모표준편차, 모비율 등을 추정할 수 있다. 특히 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 이용하여 모평균이나 모비율이 포함될 것으로 추정되는 **신뢰구간**을 **신뢰도**에 따라 구할 수 있는데, 이는 모평균이 m이고 표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$가 **정규분포** $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 모비율이 p인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율 $\hat{p}$은 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$를 따르기 때문이다. 보통 95% 신뢰도의 신뢰구간과 99% 신뢰도의 신뢰구간이 많이 활용된다.

심화(참고)

- **표본분산을 구할 때 n이 아니라 $n-1$로 나누는 이유는 무엇인가요?**

  모집단의 전체 자료를 다룰 때에는 자료의 개수 n으로 나누어 평균과 분산을 구한다. 그런데 실제로는 모집단의 평균과 분산을 잘 알지 못하는 경우가 대부분이므로 모평균과 모분산을 추정하기 위해서 표본평균과 표본분산을 사용하게 된다. 즉, 자료의 개수가 n인 표본의 평균을

  $$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

  로 계산하면 표본평균 $\overline{X}$의 기댓값은 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$으로 모평균과 일치한다.

  표본분산은

  $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

  과 같이 구하는 것이 자연스러워 보이지만, 이와 같이 계산한 표본분산의 기댓값은 모분산 σ^2과 같지 않다.

  표본분산을 위와 같이 n으로 나누는 대신 $n-1$로 나누어

  $$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

  로 정의하면, 이 표본분산의 기댓값 $\mathrm{E}(S^2)$은 모분산 σ^2과 같게 된다. 즉, 표본평균의 기댓값이 모평균인 것처럼 표본분산의 기댓값이 모분산과 같게 하려면 편차의 제곱의 합을 n이 아니라 $n-1$로 나누어야 한다는 것이다.

  $\mathrm{E}(S^2)=\sigma^2$임은 다음과 같이 보일 수 있다.

  $$\begin{aligned}&\mathrm{E}(S^2)\\&=\mathrm{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2\right)\\&=\frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\left((X_k-m)+(m-\overline{X})\right)^2\right)\end{aligned}$$

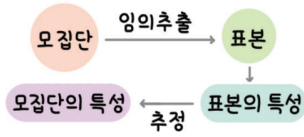
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\left((X_k-m)^2+2(X_k-m)(m-\overline{X})+(m-\overline{X})^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2+2(m-\overline{X})\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)+\sum_{k=1}^{n}(m-\overline{X})^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2+2(m-\overline{X})(n\overline{X}-nm)+n(m-\overline{X})^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2-2n(\overline{X}-m)^2+n(\overline{X}-m)^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2\right)-n\mathrm{E}\left((\overline{X}-m)^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}((X_k-m)^2)-n\mathrm{V}(\overline{X})\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\times\frac{\sigma^2}{n}\right)\\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

추정推定; estimation , **신뢰도**信賴度; confidence coefficient / reliability ,
신뢰구간信賴區間; confidence [fiducial] interval

정의

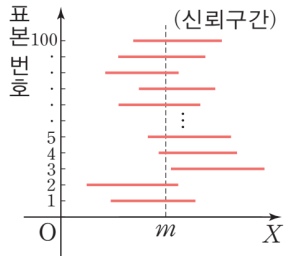
추정이란 무엇이고, 신뢰도와 신뢰구간은 또 무엇인가요?

모집단에서 임의추출한 표본에서 얻은 정보인 표본평균, 표본비율 등을 이용하여 모집단의 특성을 나타내는 값인 모평균, 모비율 등을 추측하는 것을 **추정**이라 한다.



표본평균이나 표본비율을 이용하여 모평균이나 모비율을 추정할 때, 이들 각 값이 포함될 것으로 추정되는 구간을 구할 수 있다. 이 구간을 **신뢰구간**이라 한다.

이때 신뢰구간은 표본을 추출할 때마다 달라질 수 있으므로 모평균이나 모비율을 포함하는 구간도 있고 포함하지 않는 구간도 있다. 표본을 여러 번 임의추출하여 구한 신뢰구간들 중 약 몇 %가 모평균이나 모비율을 포함할 것인지를 나타내는 비율 즉, 임의추출의 총 횟수에 대한 모평균이나 모비율을 포함하는 신뢰구간의 개수의 비율(%)을 **신뢰도**라 한다.



이를테면 '신뢰도 95%의 신뢰구간'은 표본을 여러 번(예를 들어, 100번) 임의추출하여 구한 신뢰구간 중 약 95% 즉, 100개 중 95개는 모평균이나 모비율을 포함할 것으로 기대된다는 것을 의미한다.

개념

모평균의 추정 방법을 설명해주세요.

모집단에서 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 방법을 알아보자.

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르므로 확률변수

$$Z = \frac{\overline{X} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

이제 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구해보자.

표준정규분포표에서

$$\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96) = 0.95$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(-1.96 \le \frac{\overline{X} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96\right) = 0.95$$

가 성립한다. 이것을 정리하면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

여기서 구간

$$\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

가 바로 모평균 m의 **신뢰도 95%의 신뢰구간**이 된다. 즉, 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 닫힌구간

$$\left[\overline{X} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

를 반복해서 구해보면, 그 중 약 95%는 모평균 m을 구간 안에 포함할 것으로 기대된다는 것이다.

마찬가지 방법으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\mathrm{P}(-2.58 \le Z \le 2.58) = 0.99$$

임을 이용하여 모평균 m의 **신뢰도 99%의 신뢰구간**을 구하면

$$\overline{X} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

가 된다.

모평균의 신뢰구간

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$를 이용하여 모평균 m의 신뢰구간을 구하면 다음과 같다.

❶ 신뢰도 95%의 신뢰구간

$$\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

❷ 신뢰도 99%의 신뢰구간

$$\overline{X} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

예

구체적인 예를 들어 설명해주세요.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 100인 표본의 표본평균이 50일 때, 모평균 m에 대한 95%의 신뢰구간을 구해보면 다음과 같다.

$n = 100,\ \overline{X} = 56.3,\ \sigma = 10$ 이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$50 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{100}} \le m \le 50 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{100}}$$

즉,

$$48.04 \le m \le 51.96$$

이다.

개념

모비율의 추정 방법을 설명해주세요.

모집단에서 표본을 임의추출하여 얻은 표본비율을 이용하여 모비율을 추정하는 방법을 알아보자.

모비율이 p인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, n이 충분히 크면 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포

$$\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

를 따르므로(단, $q = 1 - p$) 이를 표준화한 확률변수

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 그런데 $\hat{p}$의 표준편차 $\sqrt{\frac{pq}{n}}$는 미지의 값이므로 위 식의 우변에서 $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ 대신 $\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ $(\hat{q} = 1 - \hat{p})$을 사용한다.

이제 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구해보자.

표준정규분포표에서

$$\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96) = 0.95$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(-1.96 \le \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} \le 1.96\right) = 0.95$$

가 성립한다. 이것을 정리하면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}\left(\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = 0.95$$

여기서 구간

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이 바로 모비율 p의 **신뢰도 95%의 신뢰구간**이 된다. 즉, 모집단에서 크기가 n인 표본을

임의추출하여 닫힌구간

$$\left[\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right]$$

을 반복해서 구해보면, 그 중 약 95%는 모비율 p를 구간 안에 포함할 것으로 기대된다는 것이다.

마찬가지 방법으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\mathrm{P}(-2.58 \le Z \le 2.58) = 0.99$$

임을 이용하여 모비율 p의 **신뢰도 99%의 신뢰구간**을 구하면

$$\hat{p} - 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p} + 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이 된다.

모비율의 신뢰구간

모집단에서 크기가 n인 표본으로부터 구한 표본비율 $\hat{p}$을 이용하여 n이 충분히 클 때 모비율 p의 신뢰구간을 구하면 다음과 같다. (단, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$)

❶ 신뢰도 95%의 신뢰구간

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

❷ 신뢰도 99%의 신뢰구간

$$\hat{p} - 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p} + 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

예 **구체적인 예를 들어 설명해주세요.**

모집단에서 임의추출한 크기가 800인 표본의 표본비율이 0.75일 때, 모비율 p에 대한 99%의 신뢰구간을 구해보면 다음과 같다.

$n = 800,\ \hat{p} = 0.75$ 이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.75 - 2.58 \times \sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{800}} \le p \le 0.75 + 2.58 \times \sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{800}}$$

즉,

$$0.71 \leq p \leq 0.79$$

이다.

개념 **신뢰도, 표본의 크기, 신뢰구간 사이에는 어떤 관계가 있나요?**

모평균 추정에서 신뢰도, 신뢰구간, 표본의 크기 사이에는 어떤 관계가 있을까?

모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

이므로 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이고, 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간은

$$\left[\overline{X} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

이므로 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이다. 따라서 표본의 크기 n이 일정할 때, 신뢰도를 높이면 신뢰구간의 길이는 길어진다.

한편 신뢰도를 고정하였을 때, 신뢰구간의 길이를 짧게 하려면 표본의 크기를 크게 하여야 한다. 또, 신뢰도를 높이면 모평균이 신뢰구간에 들어 있을 확률은 높아지지만 신뢰구간의 길이는 길어진다.

신뢰도, 신뢰구간, 표본의 크기 사이의 이런 관계는 모비율 추정에서도 마찬가지로 성립한다.

의미 **추정, 신뢰도, 신뢰구간이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.**

추정 추정(推定)에서 추(推)는 '미루어 짐작하다', '추측하다'를 뜻하고, 정(定)에는 '정하다', '결정하다'는 뜻이 있다. 이들을 결합하여 추정(推定)은 확실히 알 수 없는 값을

미루어 짐작하여 즉, 추(推)측하여 정(定)함을 의미한다.



추정을 영어로는 estimation이라고 한다. estimation에는 '추정', '추산'이라는 뜻이 있으므로 이를 번역하여 추정이라 한다. 즉, 표본으로부터 얻은 자료로부터 모평균이나 모비율을 추측하여 정하기에 추정이라고 하는 것이다.

신뢰도 신뢰도(**信賴度**)는 말 그대로 신뢰(**信賴**)할 수 있는 정도(**度**)를 의미한다.



신뢰도를 영어로는 confidence coefficient 또는 reliability라고 한다. confidence에는 '신뢰', '확신', '믿음'이라는 뜻이 있고, coefficient는 '계수', '어떤 양을 나타내는 수치'를 뜻한다. 그러므로 confidence coefficient는 신뢰를 나타내는 수치를 의미한다. reliability는 그 자체가 신뢰도 혹은 신뢰성으로 번역된다.

신뢰구간 신뢰구간(**信賴區間**)은 말 그대로 신뢰(**信賴**)할 수 있는 구간(**區間**)을 의미한다.



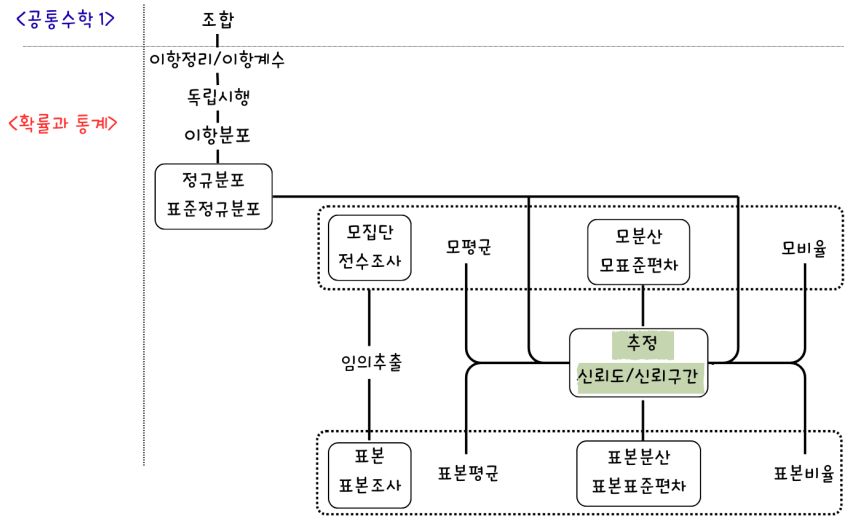
신뢰구간를 영어로는 confidence [fiducial] interval이라고 한다. confidence에는 '신뢰'라는 뜻이 있고 interval은 '구간'을 뜻하므로 confidence interval은 글자 그대로 신뢰구간으로 번역된다. fiducail 역시 '믿어 의심치 않는', '신뢰할 수 있는'이라는 뜻이

있다.

개념

추정, 신뢰도, 신뢰구간과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

추정, 신뢰도, 신뢰구간은 정규분포, 표준정규분포, 모집단, 표본, 전수조사, 표본조사, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 모비율, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 표본비율, 추정, 신뢰도, 신뢰구간 등의 용어 및 개념과 관련이 있다.



모집단에서의 **전수조사**가 어렵거나 불가능한 경우 또는 조사 시간과 비용을 줄이기 위해 모집단으로부터 **표본**을 **임의추출**하여 **표본조사**를 실시한다. 표본조사를 통해 얻은 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**, **표본비율** 등의 정보를 이용하여 모집단의 특성을 나타내는 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**, **모비율** 등을 **추정**할 수 있다. 특히 **표준정규분포** $\mathrm{N}(0,\ 1)$를 이용하여 모평균이나 모비율이 포함될 것으로 추정되는 **신뢰구간**을 **신뢰도**에 따라 구할 수 있는데, 이는 모평균이 m이고 표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$가 **정규분포** $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 모비율이 p인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율 $\hat{p}$은 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$를 따르기 때문이다. 보통 95% 신뢰도의 신뢰구간과 99% 신뢰도의 신뢰구간이 많이 활용된다.

미적분II

머 리 말

이 자료는 2022 개정 교육과정의 〈미적분II〉에서 다루는 다음의 수학 용어들을 설명하고 안내하기 위해 마련되었습니다.

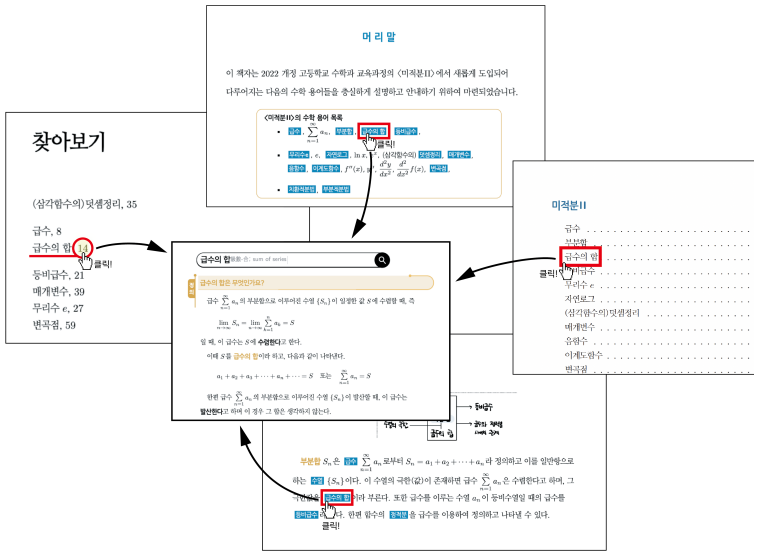
〈미적분II〉의 수학 용어 목록

- 급수, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 부분합, 급수의 합, 등비급수,
- 무리수 e, e, 자연로그, $\ln x$, e^x, (삼각함수의) 덧셈정리, 매개변수, 음함수, 이계도함수, $f''(x)$, y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, 변곡점,
- 치환적분법, 부분적분법

각 수학 용어에 대한 설명/안내 자료를 찾아가는 방법은 다음과 같습니다.

용어 설명 찾아가는 방법

(방법1) 위 목록의 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법2) [차례]에 있는 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법3) 맨 뒤 [찾아보기]에 있는 용어 옆 숫자(쪽수)를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법4) 자료 본문에서 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.



고등학생이 각 수학 용어를 이해하는 과정에서 자연스럽게 제기할 수 있는 질문 및 교사가

고등학생의 수학적 사고를 유도하기 위해 제기할 수 있는 질문을 중심으로 묻고 답하는 문답 방식으로 자료를 구성하였습니다. 이 자료가 고등학교 수학 용어 및 관련 학습 내용에 대하여 학생 스스로 질문을 던지고 질문에 대한 답을 탐색하는 습관을 형성하는데 기여하고, 수학 교사가 학생의 이런 습관 형성과 의미 있는 수학적 사고 활동을 안내하는 데 활용되기를 바랍니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점

이 자료는 고등학생이 각 수학 용어를 정확하고 명료하게 이해하기 위해 필요한 용어의 뜻(정의), 표현, 구체적인 예 등의 기본적인 내용 뿐 아니라 더 알아보기 질문을 통해 그 용어에 대한 고등학생의 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용, 더 나아가 용어 관련 다양한 참고 자료와 대학 수준의 보다 심화 확장된 내용까지 심화(참고)를 통해 폭넓게 다루고자 하였습니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점을 살펴보면 다음과 같습니다.

[자료의 짜임새]

	기본	더 알아보기	심화(참고)
내용	고등학생의 수학 용어에 대한 정확하고 명료한 이해에 필요한 정의, 의미, 예 등의 기본 내용으로 구성	고등학생의 수학 용어에 대한 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용으로 구성	대학 수준의 심화 학습을 원하는 고등학생, 수업을 준비하는 교사(혹은 예비교사)를 위한 [기본]과 [더 알아보기]의 내용을 더욱 심화한 내용 및 참고 자료로 활용 가능한 내용으로 구성
특징	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 모든 내용이 용어가 도입되는 과목 교육과정의 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 범위를 벗어날 수 있음. 단, 설명에 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙은 해당 과목 교육과정 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용 및 이때 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어날 수 있음

[자료의 활용]

고등학생	수학 용어에 대한 교과서 중심의 기본적이고 핵심적인 의미와 내용을 이해를 원하는 학생은 기본에 해당하는 내용을 읽고 공부하면 됩니다. 기본에 해당하는 내용을 토대로 좀 더 깊이 있는 이해를 원하는 학생은 더 알아보기의 내용을 읽으면 도움이 될 수 있습니다. 심화(참고)의 내용은 참고 자료로서 "아, 이런 내용도 있구나." 정도로 이해하거나, 읽지 않아도 됩니다.
(예비)교사	기본에 해당하는 내용은 모든 학생에게 가르쳐야 할 내용입니다. 더 알아보기와 심화(참고)의 내용은 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정 범위를 벗어난 학생의 질문에 답하거나 심화 탐구 활동 자료로 활용 가능합니다.

[활용 시 유의점]

더 알아보기와 심화(참고)의 내용 중에는 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어나는 내용이 포함되어 있습니다. 특히 심화(참고)의 내용은 대학 학부 수준의 내용을 포함하기도 합니다. 그러므로 고등학교 수학 교사가 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용할 때는 신중한 주의가 필요합니다. 특히 평가에 교육과정의 범위를 벗어나는 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용하지 않도록 유의할 필요가 있습니다.

급수級數; series

정의

급수는 무엇인가요?

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 **급수**라고 하며, 이것을 시그마 기호 $\sum$를 사용하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

과 같이 나타낸다.

이때, 기호 $\sum$는 영어 sum의 첫 글자 S에 해당하는 그리스 문자이고, '시그마(sigma)'라고 읽는다. 또, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$는 a_n의 n에 $1, 2, 3, \cdots$를 차례로 대입하여 얻은 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots$를 순서대로 계속 더한다는 뜻이다. 이때 더하는 항의 개수가 끝없이 이어지므로 위에 ∞를 써서 '무한히 더함'을 나타낸다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 급수

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

은 일반항이 $\frac{1}{n(n+1)}$인 수열의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식으로서, 시그마 기호 $\sum$를 사용하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

과 같이 나타낸다.

❷ 급수

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$$

은 일반항이 n인 수열의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식으로서, 시그마 기호

$\sum$을 사용하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

과 같이 나타낸다.

❸ 시그마 기호 $\sum$로 나타낸 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

은 일반항이 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 인 등비수열의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$$

을 간단히 나타낸 것이다. 이처럼 일반항이 등비수열인 급수를 **등비급수**라 한다.

의미 **급수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.**

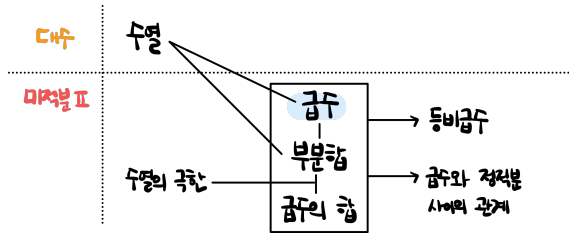
'급(級)'은 '차례', '단계'라는 뜻이며, '수(數)'는 '수' 혹은 '숫자'를 의미한다. 즉, 급수는 차례대로 나열된 (무한히 많은) 수들의 합을 의미한다.



series는 라틴어 serere(=나열하다, 연결하다)에서 유래했으며, '연속' , '연쇄' 라는 뜻을 가진 영어 단어이다. 영어로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$는 series, 수열 a_n은 sequence로 나타낸다.

개념 **급수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?**

급수는 수열, 수열의 극한, 부분합, 급수의 합, 등비급수, 급수와 정적분 사이의 관계 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **급수** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 **수열** $\{a_n\}$의 각 항을 덧셈 기호 $+$로 이어서 나타낸 식이다. 이때 **부분합** $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$을 일반항으로 하는 **수열** $\{S_n\}$을 생각한다. 이 수열의 극한(값)이 존재하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다고 하며, 그 극한값을 **급수의 합**이라 부른다. 또한 급수를 이루는 수열 a_n이 등비수열일 때의 급수를 **등비급수**라 한다. 한편 함수의 **정적분**을 급수를 이용하여 정의하고 나타낼 수 있다.

부분합部分合; partial sum

정의

부분합은 무엇인가요?

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n, 즉

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제 n 항까지의 **부분합**이라고 한다.

이렇게 정의된 부분합 S_n 은 $n = 1, 2, 3, \ldots$ 에 따라 각각의 값을 가지므로, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합이 일반항인 새로운 수열 $\{S_n\}$ 을 만들 수 있고, 이로부터 수열 $\{S_n\}$ 의 극한도 생각할 수 있다.

특히 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합이 일반항인 수열 $\{S_n\}$ 이 수렴할 때, 그 극한값을 **급수의 합**이라 부른다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

급수에 예시로 제시된 급수들의 부분합 S_n 을 구해보자.

❶ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 의 부분합을 구해보자.

이 급수의 일반항 $\frac{1}{n(n+1)}$ 은 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

이로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

따라서 이 급수의 부분합은 $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ 이다.

❷ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n$의 부분합 S_n은 다음과 같다.

$$
\begin{array}{rrcccccc}
 & S_n & = & 1 & + & 2 & +\cdots+ & n \\
+) & S_n & = & n & + & (n-1) & +\cdots+ & 1 \\
\hline
 & 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & +\cdots+ & (n+1) \quad = n(n+1) \\
 & S_n & = & \dfrac{n(n+1)}{2} & & & &
\end{array}
$$

의미 **부분합라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해주세요.**

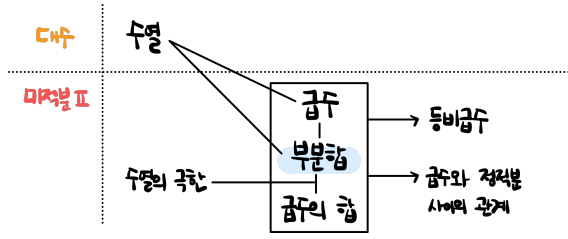
'부(部)'는 '떨어진', '나뉜'이라는 뜻이고, '분(分)'은 '일정하게 나누다'는 뜻이며, '합(合)'은 '더하다', '모으다'라는 의미이다. 즉, 부분합은 급수의 첫째항에서부터 일정한 개수의 항에 해당하는 **부분**을 차례대로 **합**한 값을 의미한다.

部 거느릴 부　分 나눌 분　合 합할 합

partial sum은 '부분적인 합'이라는 뜻을 가진다. 급수의 첫째항부터 제 n항까지의 합인 부분합은 영어로 partial sum of a series 또는 간단히 partial sum이라고 하며, 기호로는 sum의 첫 글자 S에 아래 첨자 n을 붙여 S_n으로 나타낸다.

개념 **부분합와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?**

부분합은 급수를 이루는 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합으로서 수열, 수열의 극한, 급수, 급수의 합, 등비급수, 급수와 정적분 사이의 관계 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



부분합 S_n은 **급수** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$로부터 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$라 정의하고 이를 일반항으로 하는 **수열** $\{S_n\}$이다. 이 수열의 극한(값)이 존재하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다고 하며, 그 극한값을 **급수의 합**이라 부른다. 또한 급수를 이루는 수열 a_n이 등비수열일 때의 급수를 **등비급수**라 한다. 한편 함수의 **정적분**을 급수를 이용하여 정의하고 나타낼 수 있다.

급수의 합級數-合; sum of series

정의

급수의 합은 무엇인가요?

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

일 때, 이 급수는 S에 **수렴한다**고 한다.

이때 S를 **급수의 합**이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 **발산한다**고 하며 이 경우 그 합은 생각하지 않는다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

급수와 **부분합**에 예시로 제시된 급수들의 합을 알아보자.

❶ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$의 부분합은 $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$이다. 이때 $n \to \infty$일 때, $\frac{1}{n+1} \to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

이 된다. 따라서 이 급수의 합은 1이다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

이다.

❷ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n$의 부분합이 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

이다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n$는 발산한다.

개념

급수의 합, 급수의 수렴/발산을 공부할 때 유의할 점은 무엇인가요?



급수의 합이 존재하려면 어떤 조건을 만족해야 하나요?

〈급수의 합은 무엇인가요?〉에서 보았듯이, 급수의 합이 존재하려면 그 급수의 부분합으로 이루어진 수열이 수렴해야 한다. 즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 합을 나타내는 부분합 S_n 이 어떤 일정한 값에 가까워지면, 이 급수는 수렴하고 그 값이 바로 급수의 합이 된다. 그렇지 않다면, 그 급수는 발산한다.



수열의 합에서 시그마 기호와 덧셈, 시그마 기호와 상수배의 순서를 바꿀 수 있었는데, 급수에서도 순서를 바꿀 수 있나요?

수열의 합에서는 다음과 같이 두 수열을 항별로 더한 뒤 첫째항부터 제 n 항까지 더한 것과 두 수열을 각각 첫째항부터 제 n 항까지 더한 뒤 그 결과를 더한 것이 같다. 또 수열의 각 항에 상수배를 한 뒤 이를 첫째항부터 제 n 항까지 더한 것과 수열을 첫째항부터 제 n 항까지 더한 뒤 그 결과를 상수배 한 것이 같다.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ (단, } c\text{는 상수)}$$

그러나 유한 개의 항을 더하는 수열의 합과는 달리 무한히 많은 항을 더하는 급수에서는 위 성질이 일반적으로 성립하지 않는다.

그 대신 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하는 경우에는, 다음과 같이 수열의 합에서 성립하는 위의 두 성질과 유사한 성질이 급수의 합에서도 성립한다.

❶ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

❷ $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)

즉, 이 성질은 '두 급수가 모두 수렴한다'는 전제가 충족될 때에만 사용할 수 있는 성질이다. 이 전제가 충족되지 않는다면 급수의 합 자체를 생각하지 않으므로 덧셈과 상수배 연산 역시 생각하지 않는다.

예를 들어 $a_n = n$, $b_n = -n$이라 하자. 그러면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)$$

은 각각 양의 방향과 음의 방향으로 발산하므로, 두 급수의 '합'

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

은 생각할 수 없다.

그런데 이때는 모든 n에 대하여

$$a_n + b_n = n - n = 0$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

이 된다. 따라서 '수렴한다'는 전제가 없으면 위 덧셈 성질을 그대로 적용할 수 없음을 알 수 있다.



급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴/발산과 그 급수를 이루는 수열 $\{a_n\}$의 수렴/발산 사이에는 어떤 관계가 있나요?

수렴하는 모든 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 그 합이 얼마든(양수든, 영이든, 음수든) 상관없이 급수를 이루는 수열 $\{a_n\}$의 극한값이 0이라는 공통점을 가지고 있다. 즉, 다음이 성립한다.

"급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다."

또 이 명제의 대우인 다음 명제 역시 참인데, 급수의 발산을 판단할 때 종종 사용된다.

"$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다."

즉, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않거나 수렴하더라도 그 극한값이 0이 아니면, $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구해보지 않고도 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산함을 곧바로 판단할 수 있다.



그럼 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면 어떻게 되나요?

이 경우 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴하나요? 아니면 발산하나요?

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다고 생각하는 경우가 종종 있는데, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 각 항 a_n이 0에 한없이 가까워진다고 해서, 급수가 수렴하거나 발산한다고 단정지을 수는 없다.

예를 들어 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$과 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$을 생각해보자. 다음에서 보듯이, 두 급수를 이루는 수열은 모두 수렴하고 그 극한값은 둘 다 0이다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

그러나 두 급수 중에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$은

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

이므로 수렴하지만, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$은

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

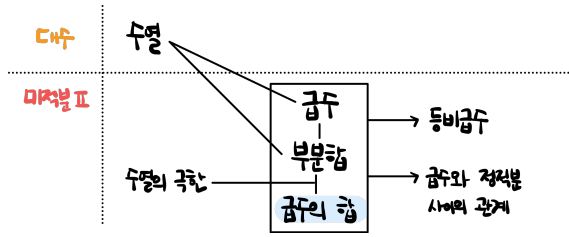
이므로 발산한다.

이처럼 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이라고 해서 급수가 항상 수렴하는 것은 아니며 또 항상 발산하는 것도 아니다. 즉, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 그 극한값이 0이라 하더라도 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴/발산하는지는 따로 확인해야 한다.

개념

급수의 합과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

급수의 합은 수렴하는 급수의 극한값으로서 수열, 수열의 극한, 급수, 부분합, 등비급수, 급수와 정적분 사이의 관계 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 **수열** $\{a_n\}$의 각 항을 덧셈 기호 $+$로 이어서 나타낸 식이다. 이때 **부분합** $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$을 일반항으로 하는 **수열** $\{S_n\}$을 생각한다. 이 수열의 극한(값)이 존재하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다고 하며, 그 극한값을 **급수의 합**이라 부른다. 반대로 이 극한(값)이 존재하지 않으면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다고 한다. 또한 급수를 이루는 수열 a_n이 등비수열일 때의 급수를 **등비급수**라 하고, 첫째항이 a $(a \neq 0)$, 공비가 r인 등비급수가 수렴할 때 이 등비급수의 합은 $\dfrac{a}{1-r}$가 된다. 한편 함수의 **정적분**을 급수를 이용하여 정의하고 나타낼 수 있다.

심화(참고)

- **급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$에 대해 알아볼까요?**

  급수

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

  은 $a_n \to 0$이지만 발산하는 대표적인 급수 중 하나이다. $n \to \infty$일 때 $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ 이므로 이 급수가 수렴한다고 오해하기 쉽지만 실제로는 발산한다. 그 이유는 다음과 같다.

  급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$의 부분합은

  $$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

  이다. 이 부분합이 n이 커질수록 계속 증가한다는 것을 확인하기 위해, 항들을 묶어서 살펴보자.

  $$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

  여기서 각 묶음은 다음과 같이 항상 $\dfrac{1}{2}$보다 크다.

  $$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \quad \cdots$$

  이와 같이 묶은 항들을 한없이 더하는 것은 $\dfrac{1}{2}$보다 큰 값을 한없이 더하는 것이므로, n의 값이 한없이

커질수록 부분합 S_n의 값 역시 한없이 커지게 된다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

이다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$은 발산한다. (참고로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$을 **조화급수**라고 부른다.)

● 급수에서 덧셈 연산의 순서를 마음대로 바꾸어도 괜찮을까?

다음과 같은 급수를 생각해 보자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

이 급수는 양수 1과 음수 −1을 번갈아 더하는 급수이다.

❶ 이 급수에서 덧셈 연산의 순서를 바꾸어서 항들을 다음과 같이 결합해보자.

$$\{1 + (-1)\} + \{1 + (-1)\} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$$

그러면 이 급수는 수렴하고 그 합은 0이 됨을 알 수 있다.

❷ 덧셈 연산의 순서를 바꾸어서 항들을 다음과 같이 결합할 수도 있다.

$$1 + \{(-1) + 1\} + \{(-1) + 1\} + \cdots) = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

이 경우 급수의 합은 1이 된다.

이처럼 덧셈 연산의 순서를 바꾸어 항들을 결합하는 방법에 따라 만들어지는 급수의 합이 0, 1과 같이 서로 다르게 나타날 수 있다.

왜 이런 일이 생길까요?

더하는 항의 개수가 유한개인 수열의 합에서는 '덧셈 연산의 순서'를 바꾸어도 그 합이 변하지 않는다. 이것을 덧셈의 결합법칙이라 부른다. 즉, 유한개의 항을 더하는 수열의 합에서는 덧셈의 결합법칙이 성립한다. 이와는 달리 무한히 많은 항을 더하는 급수에서는 위에서 본 것처럼 이 법칙이 일반적으로 성립하지 않는다.

다만 급수가 수렴할 때에는 급수의 덧셈 연산의 순서를 바꾸어도 된다는 사실이 알려져 있다.

그러나 급수가 발산할 때는 덧셈의 결합법칙이 일반적으로 성립하지 않는다. 그러므로 발산하는 급수에서는 덧셈 연산의 순서를 바꾸어 항들을 함부로 결합해서는 안된다.

실제로 위 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$은 $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \neq 0$이므로 발산한다.

❸ 이번에는 $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = S$라 두고, 다음 계산을 살펴보자.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S$$

$$2S = 1$$

$$S = \frac{1}{2}$$

이 계산을 통해 $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$ 이라고 생각할 수도 있다.

그러나 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 은 발산하므로 그 합을 생각할 수 없다는 사실에 유의해야 한다. 그런데 이를 간과하고 위와 같이 급수의 합이 마치 존재하는 것처럼 생각해서 그 값을 S라 가정하고 계산을 하게 되면, 위처럼 이상한 현상이 생기게 된다.

등비급수等比級數; geometric series

정의

등비급수는 무엇인가요?

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 덧셈 기호 $+$로 연결한 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

을 첫째항이 a, 공비가 r인 **등비급수**라 한다.

의미

등비급수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'등비급수(等比級數)'는 '등비수열로 얻어진 급수'를 의미한다.

等	比	級	數
무리 등	견줄 비	차례 급	셈(수) 수

영어로는 geometric series라 하며, 등비수열을 영어로 geometric sequence라 한다.

따라서 '등비수열의 항들의 합으로 구성된 급수'를 뜻한다.

개념

등비급수는 언제 수렴하고, 그 합은 어떻게 구하나요?

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면 다음과 같다.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

- $r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$이다.
- $r = 1$일 때, $S_n = a + a + a + \cdots + a = na$이다.

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$의 수렴 여부는 공비 r의 값에 따라 다음과 같이 결정된다.

❶ $|r| < 1$일 때

$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

이다. 따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

❷ $r = 1$일 때

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

❸ $r > 1$ 또는 $r \le -1$일 때

수열 r^n은 발산하고, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$이므로 수열 S_n도 발산한다. 즉, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

등비급수의 수렴, 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} (a \neq 0)$은

1. $|r| < 1$일 때 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.
2. $|r| \ge 1$일 때 발산한다.

첫째항 a가 0일 때, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 0$이므로 항상 수렴하고 급수의 합은 0이다.

따라서 등비급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $a = 0$ 또는 $-1 < r < 1$이다.

예 **구체적인 예와 함께 설명해 주세요.**

❶ 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수이다. 공비가 $\frac{1}{2}$로 그 절댓값이 1보다 작으므로 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$이다.

❷ 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = 1+3+9+27+\cdots$ 은 첫째항이 1이고 공비가 3인 등비급수로 공비의 절댓값이 1보다 크므로 발산한다.

❸ 순환소수 $0.\dot{1}\dot{4}$는

$$0.\dot{1}\dot{4} = 0.14 + 0.0014 + 0.000014 + \cdots$$

$$= \frac{14}{100} + \frac{14}{100^2} + \frac{14}{100^3} + \cdots$$

$$= \frac{14}{100} + \frac{14}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{14}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots$$

이므로, 첫째항이 $\frac{14}{100}$이고 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수로 나타낼 수 있다. 이 등비급수는 공비의 절댓값이 1보다 작으므로 수렴하고, 그 합은

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{14}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{14}{99}$$

이다. 즉, $0.\dot{1}\dot{4} = \frac{14}{99}$이다.

개념 **다른 순환소수도 등비급수로 나타낼 수 있나요?**

모든 순환소수는 수렴하는 등비급수로 나타낼 수 있고, 그 합은 유리수이다.

예를 들어, 순환소수

$$0.\dot{a}b\dot{c} = 0.abcabcabc\cdots$$

는 첫째항이 $\frac{abc}{1000}$, 공비가 $\frac{1}{1000}$인 등비급수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$0.abcabcabc\cdots = \frac{abc}{1000} + \frac{abc}{1000^2} + \frac{abc}{1000^3} + \cdots$$

이 등비급수는 수렴하고 그 합은 다음과 같다.

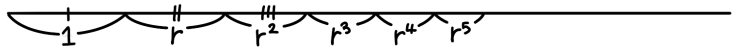
$$\frac{\frac{abc}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{abc}{1000 \times \left(1-\frac{1}{1000}\right)} = \frac{abc}{1000 \times \frac{999}{1000}} = \frac{abc}{999}$$

따라서 $0.\dot{a}b\dot{c} = \frac{abc}{999}$이다.

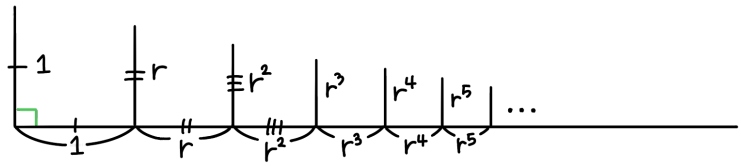
더 알아보기

등비급수를 시각적으로 나타낼 수도 있나요?

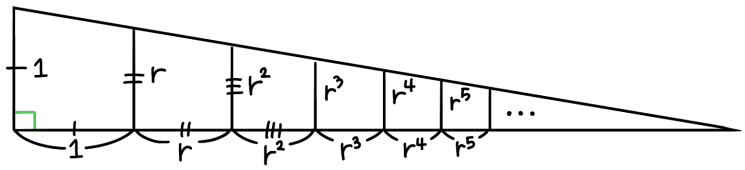
첫째항이 1이고 공비가 r $(0 < r < 1)$인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$를 생각해보자. 급수의 각 항 $1, r, r^2, r^3, \cdots$의 값을 길이로 가지는 선분을 다음 그림과 같이 일렬로 이어서 나열해보자.



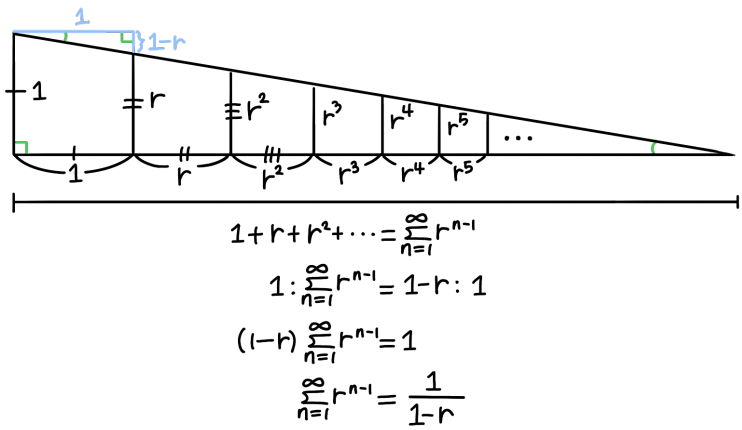
또한, 길이가 1인 선분의 시작점에 같은 길이를 가지는 선분을 수직으로 연결한다. 나머지 길이가 $r, r^2, r^3, \cdots$인 선분을 똑같은 방식으로 연결한다.



그 다음으로 수직으로 그린 길이가 1인 선분의 끝과 수직으로 그린 길이가 r인 선분의 끝을 연결한 직선을 그으면, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$의 값을 한 변으로 가지는 직각삼각형이 만들어진다.



다음 그림과 같이 전체 검정색 삼각형의 윗 부분에 작은 파랑색 삼각형을 그려줄 수 있다.



전체 검정색 삼각형은 파랑색 삼각형은 직각삼각형이기에 쉽게 닮았음을 알 수 있다.

이로부터 두 직각삼각형의 닮음 비를 계산해보면, 파랑색 삼각형은 $1-r$과 1, 전체 검정색 삼각형은 1과 우리가 구하고 싶은 등비급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$이 서로 대응된다.

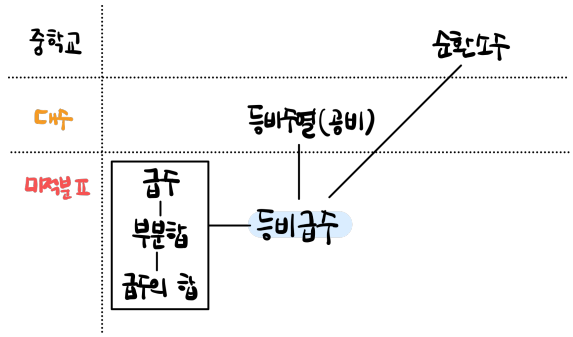
따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$이 됨을 알 수 있다.

이 그림을 통해 등비급수의 합 공식을 시각적으로 나타낼 수 있다.

개념

등비급수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

등비급수는 등비수열의 각 항을 덧셈 기호로 연결한 식으로서 급수의 한 종류이다. 그러므로 등비급수는 등비수열, 급수, 부분합, 급수의 합 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있고, 중학교에서 학습하는 순환소수와도 밀접한 관련이 있다.



실제로 **등비급수** $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 **등비수열** $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 덧셈 기호 $+$로 연결한

식으로서 **급수**의 한 종류이다. 그 **부분합** $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$을 일반항으로 하는 수열의 극한(값)이 존재할 때 수렴하는 급수이다. 이 급수는 $a=0$ 또는 $-1<r<1$일 때 수렴하고, **급수의 합**은 0 또는 $\dfrac{a}{1-r}$가 된다. 또 모든 순환소수는 수렴하는 등비급수로 나타낼 수 있고, 그 합은 유리수이다.

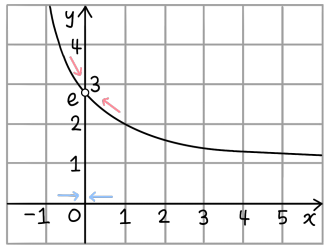
무리수 e

정의

무리수 e는 무엇인가요?

극한값 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$에 대하여 알아보자.

다음은 함수 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 그래프를 나타낸 것이다.



위의 표와 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 어떤 일정한 값에 가까워짐을 알 수 있다.

실제로 극한값 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$이 존재함이 알려져 있고, 이 극한값을

$$e$$

로 나타낸다.

이때 e는 무리수이고 그 값은

$$e=2.71828182845904\cdots$$

임이 알려져 있다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

1 극한값 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$를 무리수 e를 사용하여 나타내보자.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^{2}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right\}^{2}=e^{2}$$

❷ 극한값 $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$를 무리수 e를 사용하여 나타내보자.

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\{1+(-x)\}^{-\left(-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{-1}$$

더 알아보기

π는 원주율라고 부릅니다. e를 부르는 이름은 없나요?

e는 π와 함께 수학에서 가장 중요한 상수 중 하나로서 오일러 수, 자연상수, 네이피어 상수 등의 다양한 이름으로 불린다.

❶ 오일러 수(Euler's number)

이 이름은 수학자 레온하르트 오일러(Leonhard Euler, 1707~1783)의 업적에서 유래했다. 오일러가 무리수 e의 기호를 처음 사용하였고, e가 무리수임을 증명하였다. 이를 지수함수 및 자연로그 등 다양한 수학적 맥락에서 체계적으로 정립했기 때문에 그의 이름이 붙었다.

❷ 자연상수(Natural constant)

이 이름은 무리수 e가 수학의 여러 분야에서 매우 '자연스럽게' 등장하는 상수라는 점에서 비롯되었다. 특히 자연로그 $\ln x$의 밑으로 사용할 때 미분과 적분의 성질이 가장 단순하고 깔끔하게 표현되며, 복리 계산, 확률, 미분방정식, 극한 등 다양한 실생활 및 수학적 맥락에서 핵심적인 역할을 한다. 이러한 수학적 보편성과 기본성 때문에 자연상수라고 불린다.

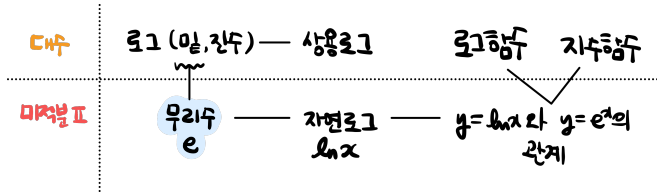
❸ 네이피어 상수(Napier's constant)

이 이름은 수학자 존 네이피어(John Napier, 1550~1617)의 업적에서 유래했다. 네이피어는 로그(logarithm)의 개념을 최초로 도입한 인물로, 현대의 자연로그와는 다소 다른 정의였지만, 지수 개념과 연계된 로그의 연산 체계를 수학에 도입한 것으로 알려져 있다. 네이피어의 이런 업적을 기리기 위해 때때로 e를 네이피어 상수라고 부르기도 한다.

개념

무리수 e와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

무리수 e는 자연로그, 로그함수, 지수함수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 밑이 10인 **상용로그**와 달리 **무리수** e를 밑으로 하는 **로그**를 **자연로그**라 하는데, 0보다 큰 실수 x에 대하여 x의 자연로그 값을 대응시켜주는 **로그함수** $y=\ln x$는 도함수가 $\frac{1}{x}$인 함수이고, 그 역함수인 **지수함수** $y=e^x$는 도함수가 자기 자신 e^x인 독특한 함수이다. 이들 함수를 정의하고 그 성질을 다루려면 무리수 e의 개념이 필수적이다.

심화(참고)

- e가 무리수라는 건 어떻게 알 수 있나요?

$x=\frac{1}{n}$ (n은 자연수)이라 하면, $x\to 0$일 때 $n\to\infty$이고

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

이 성립한다. 한편

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

이고 다음이 성립한(다는 것이 알려져 있)다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

이로부터 다음을 얻는다.

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

이 사실을 이용하여 e가 무리수임을 설명해보자.

e를 유리수 즉, $e=\frac{p}{q}$ (p, q는 양의 정수)라 가정하면, $2<e<3$이므로 $q>1$이고, 위 등식의 우변 일부 항들을 좌변으로 이항한 뒤 양변에 $q!$을 곱하면 다음 등식

$$q!\left(e-1-1-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{q!}\right)=q!\left(\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots\right)$$

을 얻는다. 이 등식의 좌변

$$q!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\cdots-\frac{1}{q!}\right)$$

은 정수이다. 그러나 등식의 우변은

$$q!\left(\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots\right)=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots$$

$$\leq \frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\cdots=\frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{q}<1$$

이므로 정수가 아니다. 이것은 모순이다. 따라서 e는 무리수이다.

- **e가 들어간 공식 중에 `세상에서 가장 아름다운 수학 공식'이라 불리는 공식이 있다고 들었는데 어떤 공식인가요?**

18세기 스위스의 수학자 레온하르트 오일러(Euler, L., 1707 ~ 1783)는 수학에서 큰 의미가 있는 상수들 0, 1, π, i, e를 하나로 연결하는 놀라운 공식을 발견하였다. 바로

$$e^{i\pi}+1=0$$

이다. 이 식을 흔히 **'오일러의 공식'** (또는 **'오일러의 항등식'**)이라 부르며, 보다 일반적인

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

에서 $x=\pi$를 대입하여 얻어진 특별한 경우이다.

이 공식에는 수학의 여러 분야가 모여 있는데,

- 0과 1은 산술,
- π는 기하학,
- i는 대수학,
- 그리고 e는 해석학에서 매우 중요한 수이다.

결국 이 공식은 산술 대수 기하 해석을 한 번에 연결하는 다리와 같다고 볼 수 있다. 그래서 이 식을 '세상에서 가장 아름다운 수학 공식' 이라고 부르기도 하며, 특히 무리수 e는 오일러의 이름을 따서 **'오일러의 수'** 라고도 한다.

자연로그 自然log; natural logarithm

정의

자연로그는 무엇인가요?

양의 실수 x에 대하여 무리수 e를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 x의 **자연로그**라 하며, 이것을 간단히

$$\ln x$$

로 나타낸다. 즉, $\ln x = \log_e x$이다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

$\ln 1$, $\ln 2$, $\ln e$, $\ln e^3$, $\ln\left(\frac{1}{e^4}\right)$ 등은 모두 자연로그로 표현된 값이다. 특히, 로그의 정의와 성질에 따라 다음의 값을 갖는다:

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1, \quad \ln e^3 = 3\ln e = 3,$$

$$\ln\left(\frac{1}{e^4}\right) = \ln e^{-4} = -4\ln e = -4$$

의미

자연로그는 왜 '자연'로그라고 부르나요?

자연로그는 영어로 natural logarithm이라 한다. 여기서 natural은 '자연의, 본질적인' 이라는 뜻으로, 밑이 e인 로그가 미분, 적분, 지수함수, 확률, 복리 계산 등 수학의 거의 모든 분야에서 자연스럽게 나타나는 현상을 설명하는 데 적합하기 때문에 붙여진 이름이다. 자연로그의 기호인 $\ln x$는 '자연스러운 로그' 를 뜻하는 라틴어 logarithmus naturalis의 약자이다.

개념

자연로그 $\ln x$는 어떤 성질을 가지고 있나요?

임의의 양의 실수 x에 대하여 x의 자연로그 값 $\ln x$를 대응시켜주는 양의 실수 전체의

집합에서 실수 전체의 집합으로의 로그함수

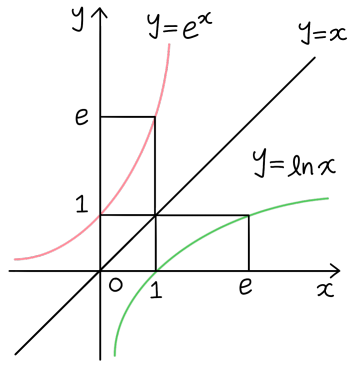
$$y = \ln x$$

는 그 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나고, 점근선은 y축이며, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 일대일대응이다.

그러므로 역함수가 존재하는데, $y = \ln x$의 역함수는 e를 밑으로 하는 지수함수

$$y = e^x$$

이다. 두 함수는 서로의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



개념

$y = \ln x$의 다른 성질은 없나요?

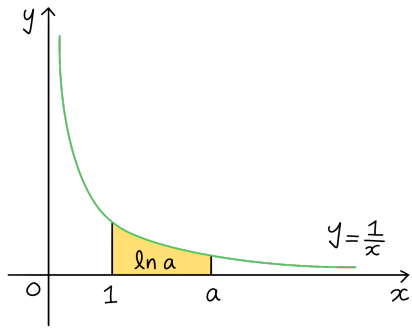
로그함수 $\ln x$는 도함수가

$$y' = \frac{1}{x}$$

인 함수로서, 세 직선 x축, $x = 1$, $x = a(a > 1)$와 곡선 $y = \frac{1}{x}$로 둘러싸인 영역의 넓이가 바로 $\ln a$이다. 즉,

$$\ln a = \int_1^a \frac{1}{x} dx$$

이다.



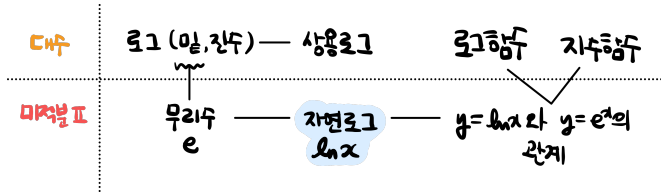
한편, 지수함수 $y = e^x$는 도함수가 자기 자신인 즉,

$$y' = e^x$$

인 매우 독특한 함수이다.

개념 **자연로그와 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?**

자연로그는 무리수 e, 로그함수, 지수함수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **자연로그**는 밑이 10인 **상용로그**와 달리 무리수 e를 밑으로 하는 **로그**로서, 0보다 큰 실수 x에 대하여 x의 자연로그 값을 대응시켜주는 **로그함수** $y = \ln x$는 도함수가 $\frac{1}{x}$인 함수이고, 그 역함수인 **지수함수** $y = e^x$는 도함수가 자기 자신 e^x인 독특한 함수이다.

(삼각함수의) 덧셈정리 덧셈定理; addition theorem

정의

삼각함수의 덧셈정리는 무엇인가요?

두 각 α, β에 대하여 $\alpha+\beta$와 $\alpha+(-\beta)$ 즉, $\alpha-\beta$의 사인, 코사인, 탄젠트에 대하여 다음 공식이 성립한다. 이를 삼각함수의 **덧셈정리**라 한다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

특별히 $\alpha=\beta$로 두면 다음 식을 얻을 수 있다.

- $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
- $\tan 2\alpha=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

또 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$을 이용하면 $\cos 2\alpha$에 대한 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin 75^\circ$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\tan 15^\circ$의 값을 다음과 같이 계산할 수 있다.

❶ $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

❷ $\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

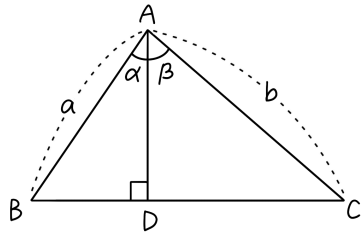
❸ $\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\dfrac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\times\tan 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\times 1}=2-\sqrt{3}$

개념

삼각함수의 덧셈정리를 시각적으로 나타낼 수도 있나요?

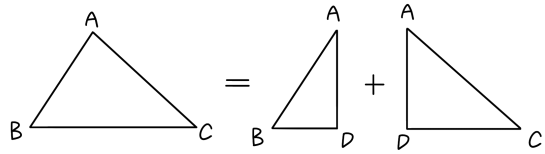
삼각형의 넓이 사이의 관계를 활용하여 삼각함수의 덧셈정리를 알아보자. 먼저 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

❶ 그림과 같이 삼각형 ABC에서 꼭짓점 A에서 변 BC에 수선을 내려 그 발을 D라 하자. 또 $\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{AC}=b$, $\angle\mathrm{DAB}=\alpha$, $\angle\mathrm{CAD}=\beta$이고 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$이라 하자.



두 직각삼각형 △ABD, △ADC에서 $\mathrm{AD}=a\cos\alpha=b\cos\beta$ 가 된다.

큰 삼각형의 넓이는 두 직각삼각형의 넓이의 합으로 나타낼 수 있다.



먼저 △ABC의 각 A는 $\alpha+\beta$이므로

$$\triangle\mathrm{ABC}\text{ 의 넓이}=\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta)$$

이다. 한편 작은 두 직각삼각형의 넓이는 다음과 같다.

$$\triangle\mathrm{ABD}\text{ 의 넓이}=\frac{1}{2}\times\mathrm{BD}\times\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\times a\sin\alpha\times b\cos\beta,$$

$$\triangle\mathrm{ADC}\text{ 의 넓이}=\frac{1}{2}\times\mathrm{CD}\times\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\times b\sin\beta\times a\cos\alpha.$$

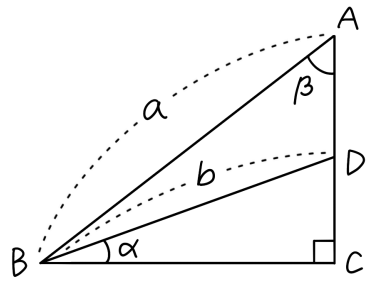
따라서

$$\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ab\left(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\right)$$

가 되고, 양변을 $\frac{1}{2}ab$로 나누어 다음과 같이 사인함수의 덧셈정리 공식을 얻을 수 있다.

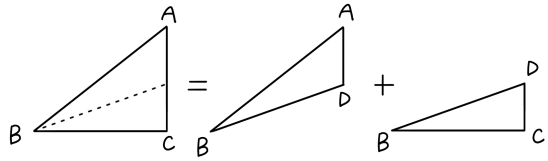
$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

2 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 $\triangle ABC$에서 점 D를 변 AC 위에 잡고,
$AB=a,\ BD=b,\ \angle DBC=\alpha,\ \angle BAC=\beta$이며 $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$라 하자.



직각삼각형 $\triangle ABC$, $\triangle DBC$에서 $BC=a\sin\beta=b\cos\alpha$, $AC=a\cos\beta$ 가 성립한다.

큰 직각삼각형의 넓이는 두 삼각형의 넓이의 합으로 나타낼 수 있다.



세 삼각형의 넓이를 각각 구하면 다음과 같다.

$$\triangle ABC\text{ 의 넓이}=\frac{1}{2}\times AC\times BC=\frac{1}{2}\times a\cos\beta\times b\cos\alpha$$

$$\triangle BCD\text{ 의 넓이}=\frac{1}{2}\times BD\times BC\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times b\times a\sin\beta\times\sin\alpha,$$

$$\triangle ABD\text{ 의 넓이}=\frac{1}{2}\times AB\times BD\times\sin\angle ABD=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$$

여기서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos(\alpha+\beta)$ 이므로

$$\frac{1}{2}ab\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}ab\sin\alpha\sin\beta+\frac{1}{2}ab\cos(\alpha+\beta)$$

이고, 양변을 $\frac{1}{2}ab$로 나누어 다음과 같이 코사인함수의 덧셈정리 공식을 얻을 수 있다.

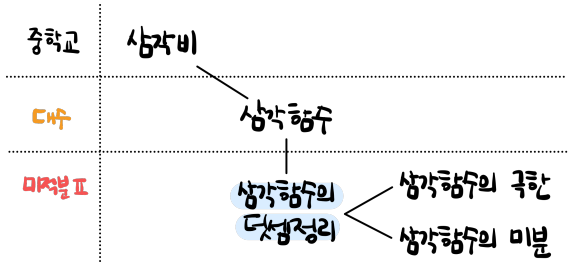
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

위와 같이 두 경우 모두 삼각형의 넓이 간의 관계를 비교하여 삼각함수의 덧셈공식을 자연스럽게 도출할 수 있다.

개념

삼각함수의 덧셈정리와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

삼각함수의 덧셈정리는 삼각비, 삼각비를 일반화한 삼각함수, 삼각함수의 미분 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 삼각함수의 **덧셈정리**는 삼각형의 내각에 대하여 정의된 **삼각비**를 임의의 실수에 대한 값으로 확장하여 실수 전체의 집합에서 정의되는 함수로 일반화한 **삼각함수**에 대한 정리이다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면 $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ 등의 특수각 뿐 아니라 이들 각도를 더하거나 빼서 얻는 각도의 sin, cos, tan 값을 찾을 수 있고, 삼각함수의 미분에서 가장 기본이 되는 미분 공식인 $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$도 구할 수 있다.

매개변수媒介變數; parameter

정의

매개변수는 무엇인가요?

두 변수 x와 y의 관계가 변수 t를 매개로 하여

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

와 같이 나타내어질 때, 변수 t를 **매개변수**라고 한다. 그리고 $x = f(t),\ y = g(t)$를 '매개변수 t로 나타낸 함수'라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 지면과 이루는 각도가 θ인 방향으로 처음 속력 v_0로 지면에서 던진 물체의 t초 후의 위치를 (x, y)라 하면

$$x = v_0 \cos\theta \times t\ ,\quad y = v_0 \sin\theta \times t - \frac{1}{2}gt^2$$

이다(여기서 g는 중력가속도임.).

한편 위 식에서 t를 소거하면 다음과 같은 이차함수의 식을 얻는다.

$$y = \tan\theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x^2.$$

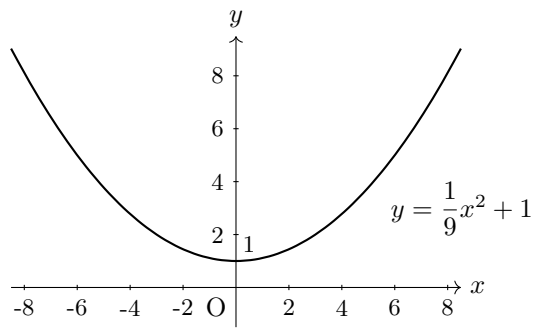
거꾸로 이 이차함수의 식을

$$x = v_0 \cos\theta \times t\ ,\quad y = v_0 \sin\theta \times t - \frac{1}{2}gt^2$$

와 같이 매개변수 t로 나타낼 수 있다.

❷ 위에서 살펴본 것처럼 시간에 따라 움직이는 물체의 운동을 표현할 때 매개변수가 종종 활용된다. 다른 예로, 좌표평면에서 시간 t에 따라 움직이는 점 (x, y)에 대하여 $x = 3t,\ y = t^2 + 1$과 같이 나타내면, 시간 t가 변함에 따라 점 (x, y)가 이동하는 자취를 수학적으로 나타낼 수 있다. 여기서 t는 매개변수로 작용하며, 평면에서 한 점의 위치를 나타내는 두 성분 x와 y의 정보를 t가 동시에 조절한다. 이 식에서도 t를

소거하면 이차함수 식 $y = \frac{1}{9}x^2 + 1$을 얻을 수 있다.





함수 $y = f(x)$의 두 변수 x와 y를 항상 매개변수 t로 나타낼 수 있나요?

임의의 함수의 식 $y = f(x)$에서 $x = t$라 하면

$$x = t\,, \quad y = f(t)$$

이므로, 두 변수 x와 y를 매개변수 t로 나타낼 수 있다. 이처럼 모든 함수의 식 $y = f(x)$의 두 변수 x와 y는 항상 매개변수 t로 나타낼 수 있다.

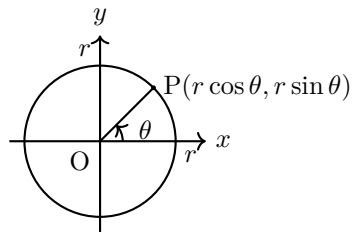
3 중심이 원점이고 반지름이 r인 원

$$x^2 + y^2 = r^2$$

위의 임의의 점 (x, y)을 나타내는 두 변수 x와 y 사이의 관계를 하나의 함수 식 $y = f(x)$로 나타낼 수는 없다. 그러나 두 변수 사이의 관계를

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta$$

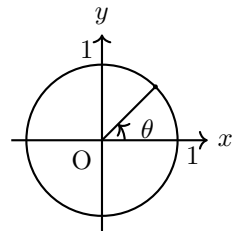
와 같이 매개변수 θ를 이용하면 나타낼 수 있다. 이때 θ는 각도를 나타내는 매개변수이다.



개념

매개변수는 왜 배우나요?

좌표평면에 그려진 곡선 중에는 어떤 함수 $y=f(x)$의 그래프로 나타내어지는 경우도 있지만, 하나의 함수로는 표현하기 어렵거나 불가능한 경우도 있다. 예를 들어, 방정식 $x^2+y^2=1$로 나타내어지는 원은 하나의 함수 식 $y=f(x)$로 나타낼 수 없다.



이 경우 매개변수 θ를 도입해서 다음과 같이 **두 개의 식으로 나누어** 곡선을 표현할 수 있다.

$$x=\cos\theta, \quad y=\sin\theta \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

이처럼 매개변수를 이용하면 어떤 함수의 그래프로 나타내어지는 곡선 뿐 아니라 하나의 함수의 그래프로 나타내기 어려운 곡선 역시 식으로 나타낼 수 있다. 즉, 다양한 곡선을 식으로 표현하고 분석하기 위해 매개변수를 배우는 것이다.

개념

매개변수로 나타난 함수의 미분은 어떻게 하나요?

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분 가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구해보자. 먼저, 매개변수 t의 증분 Δt에 대한 x의 증분을 Δx라 하고 y의 증분을 Δy라 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$$

이다.

함수 $x = f(t)$가 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$이므로 함수 $x = f(t)$의 역함수가 존재하고 그 역함수가 연속임이 알려져 있다. 따라서 $\Delta x \to 0$일 때 $\Delta t \to 0$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

의미

매개변수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'매(媒)'는 '사이에서 연결해 주는 것', '매개하다'는 뜻이며, '개(介)'는 '사이에 끼어 있는 존재'를 의미한다. 두 글자가 합쳐진 '매개(媒介)'는 무언가를 직접 연결하지 않고 중간에서 이어주는 역할을 한다는 뜻이다. 즉, '매개변수'는 둘 이상의 **변수**들 사이에서 **중간 역할**을 하면서 변수들을 연결해주는 **변수**를 말한다.



변수를 영어로는 parameter라고 한다. 이 단어는 고대 그리스어 *para*(곁에)와 *metron*(측정, 기준)에서 유래되었다. 즉, parameter는 기준이 되는 값 곁에서 함께 변하는 수라는 의미를 가진다. 수학에서는 두 변수 간의 관계를 직접적으로 표현하기 어려울 때, 또는 곡선이나 운동의 경로 등을 시간, 각도 등과 같은 제3의 변수를 이용해 나타내고자 할 때 매개변수를 사용한다. 이때 매개변수로 t 또는 θ가 종종 사용된다.

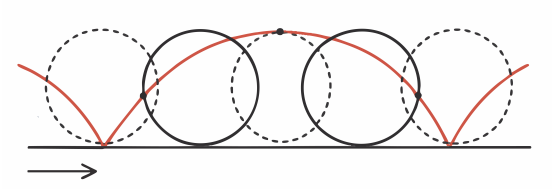
- t는 시간(time)을 의미하는 영단어의 첫 글자로서 곡선의 변화를 시간의 흐름에 따라 기술하는 경우에 매개변수로 많이 사용한다.
- θ는 회전에서 각도을 매개변수로 할 때 많이 사용한다.

더 알아보기

매개변수로 나타낼 수 있는 곡선의 다른 예는 없나요?

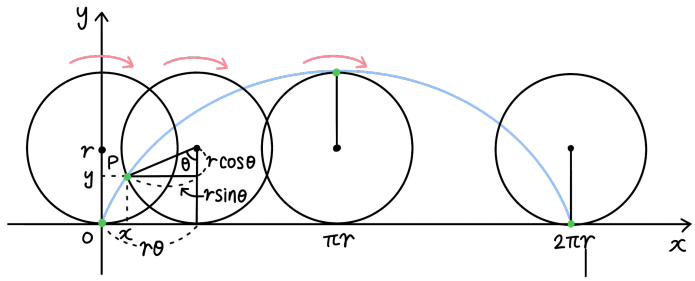
매개변수를 이용하면 좌표평면 위에 하트 모양의 곡선, 네잎 클로버 모양의 곡선 등과 같은 다양한 곡선을 표현할 수 있다.

다음 그림과 같이 직선을 따라 원을 굴렸을 때, 원주 위의 고정된 한 점이 그리는 자취를 사이클로이드(cycloid)라고 한다. 사이클로이드라는 이름은 1599년 갈릴레오(Galileo Galilei, 1564~1642)에 의해 붙여졌다.



사이클로이드를 매개변수를 이용하여 나타내 보자.

그림과 같이 좌표평면에서 중심이 $(0, r)$이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 고정된 한 점 $(0, 0)$에 대하여, 원이 $\theta(0 \le \theta \le 2\pi)$만큼 회전한 뒤의 $(0, 0)$이 이동한 위치를 점 P라 하면, 점 P의 x좌표는 원이 움직인 거리 $r\theta$에서 $r\sin\theta$를 빼면 되고 y좌표는 원의 반지름의 길이 r에서 $r\cos\theta$를 빼면 된다.



이로부터 사이클로이드의 임의의 점의 x좌표와 y좌표를 매개변수 θ로 나타낸 다음 식을 얻는다.

$$x = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \qquad y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta).$$

다음으로 매개변수로 나타낸 함수에서 도함수 $\frac{dy}{dx}$를 구해 보자.

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1-\cos\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = r\sin\theta$$

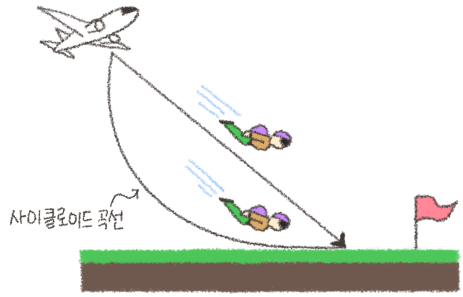
이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\sin\theta}{r(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \quad (\text{단}, 0 < \theta < 2\pi)$$



사이클로이드 곡선이 가지는 특징은 무엇일까요?

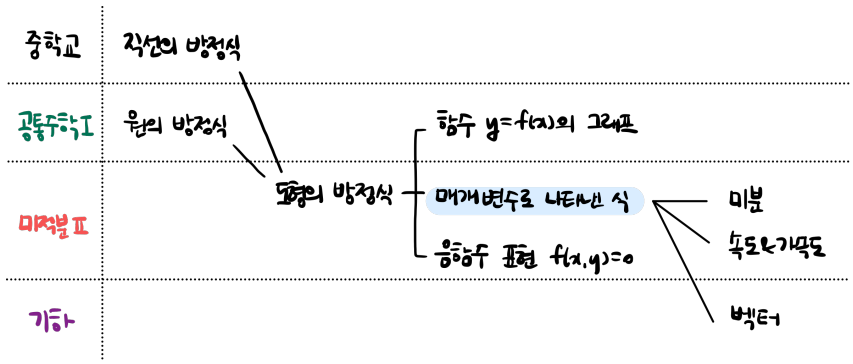
사이클로이드 곡선은 우리 주변의 실생활에도 많이 찾아볼 수 있다. 직선과 사이클로이드 곡선의 미끄럼틀을 만든 후 같은 높이에서 공을 굴렸을 때, 최단 거리인 직선 경로가 가장 빠르다고 생각할 수 있지만, 사이클로이드 곡선을 따라 내려가는 것이 가장 빠르다.



개념

매개변수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

매개변수는 직선과 곡선을 식으로 표현하는데 사용된다는 점에서 함수 식, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 방정식, 음함수 표현 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



직선을 좌표평면에 나타내면, 직선의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 두 좌표 x와 y 사이의 관계는 일반적으로 음함수 표현인 $f(x, y)=0$꼴의 직선의 방정식 $ax+by+c=0$ ($a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$)으로 나타낼 수 있고, 그 중 y가 x의 함수인 경우 즉, $b \neq 0$인 경우에는 $y=f(x)$꼴의 함수 식 $y=mx+n$으로 나타낼 수 있다. 즉, 좌표평면에서 모든 직선은 직선의 방정식이라 불리는 $f(x, y)=0$꼴의 음함수 표현 $ax+by+c=0$ ($a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$)으로 나타낼 수 있고, 그 중 y축과 평행한 직선을 제외한 직선들은 모두 함수 식 $y=mx+n$의 형태로 나타낼 수 있다.

한편 직선과 더불어 수학에서 가장 중요하면서도 기본이 되는 곡선인 원은 일반적으로 음함수 표현인 $f(x, y)=0$꼴의 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$으로 나타낼 수 있다. 그러나 원의 방정식의 두 변수 x와 y 사이의 관계는 함수가 아니므로 이들 사이의 관계를 $y=f(x)$꼴의 함수 식 하나로는 나타낼 수 없다. 그 대신 **매개변수**를 이용하여

$$x=r\cos t, \qquad y=r\sin t$$

와 같이 즉, 벡터 $(r\cos t, r\sin t)$로 나타낼 수 있다. 이 방식은 좌표평면에서 도형이 그려지는 과정과 방향을 보여 줄 뿐 아니라 미분 $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있게 해주고, 곡선을 시간의 변화에 따른 물체의 운동의 관점에서 기술하는 방법으로서 움직이는 물체의 속도, 가속도와 같은 물리량까지 쉽게 분석할 수 있게 해준다.

정리하면 직선의 방정식, 원의 방정식과 같은 도형의 방정식은 좌표평면에 그려진 직선, 원 등의 도형을 음함수 표현 $f(x, y)=0$의 형태로 나타낸 것이고, 그 중 y가 x의 함수인 경우에는 $y=f(x)$꼴의 함수 식으로 나타낼 수 있다. 이런 점에서 함수 식 $y=f(x)$는

음함수 표현 $f(x,y)=0$의 특수한 경우에 해당함을 알 수 있다. 한편 $y=f(x)$ 꼴의 함수식으로 나타내어지는 모든 곡선은 매개변수를 이용하여

$$x=t,\ y=f(t)$$

즉, $(t,f(t))$와 같이 벡터로 나타낼 수도 있다. 이처럼 매개변수를 이용하면 함수 $y=f(x)$의 그래프 뿐 아니라 원의 예에서 보듯이 함수의 그래프가 아닌 곡선도 표현할 수 있다.

음함수陰函數; Implicit function

정의

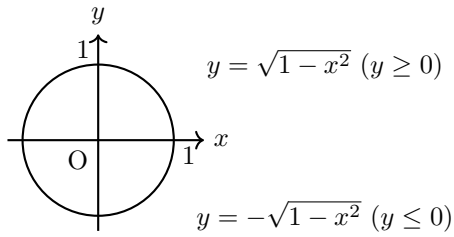
음함수는 무엇인가요?

방정식 $f(x, y) = 0$에서 x와 y의 값의 범위를 적당히 정하면 y는 x의 함수가 된다. 이와 같은 의미에서 방정식 $f(x, y) = 0$과 같이 나타내는 것을 y의 x에 대한 **음함수** 표현이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 원의 방정식 $x^2 + y^2 = 1$은 $-1 < x < 1$에서 x에 대응하는 y의 값이 2개이므로 y는 x의 함수가 아니다. 그러나 위쪽 반원 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 또는 아래쪽 반원 $y = -\sqrt{1 - x^2}$은 함수로 나타낼 수 있다.



이 두 함수는 각각 구간 $[-1, 1]$을 정의역으로 하는 함수이다. 이때 $x^2 + y^2 - 1 = 0$는 y의 x에 대한 음함수 표현이다.

❷ 방정식 $xy - 1 = 0$은 $y = \dfrac{1}{x}$의 음함수 표현이다.

의미

음함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'음(陰)'은 '응달'을, 즉 겉으로 드러나지 않음을 뜻하며, '함수(函數)'는 대응 관계를 의미한다. 따라서 '음함수(陰函數)'는 y가 x의 함수라는 것이 잘 보이지 않는 관계를 나타낸다.

陰 函 數

그늘 음 상자 함 셈(수) 수

영어로는 implicit function이라고 하며, implicit에는 '암시적인, 암묵의'라는 뜻으로 그대로 번역하면 '암묵적으로 정의된 함수' 라는 의미이다. 이는 $y = f(x)$와 같이 명시적으로 주어지지 않았기 때문에 implicit function이라고 한다.

개념

음함수는 왜 필요한가요?

중학교와 고등학교에서 배운 함수는 대부분 $y = f(x)$와 같이 y를 x에 대한 식으로 명확하게 나타낸 형태이다. 예를 들어 $y = x^2 + 1$, $y = \sin x$처럼 변수 x가 주었을 때, y를 쉽게 계산할 수 있다.

그러나 모든 도형의 방정식을 $y = f(x)$라는 하나의 식으로 간단히 표현할 수 있는 것은 아니다. 예를 들어, 다음과 같은 식을 보자.

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

이 식은 x와 y 사이의 관계는 분명히 존재하지만, 이 식을 간단히 $y = f(x)$ 형태로 나타내는 것은 쉽지 않다.

함수 $y = f(x)$는 편리하지만 **표현 범위가 제한적**이므로 보다 포괄적인 방법인 **음함수 표현**을 사용한다. 이때 $y = f(x)$ 형태는 $F(x, y) = y - f(x) = 0$처럼 음함수 표현의 특수한 경우가 된다.

음함수는 단순히 복잡한 곡선을 표현하는 데에만 쓰이지 않는다. 예를 들어 역함수를 구하거나, 음함수 미분법을 이용해 도함수를 계산할 때, 또는 곡선의 접선의 기울기를 구하는 문제나 다변수 함수의 변화를 분석할 때도 유용하게 사용된다. 즉, 함수가 반드시 $y = f(x)$처럼 풀어진 형태로 주어질 필요는 없다. x와 y의 관계를 음함수로 표현하고 그 성질을 분석할 수 있다면, 보다 복잡한 문제도 효과적으로 해결할 수 있다.

개념

음함수의 미분은 어떻게 하나요?

음함수 표현 $x^2+y^2-1=0$에서 $\frac{dy}{dx}$를 구해보자. y를 x의 함수로 보고, 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(1)=0$$

이때, 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

이므로

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

이다. 따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad (\text{단, } y\neq 0)$$

일반적으로 음함수의 미분법은 다음과 같다.

음함수의 미분법

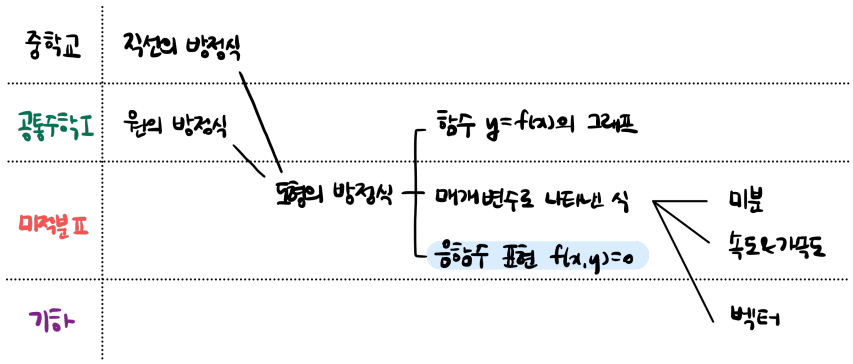
x의 함수 y가 음함수의 표현 $f(x,y)=0$의 꼴로 주어질 때에는 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

음함수의 미분법은 $f(x,y)=0$을 $y=g(x)$의 꼴로 바꾸기 어려운 함수를 미분할 때 이용하면 편리하다.

개념

음함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

음함수는 도형을 방정식의 형태로 표현하는 방법으로서 함수 식, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 방정식, 매개변수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



직선을 좌표평면에 나타내면, 직선의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 두 좌표 x와 y 사이의 관계는 일반적으로 **음함수** 표현인 $f(x, y)=0$꼴의 직선의 방정식 $ax+by+c=0$ ($a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$)으로 나타낼 수 있고, 그 중 y가 x의 함수인 경우 즉, $b \neq 0$인 경우에는 $y=f(x)$꼴의 함수 식 $y=mx+n$으로 나타낼 수 있다. 즉, 좌표평면에서 y축과 평행하지 않은 직선들의 경우 함수 식 $y=mx+n$의 형태로 나타낼 수 있고, y축과 평행한 직선을 포함한 모든 직선은 직선의 방정식이라 불리는 $f(x, y)=0$꼴의 음함수 $ax+by+c=0$ ($a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$)의 형태로 나타낼 수 있다.

한편 직선과 더불어 수학에서 가장 중요하면서도 기본이 되는 곡선인 원은 좌표평면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아니므로 함수 식 하나로는 나타낼 수 없고, 매개변수를 이용하여

$$x=r\cos t, \qquad y=r\sin t$$

와 같이 즉, 벡터 $(r\cos t, r\sin t)$로 나타내거나, 음함수 표현인 $f(x, y)=0$꼴의 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$으로 나타낼 수 있다.

정리하면 직선의 방정식, 원의 방정식과 같은 도형의 방정식은 좌표평면에 그려진 직선, 원 등의 도형을 음함수 표현 $f(x, y)=0$을 통해 나타낸 것이고, 그 중 y가 x의 함수인 경우에는 $y=f(x)$꼴의 함수 식으로 나타낼 수 있다. 이런 점에서 함수 식 $y=f(x)$는 음함수 표현 $f(x, y)=0$의 특수한 경우에 해당함을 알 수 있다.

- **$f(x,y)=0$이 주어지면 항상 y는 x의 함수가 될 수 있나요?**

x와 y 사이의 관계가 $f(x,y)=0$으로 주어졌을 때, 그 식이 특정 조건을 만족하면 y를 x에 대한 함수처럼 생각할 수 있다는 사실을 보장해 주는 내용으로 음함수의 정리가 있다.

예를 들어, 중심이 $(0,0)$이고 반지름이 1인 원을 생각해보자.

$$x^2+y^2=1$$

은 x와 y가 동시에 나오는 관계식이지만, 양변을 정리하면 다음과 같이 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

이처럼 주어진 식을 $y=f(x)$ 꼴로 바꿀 수 있다면, 우리는 y를 x에 대한 함수처럼 다룰 수 있다.

그런데, 복잡한 식일 때는?

어떤 식에서는 y를 명시적으로 풀어내는 것이 매우 어렵거나 불가능한 경우도 있다. 예를 들어, 다음 식을 보자.

$$x^3+y^3=6xy$$

이 식은 x와 y 사이의 관계를 나타내지만, $y=f(x)$ 형태로 정리하기는 매우 복잡하다. 그럼에도 불구하고 음함수의 정리에 따르면, 이런 식도 특정한 조건을 만족하면 y를 x에 대한 함수처럼 생각할 수 있으며, 미분도 가능하다는 사실을 보장해 준다.

음함수의 정리

식 $F(x,y)=0$이 어떤 점 (x_0,y_0)에서 정의되고, 점 (x_0,y_0)에서 다음 조건을 만족하면,

- $F(x_0,y_0)=0$
- $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$

점 (x_0,y_0)의 국소적인 근방에서는 y를 x의 함수로 나타낼 수 있으며, 이때 y의 미분값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

여기서 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$와 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$는 이변수 함수 $F(x,y)$를 각각 x와 y로 편미분이다. $F(x,y)$가 두 변수 x,y를 가지는 함수일 때, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$는 y를 한 값으로 고정해 둔 채 x만 조금 변화시킬 때 F가 얼마나 변하는지를

나타내는 편미분이다. 즉 y는 변하지 않는다고 보고, x에 대한 F의 변화율을 구한 값이다. 정의는 다음과 같다.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h}$$

따라서 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$는 점 (x,y)에서 x방향으로의 기울기(변화율)를 뜻한다.

음함수의 정리는 <미적분II>에 어떻게 활용이 되고 있을까?

실제로 앞서 제시한 예제 또는 교과서에서 다루는 예제는 음함수의 정리의 조건을 잘 만족하는 경우만 다루고 있다. 따라서 어떤 식에서 y를 x에 대해 직접 풀 수 없더라도, 조건이 맞으면 $y = f(x)$처럼 생각하고 다룰 수 있다는 사실이 중요하다. 특히 미분을 통해 기울기나 변화율을 구하는 문제에서 음함수로 표현된 식도 다룰 수 있다는 것이 이 정리의 큰 의미이다.

이계도함수二階導函數; second derivative

정의

이계도함수는 무엇인가요?

미분가능한 함수 $f(x)$의 정의역의 각 원소에 미분계수를 대응시킨 함수가 $f'(x)$이므로, 미분계수의 변화를 나타내는 함수는 $f'(x)$가 미분 가능할 때 $f'(x)$의 도함수

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

이다. 이 함수를 $f(x)$의 **이계도함수**라고 하며, 이것을 기호로

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

다음은 대표적인 함수들에 대해 이계도함수를 구한 예이다.

❶ $f(x) = x^3$일 때 도함수는 $f'(x) = 3x^2$이고, 이것을 다시 미분하면 $f''(x) = 6x$가 된다.

❷ $f(x) = \sin x$일 때 도함수는 $f'(x) = \cos x$이고, 이 도함수를 다시 미분하면 $f''(x) = -\sin x$가 된다.

❸ $f(x) = x^2e^x$일 때 도함수는 $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$이다. 이 도함수를 다시 미분하면, $f''(x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$가 된다.

의미

이계도함수라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'이계(二階)'에서 '이(二)'는 '둘'을, '계(階)'는 '층계' 또는 '단계'를 뜻하여, 즉 두 번째 단계를 의미한다. 따라서 이계도함수란 어떤 함수 $f(x)$를 두 번 미분한 함수를 말한다.

二	階	導	函	數
둘 이	층 계	이끌 도	상자 함	셈(수) 수

영어로는 second derivative라고 하며, 미분을 두 번 적용한다는 의미를 직관적으로 드러낸 표현이다.

개념

이계도함수는 함수를 두 번 미분하듯이, 세 번 미분도 할 수 있나요?

이계도함수 f''를 구했듯이, 같은 원리로 세 번째 도함수 $f^{(3)}$ 뿐 아니라 n번째 도함수 $f^{(n)}$까지도 정의할 수 있다. 방법은 간단하다. 한 번 미분해 얻은 함수를 다시 미분하는 일을 필요한 차수만큼 연달아 수행하면 된다. 다만 그 차수까지 미분가능해야 한다는 조건이 필요하다. 즉 어떤 구간에서

$$f',\ f'',\ \dots,\ f^{(n)}$$

이 모두 존재하면 f가 그 구간에서 n차 미분가능하다고 하며,

$$f^{(3)}(x) = (f'')'(x), \qquad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

로 정의한다. (이를 **고계도함수**라 한다.)

예시로 $f(x) = x^4$이면

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2, \quad f^{(3)}(x) = 24x, \quad f^{(4)}(x) = 24$$

처럼 원하는 차수까지 미분이 가능하다.

반면 $f(x) = |x|$는 $x = 0$에서 미분가능하지 않아 $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$가 정의되지 않는다. 또 $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$는 $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$까지는 가능하지만

$$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$$

이 $x = 0$에서 정의되지 않아 2차 이상 도함수가 존재하지 않는다.

정리하면, f가 해당 차수까지 미분가능하다면 세 번, 더 나아가 n번도 미분할 수 있다. 조건이 충족되지 않는 지점에서는 고계도함수가 정의되지 않는다는 점을 함께 기억하면 된다.

개념

이계도함수는 그래프에서 어떤 의미가 있나요?

이계도함수는 함수의 기울기가 어떻게 변하고 있는지를 나타내는 값이다. 즉, **기울기의 순간변화율**, 다시 말해 순간변화율이 변화하는 속도를 나타낸다.

함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$는 다음과 같은 기하적인 의미를 가진다.

- $f''(x) > 0$는 기울기가 증가하고 있다는 뜻이다.
- $f''(x) < 0$는 기울기가 감소하고 있다는 뜻이다.
- $f''(x) = 0$인 점에서는 그래프의 볼록함이 바뀌는 지점일 수 있다.
  (참고로 그래프의 볼록함이 바뀌는 점 $(x, f(x))$를 **변곡점**이라 한다.)

예를 들어 함수 $f(x) = x^2$는 다음과 같다:

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2$$

이때 $f''(x) = 2 > 0$이므로, 이 함수의 그래프의 기울기(접선의 기울기)는 x가 커질수록 점점 증가한다.

반면 $f(x) = -x^2$는 $f''(x) = -2 < 0$이므로, 기울기는 x가 커질수록 점점 작아진다.

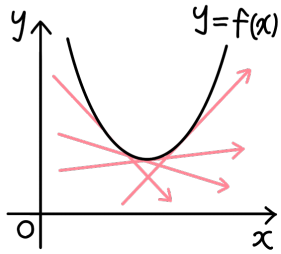
개념

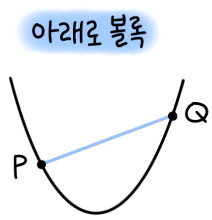
곡선의 아래로 볼록과 위로 볼록은 어떻게 알 수 있나요?

어떤 구간에서 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다고 하고, 위쪽에 있으면 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다고 한다.

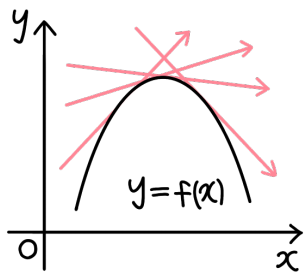
이계도함수를 이용하여 곡선의 아래로 볼록과 위로 볼록을 조사해 보자.

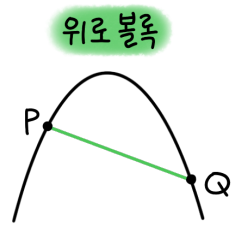
❶ 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 항상 $f''(x) > 0$이면 다음 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$의 접선의 기울기인 $f'(x)$는 증가하고 이 구간에서 곡선 $y = f(x)$는 아래로 볼록하다.





❷ 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 항상 $f''(x) < 0$이면 다음 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$의 접선의 기울기인 $f'(x)$는 감소하고 이 구간에서 곡선 $y = f(x)$는 위로 볼록하다.





이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선의 아래로 볼록과 위로 볼록

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서

❶ $f''(x) > 0$이면 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 **아래로 볼록**하다.

❷ $f''(x) < 0$이면 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 **위로 볼록**하다.

개념

이계도함수를 이용하여 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있나요?

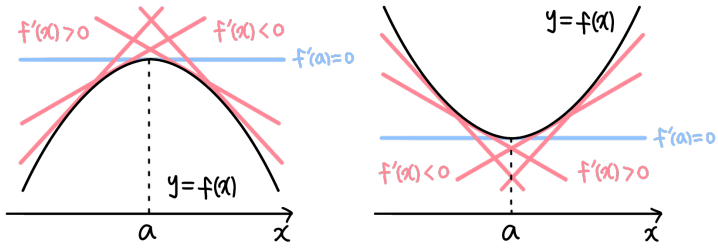
함수 $f(x)$가 이계도함수 $f''(x)$를 가지며 $f'(a) = 0$이라고 하자.

❶ $f''(a) < 0$ 인 경우: 함수 $f'(x)$는 $x = a$를 포함하는 작은 열린구간에서 감소하고 $f'(a) = 0$이므로 $f'(x)$의 부호는 $x = a$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀐다.

따라서 $f(x)$는 $x = a$에서 **극대**이다.

❷ $f''(a) > 0$ 인 경우: 함수 $f'(x)$는 $x = a$를 포함하는 작은 열린구간에서 증가하고 $f'(a) = 0$이므로 $f'(x)$의 부호는 $x = a$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 $f(x)$는 $x = a$에서 **극소**이다.



이를 정리하면 다음과 같다.

이계도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a) = 0$일 때

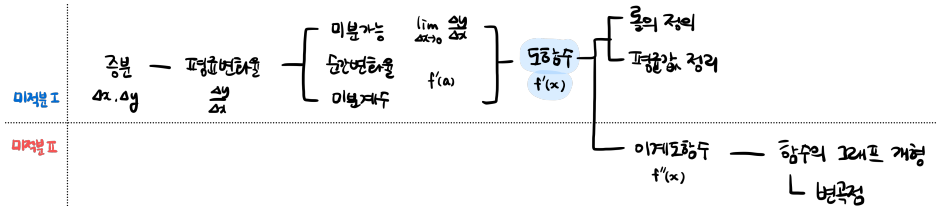
❶ $f''(a) < 0$이면 $f(x)$는 $x = a$에서 **극대**이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.

❷ $f''(a) > 0$이면 $f(x)$는 $x = a$에서 **극소**이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

개념

이계도함수와 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

이계도함수는 도함수의 도함수로서 도함수와 관련된 모든 용어와 개념, 변곡점, 함수의 그래프의 개형 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 함수 $f(x)$의 **이계도함수** $f''(x)$는 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때 $f'(x)$를 미분하여 얻을 수 있다. 그리고 그 값의 부호에 대한 정보로부터 $f(x)$의 그래프의 모양이 어떤 구간에서 아래로 볼록한지 위로 볼록한지 판단할 수 있고, $f'(a) = 0$인 점 $(a, f(a))$가 극대점인지 극소점인지도 판단할 수 있다. 또한 그래프의 모양이 위로 볼록에서

아래로 볼록으로 바뀌거나 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌는 점인 **변곡점**도 찾을 수 있다. 이를 통해 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 증가하는 구간과 감소하는 구간, 극점, 위로 볼록인 구간과 아래로 볼록인 구간, 변곡점 등에 대한 정보가 나타나도록 그릴 수 있다.

심화(참고)

- **이계도함수는 어디에 어떻게 활용되나요?**

  이계도함수 $f''(x)$는 함수의 그래프 개형을 판단하고, 극값의 종류를 구분하는 데 매우 유용하다.

  그래프의 굴곡이 바뀌는 지점인 변곡점의 위치를 판단할 때도 이계도함수가 사용된다. 이를 통해 어떤 점이 극대인지 극소인지를 쉽게 판별할 수 있고, 그래프가 위로 볼록한지 아래로 볼록한지를 해석할 수 있다.

  이계도함수는 물리학이나 공학과 같은 실생활 영역에서도 널리 활용된다. 예를 들어, 물체의 위치를 나타내는 함수 $s(t)$가 주어졌을 때, 1차 도함수 $s'(t)$는 속도를 의미하고, 이계도함수 $s''(t)$는 가속도를 의미한다. 즉, 시간에 따른 물체의 가속도 변화를 분석할 때 이계도함수가 핵심 역할을 한다.

  이뿐만 아니라, 경제학에서 생산량의 증가율, 생물학에서 성장 속도의 변화, 공학에서 물체의 진동이나 힘의 변화를 분석하는 데에도 이계도함수가 중요한 역할을 한다.

  이처럼 이계도함수는 단순히 수학 문제를 해결하는 데 그치지 않고, 함수의 성질을 정밀하게 분석하고, 다양한 실생활 현상을 설명하는 데 필수적인 도구로 활용된다.

변곡점變曲點; inflection point

정의

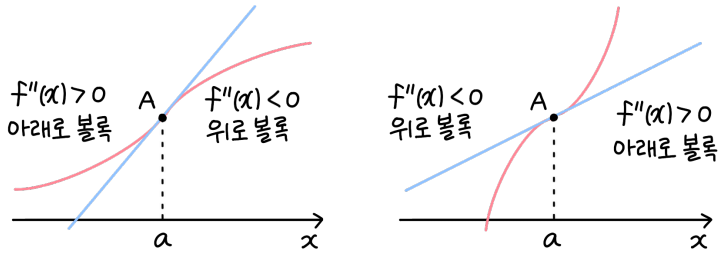
변곡점은 무엇인가요?

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀌거나 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀔 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 **변곡점**이라고 한다.



변곡점은 어떻게 찾나요?

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$가 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점이다.



그러므로 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$의 변곡점을 찾으려면, 먼저 $f''(a)=0$인 점을 찾은 뒤, 그 점을 경계로 $f''(x)$의 부호가 바뀌는지 확인하면 된다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 함수 $f(x)=x^3$의 이계도함수는 $f''(x)=6x$이다. 이 함수는 $f''(0)=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음수에서 양수로 바뀐다. 따라서 점 $(0,0)$은 곡선 $y=x^3$의 변곡점이다.

❷ 함수 $g(x)=x^3-6x^2$의 이계도함수는 $g''(x)=6x-12=6(x-2)$이다. 이 함수는 $g''(2)=0$이고, $x=2$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 음수에서 양수로 바뀐다. 따라서 점 $(2,-16)$은 곡선 $g(x)=x^3-6x^2$의 변곡점이다.

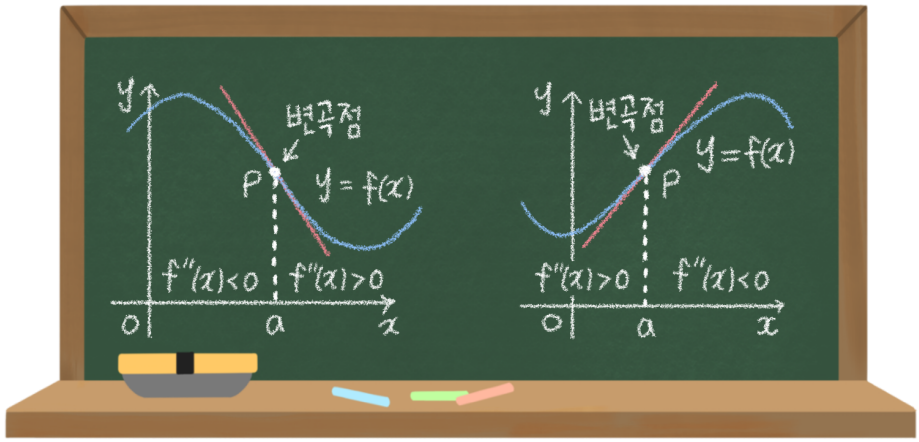
개념

변곡점은 그래프에서 어떤 의미가 있나요?

앞서 살펴보았듯이 변곡점은 함수의 그래프에서 볼록 방향이 바뀌는 지점을 의미한다. 그리고 이를 이계도함수 $f''(x)$의 부호 변화를 통해 찾을 수 있었다.

실제로 그림에서 보듯이 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서 곡선 $y=f(x)$의 볼록 방향이 달라지고 있다. 첫 번째 그림에서 $x<a$일 때는 그래프가 아래로 볼록($f''(x)<0$), $x>a$일 때는 위로 볼록($f''(x)>0$)하게 휘어진다. 반대로 두 번째 그림에서는 $f''(x)$의 부호가 $+$에서 $-$로 바뀌어, 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변한다.

이처럼 이계도함수 $f''(x)$의 부호가 바뀌는 지점에서 곡선의 굴곡이 바뀌며, 그 지점이 바로 변곡점이 됨을 확인할 수 있다. 그리고 변곡점을 지나는 곡선의 접선은 곡선을 가로지르는 형태로 나타남을 알 수 있다.



변곡점에서는 접선이 그래프와 만나는 방식도 달라진다. 변곡점에서는 접선이 곡선을 위 또는 아래에서만 접하지 않고, 곡선이 접선을 가로지르는 형태로 나타난다.

의미

변곡점이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'변(變)'은 '변하다', '곡(曲)'은 '굽은 형태', '점(點)' 은 '위치'를 뜻한다. 즉 변곡점은 곡선이 **굽는 성질이 바뀌는 점**이다.

變 曲 點

변할 변 굽을 곡 점 점

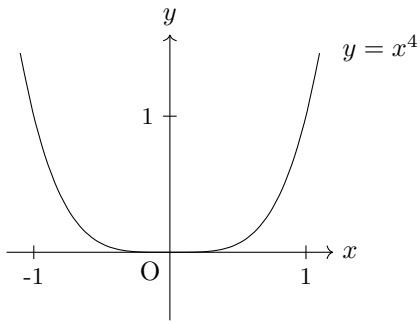
변곡점을 뜻하는 영단어 inflection point는 라틴어 *inflectere*(= 안으로 구부리다, 굽히다)에서 유래했으며, inflection은 '굴절'이라는 뜻을 가진다.

개념

$f''(a)=0$인 점 $(a, f(a))$는 모두 변곡점인가요?

$f''(a)=0$이라고 해서 점 $(a, f(a))$가 반드시 $f(x)$의 그래프의 변곡점이 되는 것은 아니다. 변곡점이 되기 위해서는 $f''(a)=0$일 뿐 아니라 $f''(x)$의 부호가 $x=a$의 좌우에서 바뀌어야 한다.

예를 들어, 함수 $f(x)=x^4$의 그래프를 살펴보자.



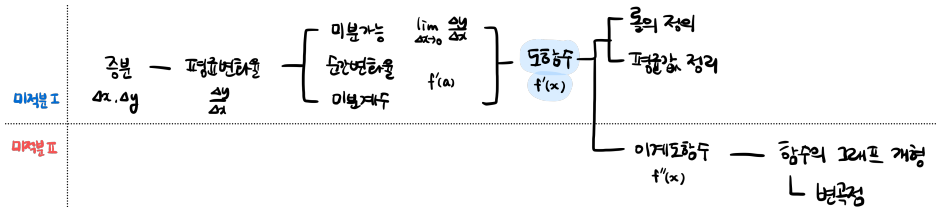
$f(x)$의 이계도함수는 $f''(x)=12x^2$이므로 $f''(0)=0$이다. 그러나 $x\neq 0$일 때 $f''(x)>0$이므로 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다. 따라서, 점 $(0,0)$은 $f(x)=x^4$의 그래프의 변곡점이 아니다. 실제로 위 그림에서 보듯이 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 그래프의 모양은 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀌지 않으며 항상 아래로 볼록임을 알 수 있다.

이처럼 $f''(a)=0$이라는 조건만 보고 변곡점 여부를 판단해서는 안되며, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는지 확인해야 한다.

개념

변곡점과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

변곡점은 도함수, 이계도함수, 함수의 그래프 개형 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **변곡점**은 함수의 그래프 모양이 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀌거나 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌는 경계점을 의미하고, 이 곡선이 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$의 그래프인 경우 $f''(x)$의 값이 0인 점 중 그 점을 경계로 $f''(x)$의 값의 부호가 양에서 음으로 혹은 음에서 양으로 바뀌는 점이 변곡점이 된다. 이때 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$는 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때 $f'(x)$를 미분하여 얻을 수 있다. 그리고 그 값의 부호에 대한 정보로부터 $f(x)$의 그래프의 모양이 어떤 구간에서 아래로 볼록한지 위로 볼록한지 판단할 수 있고, $f'(a)=0$인 점 $(a, f(a))$에서 극댓값/극솟값을 가지는지 판단할 수 있으며, $f(x)$의 그래프의 변곡점도 찾을 수 있다. 이를 통해 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 증가하는 구간과 감소하는 구간, 극점, 위로 볼록인 구간과 아래로 볼록인 구간, 변곡점 등에 대한 정보가 나타나도록 그릴 수 있다.

치환적분법置換積分法; integration by substitution

정의

치환적분법은 무엇인가요?

연속함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 할 때, 미분가능한 함수 $t=g(x)$의 치역이 $f(t)$의 정의역에 포함되면 합성함수의 미분법에서

$$\frac{d}{dx}F\big(g(x)\big)=F'\big(g(x)\big)g'(x)=f\big(g(x)\big)g'(x)$$

이다. 따라서

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx=F\big(g(x)\big)+C$$

이다.

이때 $F\big(g(x)\big)=F(t)$이고 $\int f(t)\,dt=F(t)+C$이므로

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

이다.

이와 같이 한 변수에 대한 미분가능한 함수를 다른 변수로 바꾸어 적분하는 방법을 **치환적분법**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 부정적분 $\int(4x+1)^{99}\,dx$를 구해보자.

$4x+1=g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=4$이므로 부정적분은 다음과 같다.

$$\int(4x+1)^{99}\,dx=\frac{1}{4}\int t^{99}\,dt=\frac{1}{400}(4x+1)^{100}+C$$

❷ 부정적분 $\int x\cos x^2\,dx$를 구해보자.

$x^2=g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=2x$이므로 부정적분은 다음과 같다.

$$\int x\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin x^2+C$$

❸ 부정적분 $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$를 구해보자.

$x^2+1=g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=2x$이므로

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\int \frac{1}{t}\,dt$$

이고 $\int \frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+C$이므로 정리하면 다음과 같다.

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\ln|x^2+1|+C$$

❹ 부정적분 $\int xe^{x^2}\,dx$를 구해보자.

$x^2=g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=2x$이므로 부정적분은 다음과 같다.

$$\int xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int e^t\,dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

개념 정적분의 값을 구할 때는 치환적분법을 어떻게 적용하면 되나요?

미분가능한 함수 $t=g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(t)$가 α와 β를 양 끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 치환적분법을 정적분 계산에 적용하면 다음과 같다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

치환적분법으로 정적분의 값을 구할 때에는 정적분의 아래끝, 위끝의 값이 각각 a에서 α, b에서 β로 바뀌는 것에 유의하여야 한다.

예 구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 정적분 $\int_0^1 (x+1)^9\,dx$를 구해보자.

$x+1=g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=1$, $g(0)=1$, $g(1)=2$이므로 다음이 성립한다.

$$\int_0^1 (x+1)^9\,dx=\int_1^2 t^9\,dt=\frac{1}{10}\left[t^{10}\right]_1^2=\frac{2^{10}-1}{10}=\frac{1023}{10}$$

❷ 정적분 $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2\,dx$를 구해보자.

$x^2 = g(x) = t$로 놓으면 $g'(x) = 2x,\ g(0) = 1,\ g(\sqrt{\pi}) = \pi$이므로 다음이 성립한다.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos t\,dt = \frac{1}{2}\Big[\sin t\Big]_0^{\pi} = 0$$

❸ 정적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$를 구해보자.

$x^2 + 1 = g(x) = t$로 놓으면 $g'(x) = 2x,\ g(0) = 1,\ g(1) = 2$이므로 다음이 성립한다.

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln t\Big]_1^2 = \ln 2$$

❹ 정적분 $\displaystyle\int_1^2 xe^{x^2}\,dx$를 구해보자.

$x^2 = g(x) = t$로 놓으면 $g'(x) = 2x,\ g(1) = 1,\ g(2) = 4$이므로 다음이 성립한다.

$$\int_1^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 e^t\,dt = \frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_1^4 = \frac{e^4 - e}{2}$$

의미

치환적분법이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'치환적분법(**置換積積法**)' 은 원래 함수의 변수를 다른 변수로 바꾸어 즉, 치환(**置換**)하여 적분(**積積**)하는 방법(**法**)을 의미한다.

置	換	積	分	法
둘 치	바꿀 환	쌓을 적	나눌 분	법 법

영어로는 integration by substitution이라 하며, integration은 '적분' , substitution은 '대입' , '치환' 을 뜻한다. 즉 변수나 표현을 치환하여 적분을 하는 것을 의미한다.

개념

치환을 아무렇게나 해도 되나요?

치환적분에서는 함수식의 어떤 부분을 치환하느냐에 따라 계산 과정이 달라질 수 있다. 즉, 여러 치환 방법이 가능하며 그에 따라 계산이 더 쉬워지기도 하고 복잡해지기도 하고 적분이 불가능하기도 한다. 따라서 적절한 치환을 선택하는 것이 중요하다.

예를 들어, $\displaystyle\int \sqrt{x+1}\,dx$를 생각해 보자.

❶ $x+1=u$로 치환하면 $\dfrac{du}{dx}=1$이므로

$$\int \sqrt{x+1}\,dx=\int \sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

와 같이 계산이 간단하다.

❷ $\sqrt{x+1}=u$로 치환하면 $u^2=x+1$, $x=u^2-1$, $\dfrac{dx}{du}=2u$이므로

$$\int \sqrt{x+1}\,dx=\int u\times 2u\,du=2\int u^2\,du$$

$$=\frac{2}{3}u^3+C=\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3+C=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

로 ❶번 풀이의 답과 같지만, 계산 과정이 상대적으로 복잡하다.

이처럼 같은 적분이라도 치환 방법에 따라 계산 과정이 달라질 수 있다. 따라서 여러 가지 치환 방법 중 계산이 보다 간단하고 효율적인 방법을 선택하는 것이 좋다.

개념

부정적분에서는 치환 후에 원래 변수로 다시 바꿔야 하나요?

부정적분은 주어진 함수의 원시함수를 구하는 과정으로 치환 후 원래 변수로 꼭 다시 바꿔야 한다. 치환적분을 할 때 변수 치환은 계산을 단순화하기 위한 임시적인 방법일 뿐이다. 따라서 최종적으로는 반드시 원래 변수로 돌려놓아야만, 처음에 주어진 함수에 대한 부정적분 결과가 제대로 올바르게 표현된다. 만약 치환한 변수를 그대로 남겨 두면, 이는 처음에 주어진 함수의 원시함수를 나타내지 못하므로 부정적분의 의미가 성립하지 않는다. 그러므로 부정적분에서는 항상 원래 변수로 되돌려서 결과를 써야 한다.

개념

치환적분법을 정적분에 적용할 때 위끝과 아래끝을 꼭 바꿔야 하나요?

정적분에서 변수 치환을 하면 새 변수에 맞추어 위끝과 아래끝도 반드시 함께 바꾸어야 한다. $x=g(t)$로 치환하면 $\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$이고,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt$$

가 성립한다. 구간을 바꾸지 않으면 t의 실제 이동 범위와 적분의 위끝과 아래끝이 불일치하여 원래 문제와 다른 값을 얻게 되므로 수학적으로 타당하지 않다.

간단한 예시로, $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$에서 $x+1=t$로 치환하면 올바른 계산은

$$\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \int_1^4 \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

이다. 그런데 만약 위끝과 아래끝을 바꾸지 않으면

$$\int_0^3 \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

이 되어 원래 값 $\frac{14}{3}$과 다른 값이 나옴을 알 수 있다.

따라서 치환적분법을 정적분에 적용할 때는 위끝과 아래끝을 새로운 변수에 맞게 바꾸어야 한다.

개념 **치환적분법은 어떤 경우에 사용하나요?**

예제 ❶번 $\int_0^1 (x+1)^9\,dx$에 나타난 다항함수 경우 치환적분법을 적용하면 일반적으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

> 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, 다음이 성립한다.
>
> $$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (\text{단, } a\neq 0,\ a, b\text{는 상수})$$

증명 | $ax+b=u$로 두고, 양변을 미분하면 $\frac{du}{dx}=a$이므로 $\frac{dx}{du}=\frac{1}{a}$가 된다.

따라서 다음과 같다.

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(u)\times\frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}\int f(u)\,du = \frac{1}{a}F(u)+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

■

예제 ❸번 $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$는 주어진 함수가 유리함수이면서 (분자)=(분모)′인 경우로 치환적분법을 적용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

함수 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

증명 | $f(x) = u$로 치환하면, $\dfrac{du}{dx} = f'(x)$이므로 다음과 같이 적분한다.

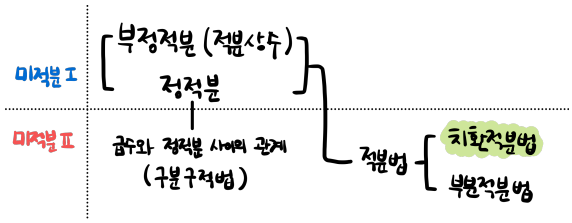
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)} f'(x)\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

■

개념

치환적분법과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

치환적분법은 부정적분이나 정적분을 구하는 방법 중 하나라는 점에서 합성함수의 미분, 부정적분, 정적분, 부분적분법 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **치환적분법**은 합성함수 $f(g(x))$의 도함수 $f'(g(x))g'(x)$의 **부정적분**과 **정적분**을 $g(x) = t$와 같이 치환하여 구하는 방법으로서, 두 함수의 곱 $f(x)g(x)$의 도함수가 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$임을 이용하여 $f'(x)g(x)$의 부정적분과 정적분을 구하는 **부분적분법**과 함께 여러 함수의 적분을 구할 수 있게 해주는 대표적인 방법이다.

부분적분법部分積分法; integration by parts

정의

부분적분법은 무엇인가요?

미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여, 두 함수의 곱의 미분은

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

즉,

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

이다. 이 등식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= \int \{f(x)g(x)\}'\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\end{aligned}$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

이와 같이 적분하는 방법을 **부분적분법**이라 한다.



정적분의 값을 구할 때는 부분적분법을 어떻게 적용하면 되나요?

함수의 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$의 한 부정적분이다. $f'(x)$와 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면

$$\int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

예 구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 부정적분 $\int xe^x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$로 두면, $f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로 부분적분법에 의해 다음과 같이 적분한다.

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

❷ 부정적분 $\int \ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 두면, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로 부분적분법에 의해 다음과 같이 적분한다.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\times\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

의미 부분적분법이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'부분적분법(部分積積法)'은 함수를 두 **부분**(部分)으로 나누어, 그 곱에 대해 **적분**(積積)하는 **법**(法)을 의미한다.

部	分	積	分	法
나눌 부	나눌 분	쌓을 적	나눌 분	법 법

영어로는 integration by parts라 한다. 말 그대로 parts은 '부분'으로 나누어서 적분(integration)하는 방법이라는 뜻이다.

개념

부분적분법에서 어떤 함수를 $f(x)$로, 어떤 함수를 $g'(x)$로 정해야 하나요?

부분적분 공식은 $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$이다. 이때 함수 $f(x)$는 **미분하기 쉬운 함수**, $g'(x)$는 **적분하기 쉬운 함수**로 선택하는 것이 좋다. 잘못 선택하면 오히려 계산이 더 복잡해질 수 있다. 예를 들어, $\int x\ln x\,dx$에서는 x의 부정적분은 $\frac{1}{2}x^2$으로 이미 잘 알고 있지만 $\ln x$의 경우는 이 역시도 부분적분법을 활용해서 구해야하는 함수이다. 따라서 $\ln x$를 $f(x)$로 두고, x를 $g'(x)$로 두는 것이 적절하다.

$g'(x)$로 선택한 함수는 반드시 적분할 수 있어야 하므로, 적분할 수 없는 함수를 선택하면 안된다. 즉, $g'(x)$를 선택했을 때 $\int g'(x)\,dx = g(x)$의 형태로 부정적분 결과가 명확히 구해져야 한다. 예를 들어 $g'(x) = e^{-x^2}$ 처럼 원시함수가 기본 함수로 표현되지 않는 함수는 적절하지 않다.

개념

부분적분법을 적용할 때 주의할 점에는 어떤 것이 있나요?



부호 조심!

부분적분 공식에서 **두 번째 항의 부호가 마이너스(-)**임을 기억해야 한다.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

실수로 이 부분에서 부호 실수를 하는 경우가 많으므로 주의해야 한다.



정적분에 적용 시 정적분 값 계산 누락 조심!

부분적분법을 정적분 계산에 적용할 때 부정적분을 구한 후 **정적분 값 계산** $\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$**을 빠뜨리지 않게 조심**해야 한다. 즉,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

에서 정적분 값 계산 $\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$를 빠뜨리는 경우가 종종 있는데 이런 실수를 하지 않도록 주의해야 한다.

개념

부분적분법을 여러 차례 반복 적용해야 하는 경우도 있나요?

함수의 형태에 따라 여러 번의 부분적분법을 적용해야하는 경우가 있다. 특히 $f(x)$가 고차 다항식인 경우에는 여러 번 반복해서 부분적분을 해야 하는 경우가 종종 있다. 예를 들어 $\int x^3 e^x \, dx$와 같은 경우에는 x^3을 계속 미분하면서 부분적분을 세 번 반복해서 적용해야 한다.

먼저 $u = x^3$, $dv = e^x \, dx$로 두고 계산을 시작하면 다음과 같다:

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx$$

이제 $\int 3x^2 e^x \, dx$에 대해 다시 부분적분을 적용한다. 이번에는 $u = x^2$, $dv = e^x \, dx$로 두고 진행하면 다음과 같다.

$$x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx\right)$$

이제 $\int 2x e^x \, dx$에 대해 또 부분적분을 적용하면 다음과 같다.

$$x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx\right) = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \, dx\right)\right)$$

마지막으로 $\int e^x \, dx = e^x$이므로, 전체 결과는 다음과 같이 정리된다.

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C$$

이처럼 고차 다항식과 지수함수의 곱에서는 부분적분을 여러 번 반복해서 적용해야 한다. 처음에는 복잡하게 느껴질 수 있지만, 미리 반복이 필요하다는 것을 알고 시작하면 계산이 훨씬 수월해진다. 따라서 함수의 형태를 잘 살펴보고, 몇 번 반복해야 할지를 미리 판단하는 것이 중요하다.

더 알아보기

부분적분법은 치환적분법과 어떻게 다른가요?

치환적분법은 복잡한 식을 다른 변수로 치환하여 간단하게 변형한 뒤 적분하는 방법으로서 합성함수 $f(g(x))$의 도함수 $f'(g(x))g'(x)$의 부정적분과 정적분을 $g(x)=t$와 같이 치환하여 구하는 방법이다. 치환적분법을 적용하려면 미분하여 나오는 항 $g'(x)$가 포함되어 있는지를 확인하는 것이 중요하다.

예를 들어,

$$\int x\cos x^2\,dx$$

에서 $g(x)=x^2=t$로 치환하면 $g'(x)=2x$이므로,

$$\int x\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\int \cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin x^2+C$$

이다.

부분적분법은 두 함수의 곱 $f(x)g(x)$의 도함수가 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용하여 $f(x)g'(x)$를 적분하는 방법이다. 이는 두 함수의 곱의 미분의 역과정으로서 미분가능한 함수 $f(x)$와 적분가능한 함수 $g'(x)$가 곱해져 있는 경우 사용한다.

예를 들어,

$$\int xe^x\,dx$$

에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$로 두면,

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C$$

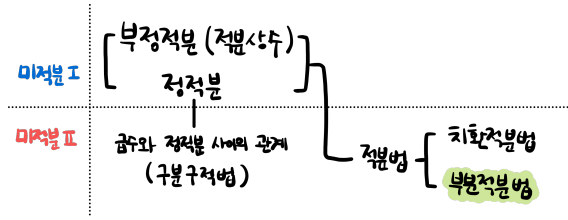
이다.

결국 치환적분법은 합성함수의 도함수 즉, $f'(g(x))g'(x)$인 꼴의 함수를 적분할 때, 부분적분법은 미분가능한 함수와 적분가능한 함수의 곱 즉, $f(x)g'(x)$꼴의 함수를 적분할 때 사용한다. 함수 식의 형태를 보고 어떤 방법을 적용할 지 판단하는 것이 중요하다.

개념

부분적분법과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

부분적분법은 부정적분이나 정적분을 구하는 방법 중 하나라는 점에서 두 함수의 곱의 미분, 부정적분, 정적분, 치환적분법 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



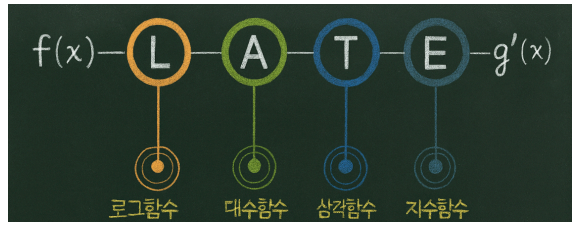
실제로 **부분적분법**은 두 함수의 곱 $f(x)g(x)$의 도함수가 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용하여 $f'(x)g(x)$의 부정적분과 정적분을 구하는 방법으로서, 합성함수 $f(g(x))$의 도함수 $f'(g(x))g'(x)$의 부정적분과 정적분을 $g(x)=t$와 같이 치환하여 구하는 치환적분법과 함께 여러 함수의 적분을 구할 수 있게 해주는 대표적인 방법이다.

심화(참고)

- **부분적분법을 사용할 때, 어떤 함수를 $f(x)$와 $g'(x)$로 두면 좋을까요?**

일반적으로 로그함수, 대수함수, 삼각함수, 지수함수가 함께 나오는 경우, 어떤 함수를 $f(x)$로 두고 어떤 함수를 $g'(x)$로 둘지 고민하게 된다. 이때 편리하게 사용할 수 있는 방법으로 '**LATE**' 규칙이 있다.

기호	함수 유형	예시 함수
L	로그함수 (Logarithmic function)	$\ln x$, $\log_a x$
A	대수함수 (Algebraic function)	x, x^2, x^3 등의 다항함수
T	삼각함수 (Trigonometric function)	$\sin x$, $\cos x$
E	지수함수 (Exponential function)	e^x, 2^x

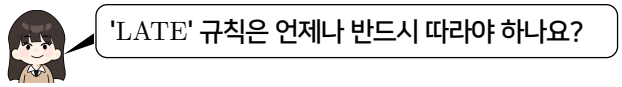


위의 순서에서 먼저 나오는 함수를 $f(x)$로 두고, 나중에 나오는 함수를 $g'(x)$로 두면 부분적분 계산이 더 쉬운 경우가 많다.

참고로 대수함수의 경우 주로 다항함수가 주로 다루어지기 때문에

로그함수 - 다항함수 - 삼각함수 - 지수함수

의 약자로 '**로다삼지**'를 사용하기도 한다.



'LATE'는 항상 정답을 보장하는 공식은 아니다. 그러나 부분적분법을 적용할 때 선택 기준으로 삼으면 적분의 방향을 잡는 데 많은 도움을 줄 수 있다.

기하

머 리 말

이 자료는 2022 개정 교육과정의 〈기하〉에서 다루는 다음의 수학 용어들을 설명하고 안내하기 위해 마련되었습니다.

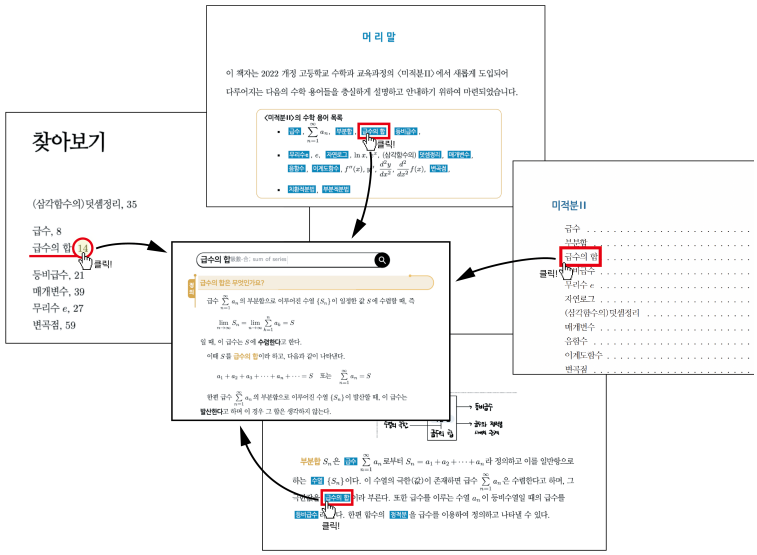
〈기하〉의 수학 용어 목록

- 이차곡선, 포물선 (축, 꼭짓점, 초점, 준선), 타원 (초점, 꼭짓점, 중심, 장축, 단축), 쌍곡선 (초점, 꼭짓점, 중심, 주축, 점근선),
- 교선, 삼수선 정리, 이면각 (변, 면, 크기), 정사영, 좌표공간, 공간좌표, $\mathrm{P}(x, y, z)$
- 벡터, 시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 영벡터, 실수배, 평면벡터, 공간벡터, 위치벡터, 벡터의 성분, 내적, 방향벡터, 법선벡터, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{a}$, $|\vec{a}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$

각 수학 용어에 대한 설명/안내 자료를 찾아가는 방법은 다음과 같습니다.

용어 설명 찾아가는 방법

(방법1) 위 목록의 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법2) [차례]에 있는 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법3) 맨 뒤 [찾아보기]에 있는 용어 옆 숫자(쪽수)를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.
(방법4) 자료 본문에서 용어를 클릭하면 그 용어에 대한 설명을 볼 수 있습니다.



고등학생이 각 수학 용어를 이해하는 과정에서 자연스럽게 제기할 수 있는 질문 및 교사가 고등학생의 수학적 사고를 유도하기 위해 제기할 수 있는 질문을 중심으로 묻고 답하는 문답 방식으로 자료를 구성하였습니다. 이 자료가 고등학교 수학 용어 및 관련 학습 내용에 대하여 학생 스스로 질문을 던지고 질문에 대한 답을 탐색하는 습관을 형성하는데 기여하고, 수학 교사가 학생의 이런 습관 형성과 의미 있는 수학적 사고 활동을 안내하는 데 활용되기를 바랍니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점

이 자료는 고등학생이 각 수학 용어를 정확하고 명료하게 이해하기 위해 필요한 용어의 뜻(정의), 표현, 구체적인 예 등의 기본적인 내용 뿐 아니라 더 알아보기 질문을 통해 그 용어에 대한 고등학생의 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용, 더 나아가 용어 관련 다양한 참고 자료와 대학 수준의 보다 심화 확장된 내용까지 심화(참고)를 통해 폭넓게 다루고자 하였습니다.

자료의 짜임새와 활용 및 활용 시 유의점을 살펴보면 다음과 같습니다.

[자료의 짜임새]

	기본	더 알아보기	심화(참고)
내용	고등학생의 수학 용어에 대한 정확하고 명료한 이해에 필요한 정의, 의미, 예 등의 기본 내용으로 구성	고등학생의 수학 용어에 대한 보다 깊이 있는 이해를 위한 내용으로 구성	대학 수준의 심화 학습을 원하는 고등학생, 수업을 준비하는 교사(혹은 예비교사)를 위한 [기본]과 [더 알아보기]의 내용을 더욱 심화한 내용 및 참고 자료로 활용 가능한 내용으로 구성
특징	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 모든 내용이 용어가 도입되는 과목 교육과정의 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 범위를 벗어날 수 있음. 단, 설명에 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙은 해당 과목 교육과정 범위 내에 있음	질문과 질문에 대한 답으로 제시되는 내용 및 이때 사용되는 수학 개념, 원리, 법칙이 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어날 수 있음

[자료의 활용]

고등학생	수학 용어에 대한 교과서 중심의 기본적이고 핵심적인 의미와 내용을 이해를 원하는 학생은 기본에 해당하는 내용을 읽고 공부하면 됩니다. 기본에 해당하는 내용을 토대로 좀 더 깊이 있는 이해를 원하는 학생은 더 알아보기의 내용을 읽으면 도움이 될 수 있습니다. 심화(참고)의 내용은 참고 자료로서 "아, 이런 내용도 있구나." 정도로 이해하거나, 읽지 않아도 됩니다.
(예비)교사	기본에 해당하는 내용은 모든 학생에게 가르쳐야 할 내용입니다. 더 알아보기와 심화(참고)의 내용은 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정 범위를 벗어난 학생의 질문에 답하거나 심화 탐구 활동 자료로 활용 가능합니다.

[활용 시 유의점]

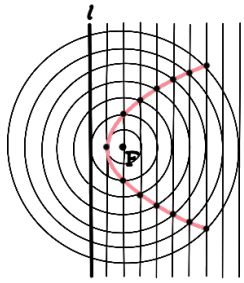
더 알아보기와 심화(참고)의 내용 중에는 해당 과목 교육과정 또는 고등학교 교육과정의 내용 범위와 수준을 벗어나는 내용이 포함되어 있습니다. 특히 심화(참고)의 내용은 대학 학부 수준의 내용을 포함하기도 합니다. 그러므로 고등학교 수학 교사가 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용할 때는 신중한 주의가 필요합니다. 특히 평가에 교육과정의 범위를 벗어나는 더 알아보기와 심화(참고)의 내용을 활용하지 않도록 유의할 필요가 있습니다.

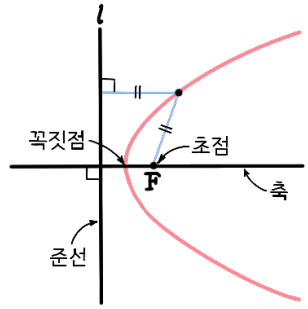
포물선拋物線; parabola

정의

포물선(축, 꼭짓점, 초점과 준선)은 무엇인가요?

평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l이 주어질 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점의 집합을 **포물선**이라고 한다.



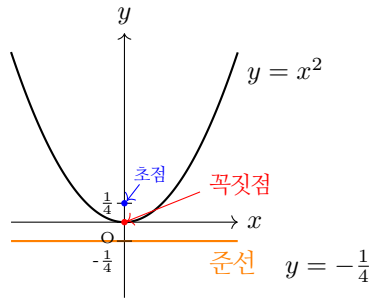


이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 l을 포물선의 **준선**이라 하며, 포물선의 초점 F를 지나고 준선 l에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 포물선과 축의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

1 중학교에서 배우는 이차함수 $y=x^2$은 포물선의 대표적인 예이다. 이 포물선의 초점은 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, 준선은 $y=-\frac{1}{4}$, 축이 $x=0$이고 꼭짓점은 $(0,0)$이다.



이 포물선은 모든 점이 초점과 준선 사이의 거리가 같은 성질을 가지며, 이를 통해 포물선의 기하학적 정의를 이해할 수 있다.

예를 들어, 포물선 위의 점 $(1,1)$을 생각해보면, 이 점에서 초점 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$까지의 거리와 준선 $y=-\frac{1}{4}$까지의 거리는 모두 $\sqrt{(1-0)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{9}{16}}$로 같다.

❷ 이차함수 $x=y^2$은 y를 독립변수로 하는 포물선의 대표적인 예이다. 이 포물선의 초점은 $\left(\frac{1}{4},0\right)$, 준선은 $x=-\frac{1}{4}$, 축은 $y=0$이고 꼭짓점은 $(0,0)$이다.

❸ 이차함수 $y=(x-2)^2+3$은 함수 $y=x^2$을 x축으로 2만큼, y축으로 3만큼 평행이동한 함수로 역시 포물선이다. 초점, 준선, 축, 꼭짓점 모두 함께 평행이동 되므로 이 포물선의 초점은 $\left(2,\frac{13}{4}\right)$, 준선은 $y=\frac{11}{4}$, 축은 $x=2$이고 꼭짓점은 $(2,3)$이다.

의미

포물선이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'포(拋)'는 '던지다', '물(物)'는 '물체', '선(線)'은 '곡선'을 뜻한다. 즉, '포물선(拋物線)'은 물체를 비스듬히 던졌을 때 그리는 곡선의 모양을 표현한 이름이다.



영어로는 parabola라 하며, 그리스어 *para*는 '옆에', '~와 나란히'를 뜻하고 *ballein*은 '던지다'를 의미하며, parabola는 이 두 단어에서 유래하였다. 이는 원뿔을 자를 때 단면이 모선과 나란할 때 생기는 곡선이며, 그 모양이 물체를 비스듬히 던졌을 때 위로 올라갔다가 다시 떨어지면서 나타나는 궤적과도 유사하다. 따라서 parabola는 포물선의 기하학적 성질을 잘 반영한 명칭이며, 고대 수학자 Apollonius(약 262 B.C. ~ 약 190 B.C.)가 만든 용어로 알려져 있다.

개념

포물선의 방정식은 어떻게 나타나나요?

포물선의 방정식은 포물선 정의에 의하여 초점 F와 준선까지의 거리가 같은 점들의 자취를 구하여야 한다. 포물선 위의 한 점 $P(x,\ y)$에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 할

때, 포물선의 정의에 따라 $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}}$임을 사용하여 유도한다.

초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)\ (p \neq 0)$이고, 준선이 직선 $x = -p$인 포물선은 일반적으로 다음과 같은 형태의 방정식으로 나타낸다.

$$y^2 = 4px$$

한편, 초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)\ (p \neq 0)$이고, 준선이 $y = -p$인 포물선은 다음과 같은 형태의 방정식으로 나타낸다.

$$x^2 = 4py$$

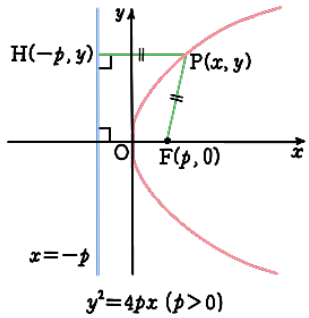
이와 같이 두 형태는 포물선의 초점과 준선의 위치에 따라 결정된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

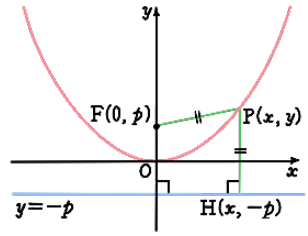
포물선의 방정식

❶ 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)(p \neq 0)$이고 준선이 $x = -p$인 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$이다.

❷ 초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)(p \neq 0)$이고, 준선이 $y = -p$인 포물선의 방정식은 $x^2 = 4py$이다.



$y^2=4px\ (p>0)$



$x^2=4py\ (p>0)$

개념

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프가 포물선이라는 말은 무슨 뜻인가요?

이차함수 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$의 그래프는 평행이동된 포물선이다. 이 식을 완전제곱식으로 변형하면 다음과 같다.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

즉, 이차함수의 그래프는 포물선 $x^2 = \frac{1}{a}y$를 x축 방향으로 $-\frac{b}{2a}$ 만큼, y축 방향으로 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 만큼 평행이동한 포물선이다.



이차함수의 그래프에서 축, 꼭짓점, 초점과 준선은 어떻게 구하나요?

포물선 $x^2 = \frac{1}{a}y$의 초점의 좌표는 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, 준선의 방정식은 $y = -\frac{1}{4a}$이다. 또한, 포물선 $x^2 = \frac{1}{a}y$의 축의 방정식은 $x = 0$이고 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$이다.

따라서, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프는

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

이므로 포물선 $x^2 = \frac{1}{a}y$를 x축 방향으로 $-\frac{b}{2a}$ 만큼, y축 방향으로 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 만큼 평행이동한 것이므로, 그 초점의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(-\frac{b}{2a}, \quad \frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$$

그리고 준선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = \frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{1+4ac-b^2}{4a}$$

또한 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표는 다음과 같다.

$$x = -\frac{b}{2a}, \qquad \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

개념

포물선 $y^2 = 4px$의 접선의 방정식은 어떻게 나타나나요?

포물선 $y^2 = 4px$의 접선의 방정식은 포물선 위의 점에서의 기울기가 주어지거나 포물선에 접하는 점에서 직선의 성질을 이용하여 구할 수 있다.

포물선에 접하고 기울기가 $m(m \neq 0)$인 직선의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

또한, 포물선 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 형태로 나타난다.

$$y_1y = 2p(x + x_1)$$

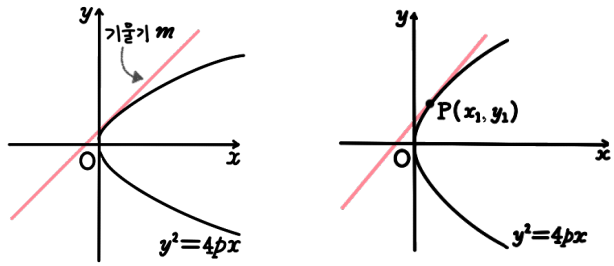
이와 같이 두 식은 각각 접선의 기울기와 포물선 위의 한 점을 이용하여 표현된 접선의 일반형이다. 즉, 첫 번째 식은 **기울기** m을 알고 있을 때 사용하고, 두 번째 식은 **접점의 좌표** $(x_1,\ y_1)$을 알고 있을 때 사용한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선 $y^2 = 4px$의 접선의 방정식

❶ 포물선에 접하고 기울기가 $m(m \neq 0)$인 직선의 방정식 : $y = mx + \dfrac{p}{m}$

❷ 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식 : $y_1y = 2p(x + x_1)$



개념

포물선 $x^2 = 4py$의 접선의 방정식은 어떻게 나타나나요?

포물선 $x^2 = 4py$의 접선의 방정식은 포물선 위의 점에서의 기울기가 주어지거나 포물선에 접하는 점에서 직선의 성질을 이용하여 구할 수 있다.

포물선에 접하고 기울기가 $m(m \neq 0)$인 직선의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$y = mx - pm^2$$

또한, 포물선 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 형태로 나타난다.

$$x_1x = 2p(y + y_1)$$

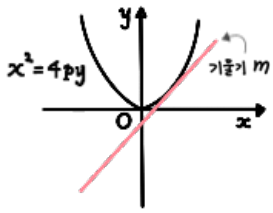
이와 같이 두 식은 각각 접선의 기울기와 포물선 위의 한 점을 이용하여 표현된 접선의 일반형이다. 즉, 첫 번째 식은 **기울기** m을 알고 있을 때 사용하고, 두 번째 식은 **접점의 좌표** (x_1, y_1)을 알고 있을 때 사용한다.

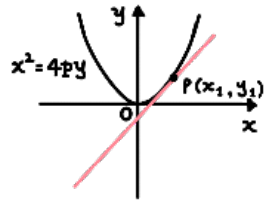
이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선 $x^2 = 4py$의 접선의 방정식

❶ 포물선에 접하고 기울기가 $m(m \neq 0)$인 직선의 방정식 : $y = mx - pm^2$

❷ 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식 : $x_1x = 2p(y + y_1)$





개념

포물선과 직선의 위치 관계는 접하는 경우 이외에 또 어떤 경우가 있나요?

앞서 포물선에 접하는 직선, 즉 접선의 방정식을 구하는 방법에 대해 알아보았다. 이제는 일반적인 직선이 포물선과 만날 때, 어떤 방식으로 만나는지를 살펴보자.

포물선 $y^2 = 4px$와 기울기 $m(m \neq 0)$, y절편 n을 가지는 직선 $y = mx + n$이 있을 때, 이 두 곡선이 만나는 점의 개수는 두 식을 연립하여 얻는 방정식의 해의 개수에 따라 결정된다.

직선의 방정식을 포물선의 방정식에 대입하면 다음과 같은 이차방정식을 얻게 된다.

$$(mx + n)^2 = 4px \quad \Rightarrow \quad m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 4px$$

$$\Rightarrow \quad m^2x^2 + 2(mn - 2p)x + n^2 = 0$$

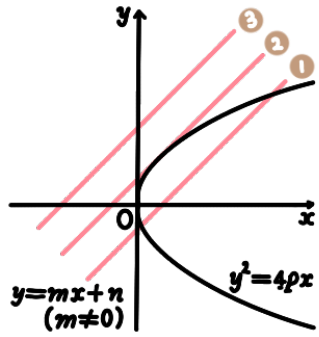
이 방정식은 x에 대한 이차방정식이며, 이때 포물선과 직선의 교점의 개수는 이 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉, 이 방정식의 판별식 D의 값에 따라 포물선과 직선이 만나는 점의 개수가 결정된다.

따라서 포물선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

❶ $D > 0$이면 포물선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

❷ $D = 0$이면 포물선과 직선은 한 점에서 만나며, 이때는 직선이 포물선에 접한다.

❸ $D < 0$이면 포물선과 직선은 만나지 않는다.

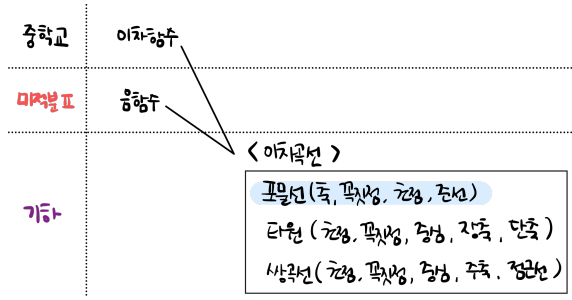


즉, 포물선과 직선의 위치 관계는 이차방정식의 판별식으로 확인할 수 있음을 알 수 있다.

개념

포물선과 관련된 용어와 개념에는 어떤 것이 있나요?

포물선(축, 꼭짓점, 초점, 준선)은 이차함수의 그래프, 접선의 방정식, 타원, 쌍곡선, 이차곡선, 음함수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **포물선**은 〈중학교 수학〉에서 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프를 지칭하는 용어로 처음 다루어진 뒤, 〈기하〉 과목에서 **타원**, **쌍곡선**과 함께 좌표평면에서 두 변수 x, y에 대한 이차방정식으로 표현되는 **이차곡선**의 한 종류로 보다 일반적으로 다룬다. 그 중 포물선의 어떤 점에서의 접선의 기울기는 이차방정식의 판별식을 이용하여 구할 수도 있고, **음함수**의 미분법을 이용하여 구할 수도 있다.

● **음함수의 미분법을 이용하여 포물선 $y^2 = 4px$의 접선의 방정식은 어떻게 구할 수 있을까요?**

포물선 $y^2 = 4px$에서 임의의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식을 음함수의 미분법을 이용해 구해 보자.

① 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 구하기

포물선의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx} = 4p$$

이므로 따라서 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y} \qquad (y \neq 0)$$

② 포물선 위의 점에서의 접선의 기울기 구하기

포물선 위의 점 (x_1, y_1)에서 접선의 기울기 m은 다음과 같다.

$$m = \frac{2p}{y_1} \qquad (y_1 \neq 0)$$

③ 접선의 방정식 구하기

점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 점–기울기식을 이용하여

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1)$$

양변에 y_1을 곱하면

$$yy_1 = 2p(x - x_1) + y_1^2 \qquad (①)$$

이다. 한편 점 (x_1, y_1)은 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점이므로 다음과 같이 나타낸다.

$$y_1^2 = 4px_1 \qquad (②)$$

①, ②식을 이용하여 접선의 방정식을 정리하면

$$yy_1 = 2p(x - x_1) + 4px_1$$

이고, 이를 정리하면 다음과 같은 형태가 된다.

$$yy_1 = 2p(x + x_1)$$

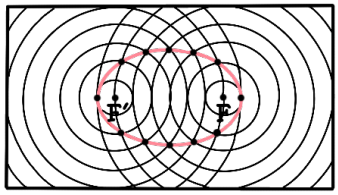
즉, 음함수의 미분법을 이용하면 포물선 $y^2 = 4px$에서 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식이 위와 같이 주어진다.

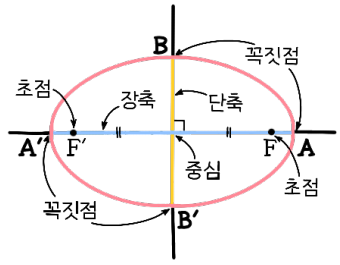
타원橢圓; ellipse

정의

타원(초점, 꼭짓점, 중심, 장축과 단축)은 무엇인가요?

평면 위의 서로 다른 두 점 F와 F′에서의 거리의 합이 일정한 점의 집합을 **타원**이라 하며, 두 점 F와 F′를 타원의 **초점**이라고 한다.





타원에서 두 초점 F와 F′를 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A와 A′이라 하고, 선분 FF′의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B와 B′이라 하자.

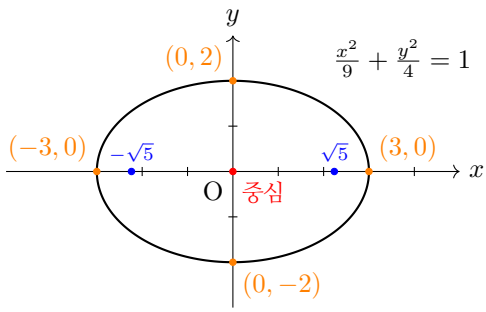
이때 네 점 A, A′, B, B′를 타원의 **꼭짓점**이라 하고, 선분 AA′를 타원의 **장축**, 선분 BB′를 타원의 **단축**이라 하며, 장축과 단축의 교점을 타원의 **중심**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

중심이 원점인 타원의 대표적인 예로 다음과 같은 타원이 있다.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$



이 타원은 x축을 따라 길게 누워 있는 형태의 타원이다. 먼저 중심은 $(0,0)$에 있고, 장축의 길이는 6이고, 단축의 길이는 4이다. 그리고 꼭짓점의 좌표는 $(3,0)$, $(-3,0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$이다. 또한 타원의 초점은 x축 위에 있으며, 초점의 좌표는 $(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$이다.

의미

타원이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'타(楕)'는 '길쭉하고 둥근 모양', '원(圓)'은 '둥근 원'을 뜻한다. 따라서 '타원'은 길쭉하고 둥근 원을 의미한다.

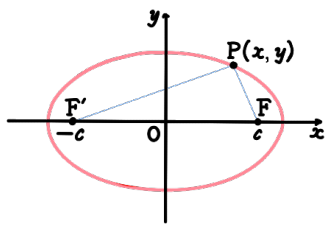
楕 길고 둥글 타　　圓 둥글 원

영어로는 ellipse라 하며, 그리스어 *en*과 *leipein*에서 유래된 말로, '부족하다', '모자라다'는 뜻을 가진다. 이는 원뿔을 자를 때, 단면이 모선보다 덜 기울어진 경우—즉, 절단하는 평면이 모선보다 작게 기울어졌을 때—나타나는 곡선이며, 이러한 상황에서 생기는 '모자람'을 반영하여 ellipse라는 명칭이 붙여졌다. 따라서 ellipse는 타원의 기하학적 특성을 잘 반영한 용어이며, 고대 수학자 Apollonius(약 262 B.C. ~ 약 190 B.C.)가 만든 것으로 알려져 있다.

개념

타원의 방정식은 어떻게 나타나나요?

타원의 방정식은 타원의 정의에 따라 두 초점에서 거리의 합이 일정한 점들의 자취를 구하여야 한다. 즉, 두 초점 F, F′에 대해 임의의 한 점 P(x, y)가 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=$ 일정한 값을 만족할 때, 점 P는 타원의 위에 존재한다고 정의된다.



먼저, 두 초점이 x축 위에 있는 경우를 생각해 보자.

초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$이고 거리의 합이 $2a(a > c > 0)$인 타원의 경우, 타원의 중심은 원점이며, 장축의 길이는 $2a$이다. 이때 타원의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b^2 = a^2 - c^2)$$

반면, 두 초점이 y축 위에 있는 경우를 생각해 보자. 초점이 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$이고 거리의 합이 $2b(b > c > 0)$인 타원의 경우, 타원의 중심은 원점이며, 장축의 길이는 $2b$이다. 이때 타원의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a^2 = b^2 - c^2)$$

이와 같이 타원의 방정식은 초점의 위치와 거리 조건에 따라 결정된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

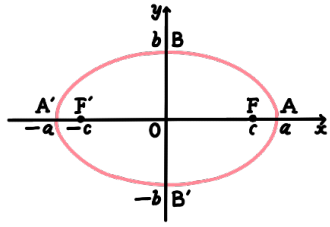
타원의 방정식

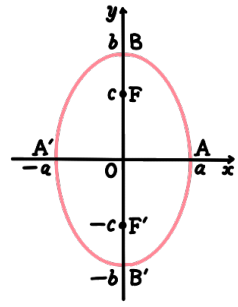
❶ 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$에서의 거리의 합이 $2a$ $(a > c > 0)$인 타원의 방정식 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b^2 = a^2 - c^2)$$

❷ 두 초점 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$에서의 거리의 합이 $2b$ $(b > c > 0)$인 타원의 방정식 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a^2 = b^2 - c^2)$$





단, 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$은 한 가지 꼴이어도 그래프는 a와 b의 크기에 따라 두 가지 모양이므로 혼동하지 않도록 한다.

개념

타원을 평행이동하면 방정식은 어떻게 될까요?

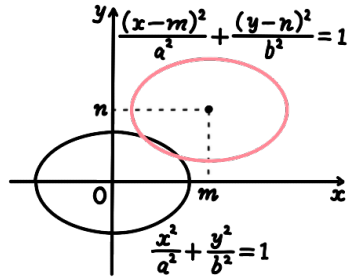
원점을 중심으로 가지는 타원

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

을 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면, 새로운 타원의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이때 타원의 모양과 크기는 변하지 않고, 중심과 초점, 꼭짓점이 모두 x축으로 m, y축으로 n만큼 평행이동한다.





타원의 중심, 초점, 꼭짓점, 장축과 단축의 길이는 어떻게 구하나요?

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점이 x축 위에 있는 경우를 생각해 보자. 중심은 $(0,0)$, 두 초점은 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$(단, $c=\sqrt{a^2-b^2}$), 꼭짓점은 $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$, 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$이다.

이를 x축으로 m, y축으로 n만큼 평행이동하면 다음과 같다.

❶ 중심: $(m,\ n)$

❷ 초점: $(m+c,\ n)$, $(m-c,\ n)$

❸ 꼭짓점: $(a+m,\ n)$, $(-a+m,\ n)$ $(m,\ b+n)$, $(m,\ -b+n)$

참고로 평행이동을 해도 타원의 **장축의 길이, 단축의 길이**는 바뀌지 않는다. 그래프가 새로운 중심 (m, n)을 기준으로 옮겨지는 것뿐이다.

개념

타원의 접선의 방정식은 어떻게 나타나나요?

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은 접점에서의 좌표 또는 접선의 기울기를 이용하여 구할 수 있다.

타원에 접하고 기울기가 $m(m\neq 0)$인 직선의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

또한, 타원 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 형태로 나타난다.

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

이와 같이 두 식은 각각 접선의 기울기와 타원 위의 한 점을 이용하여 표현된 접선의 일반형이다. 즉, 첫 번째 식은 **기울기** m을 알고 있을 때 사용하고, 두 번째 식은 **접점의 좌표** (x_1, y_1)을 알고 있을 때 사용한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

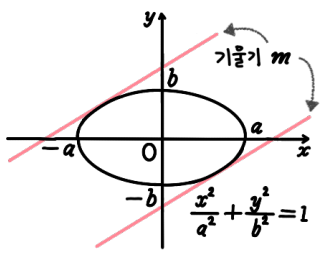
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식

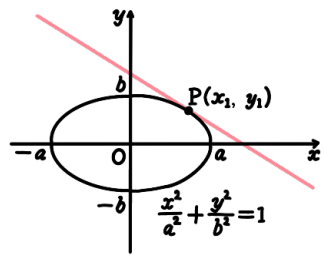
❶ 타원에 접하고 기울기가 $m(m\neq 0)$인 직선의 방정식 :

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

❷ 타원 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식 :

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$





개념

타원과 직선의 위치 관계는 접하는 경우 이외에 또 어떤 경우가 있나요?

앞서 타원에 접하는 직선, 즉 접선의 방정식을 구하는 방법에 대해 알아보았다. 이제는 일반적인 직선이 타원과 만날 때, 어떤 방식으로 만나는지를 살펴보자.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 기울기 $m(m\neq 0)$, y절편 n을 가지는 직선 $y=mx+n$이 있을 때, 이 두 곡선이 만나는 점의 개수는 두 식을 연립하여 얻는 방정식의 해의 개수에 따라 결정된다.

직선의 방정식을 타원의 방정식에 대입하면 다음과 같은 이차방정식을 얻게 된다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2+2mnx+n^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2mn}{b^2}x+\left(\frac{n^2}{b^2}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(a^2m^2+b^2\right)x^2+2a^2mnx+a^2\left(n^2-b^2\right)=0$$

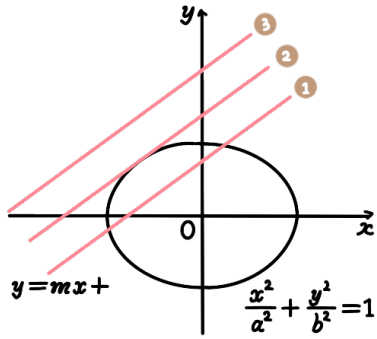
이 방정식은 x에 대한 이차방정식이며, 이때 타원과 직선의 교점의 개수는 이 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉, 이 방정식의 판별식 D의 값에 따라 타원과 직선이 만나는 점의 개수가 결정된다.

따라서 타원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

❶ $D>0$이면 타원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

❷ $D=0$이면 타원과 직선은 한 점에서 만나며, 이때는 직선이 타원에 접한다.

❸ $D<0$이면 타원과 직선은 만나지 않는다.

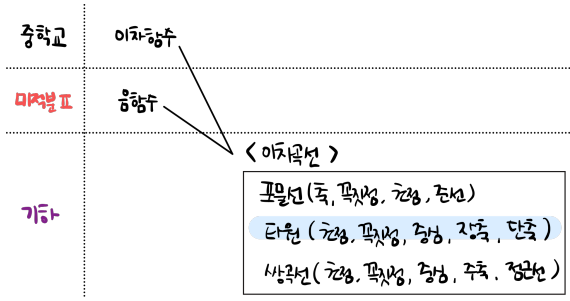


즉, 타원과 직선이 만나는 방식도 이차방정식의 판별식에 의해 결정된다는 것을 알 수 있다.

개념

타원과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

타원(초점, 꼭짓점, 중심, 장축, 단축)은 원, 접선의 방정식, 포물선, 쌍곡선, 이차곡선, 음함수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 평면에서 서로 다른 두 점(초점)으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합으로 정의되는 **타원**은 **포물선**, **쌍곡선**과 함께 좌표평면에서 두 변수 x, y에 대한 이차방정식으로 표현되는 **이차곡선**의 한 종류이다. 한 점으로부터 거리가 일정한 점들의 집합인 원 역시 좌표평면에서 두 변수 x, y에 대한 이차방정식으로 표현되는 이차곡선의 한 종류이다. 좌표평면에 그려진 원 $x^2+y^2=1$을 x축 방향으로 a배 확대(축소)하고 y축 방향으로 b배 확대(축소)하면 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 된다. 타원의 어떤 점에서의 접선의 기울기는 원, 포물선, 쌍곡선과 마찬가지로 이차방정식의 판별식을 이용하여 구할 수도 있고, **음함수**의 미분법을 이용하여 구할 수도 있다.

심화(참고)

- **음함수의 미분법을 이용하여 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은 어떻게 구할 수 있을까요?**

  타원 위의 임의의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식을 음함수의 미분법을 이용하여 구해 보자.

  ① 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$ 구하기

  타원의 식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분한다.

  $$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

이므로 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \qquad (y \neq 0)$$

② 타원 위의 점에서의 접선의 기울기 구하기

점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선 기울기 m은 다음과 같다.

$$m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \qquad (y_1 \neq 0)$$

③ 점–기울기식을 이용하여 접선의 방정식 구하기

점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

이므로, 양변에 y_1을 곱하면 다음과 같다.

$$yy_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2}(x - x_1) + y_1^2 \qquad (①)$$

④ 점 $(x_1,\ y_1)$이 타원 위의 점이라는 조건 사용

점 $(x_1,\ y_1)$이 타원 위에 있으므로 타원의 방정식에 대입한다.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad (②)$$

⑤ 식 ①, ②를 이용하여 접선의 방정식을 정리하기

식 ①에서 정리하면 다음과 같다.

$$yy_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2}x + \frac{b^2x_1^2}{a^2} + y_1^2$$

식 ②을 변형하면 다음과 같다.

$$y_1^2 = b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

따라서

$$\frac{b^2x_1^2}{a^2} + y_1^2 = b^2$$

이므로 이를 대입하면

$$yy_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2}x + b^2$$

양변을 a^2b^2 로 나누어 정리하면

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

이다. 즉, 타원 위의 점 $(x_1,\, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

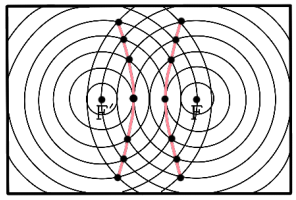
$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

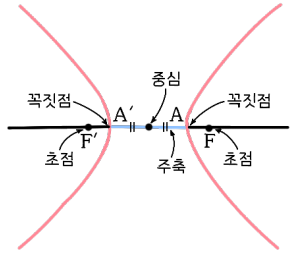
쌍곡선雙曲線, hyperbola

정의

쌍곡선(초점, 꼭짓점, 중심, 주축과 점근선)은 무엇인가요?

평면 위의 서로 다른 두 점 F와 F′에서 거리의 차가 일정한 점의 집합을 **쌍곡선**이라 하며, 두 점 F와 F′를 쌍곡선의 **초점**이라고 한다.



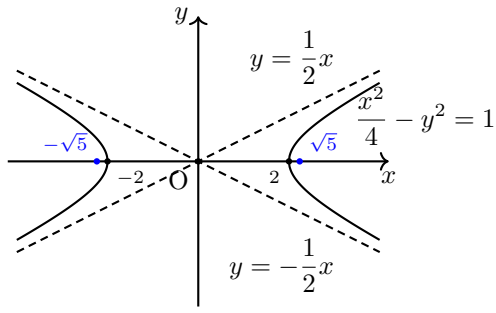


쌍곡선에서 두 초점 F와 F′를 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A와 A′이라 하자. 이때 두 점 A와 A′를 쌍곡선의 **꼭짓점**이라 하고, 선분 AA′를 쌍곡선의 **주축**, 선분 AA′의 중점을 쌍곡선의 **중심**이라고 한다.

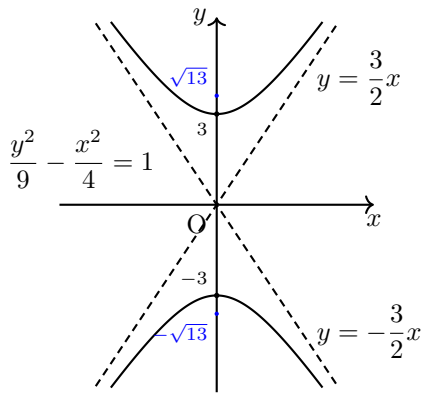
예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$은 중심이 원점이고, x축 방향으로 열린 쌍곡선의 대표적인 예이다. 이 쌍곡선의 중심은 $(0,0)$이고, 주축의 길이는 $2a=4$, 초점은 $(\sqrt{a^2+b^2},\,0)$ $=(\sqrt{5},\,0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2},\,0)=(-\sqrt{5},\,0)$, 점근선은 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$이다.



❷ 쌍곡선 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$은 중심이 원점이고, y축 방향으로 열린 쌍곡선이다. 이 쌍곡선의 중심은 $(0,0)$이고, 주축의 길이는 $2a=6$, 초점은 $\left(0,\sqrt{a^2+b^2}\right)=\left(0,\sqrt{13}\right)$, $\left(0,-\sqrt{a^2+b^2}\right)=\left(0,-\sqrt{13}\right)$, 점근선은 $y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{3}{2}x$이다.



의미 쌍곡선이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'쌍(雙)' 은 '쌍, 두 개' 를, '곡(曲)' 은 '굽은' , '선(線)' 은 '곡선, 선' 을 뜻한다. 따라서 '쌍곡선' 은 짝을 이루고 있는 두 곡선이라는 뜻이다. 좌표평면에서 짝을 이룬 두 개의 곡선으로 나타나고 있기에 쌍곡선이라 부른다.

雙 두 쌍　曲 굽을 곡　線 줄 선

영어로는 hyperbola라 하며, 그리스어 *hyper-*는 '넘어' , '과도한' 을 의미하고, *ballein* 은 '던지다' 를 뜻하는 말로, 이 두 단어에서 유래된 용어이다. 이는 원뿔을 자를 때, 절단하는 평면이 모선보다 더 가파르게 기울어진 경우—즉, 단면이 원뿔을 양쪽으로 뚫고 지나갈 만큼 기울어진 경우—나타나는 곡선이며, 이러한 형태의 '초과됨' 이나 '넘어섬' 을 반영하여 hyperbola라는 명칭이 붙여졌다. 따라서 hyperbola는 쌍곡선의 기하학적 성질을 잘 반영한 용어이며, 고대 수학자 Apollonius(약 262 B.C. ~ 약 190 B.C.)가 만든 것으로 알려져 있다.

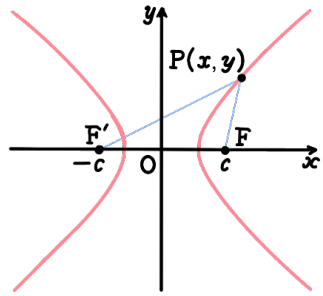
개념

쌍곡선의 방정식은 어떻게 나타나나요?

쌍곡선의 방정식은 쌍곡선의 정의에 따라 두 초점에서의 거리의 차가 일정한 점들의 자취를 구하여야 한다. 즉, 두 초점 F, F′에 대해 임의의 한 점 $\mathrm{P}(x, y)$가

$$|\overline{\mathrm{PF}} - \overline{\mathrm{PF'}}| = \text{일정한 값}$$

을 만족할 때, 점 P는 쌍곡선 위에 존재한다.



먼저, 두 초점이 x축 위에 있는 경우를 생각해 보자.

초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$이고 거리의 차가 $2a(c > a > 0)$인 쌍곡선의 경우, 쌍곡선의 중심은 원점이며, 주축의 길이는 $2a$이다. 이때 쌍곡선의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b^2 = c^2 - a^2)$$

반면, 두 초점이 y축 위에 있는 경우를 생각해 보자. 초점이 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F'}(0, -c)$이고 거리의 차가 $2b(c > b > 0)$인 쌍곡선의 경우, 쌍곡선의 중심은 원점이며, 주축의 길이는 $2b$이다. 이때 쌍곡선의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a^2 = c^2 - b^2)$$

이와 같이 쌍곡선의 방정식은 초점의 위치와 거리 조건에 따라 결정된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

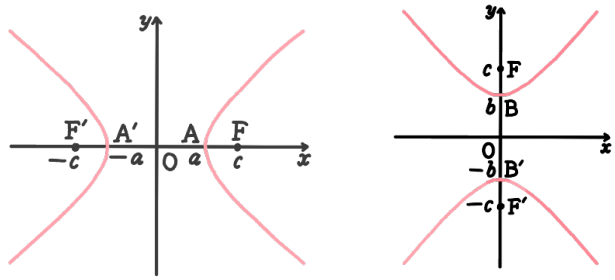
쌍곡선의 방정식

❶ 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$에서의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식 :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } b^2=c^2-a^2)$$

❷ 두 초점 $\mathrm{F}(0,c)$, $\mathrm{F}'(0,-c)$에서의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식 :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (\text{단, } a^2=c^2-b^2)$$



참고로 초점이 y축 위에 있는 쌍곡선의 방정식은 초점이 x축 위에 있는 쌍곡선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하여 구할 수도 있다.

개념

쌍곡선의 점근선은 무엇인가요?

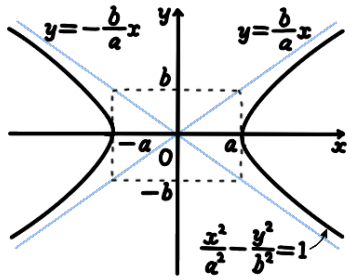
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 방정식을 y에 대해 풀면 다음과 같다.

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

이 식에서 x의 절댓값이 커질수록 $\frac{a^2}{x^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로, 쌍곡선은 다음 두 직선에 가까워진다.

$$y=\frac{b}{a}x, \quad y=-\frac{b}{a}x$$

이 두 직선을 쌍곡선의 **점근선**이라 한다.



점근선 | 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선(漸近線)이라고 한다.

또한, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$과 같은 다른 쌍곡선의 경우에도 점근선의 방정식은 동일하게

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

로 나타난다.

쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x$$

개념

쌍곡선을 평행이동하면 방정식은 어떻게 될까요?

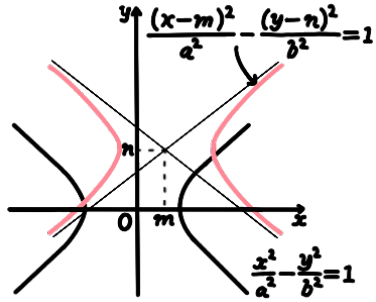
원점을 중심으로 가지는 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)$$

을 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면, 새로운 쌍곡선의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이때 쌍곡선의 모양과 크기는 변하지 않고, 중심과 초점, 꼭짓점이 모두 x축으로 m, y축으로 n만큼 평행이동한다.





쌍곡선의 중심, 초점, 꼭짓점과 주축의 길이는 어떻게 구하나요?

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점이 x축 위에 있는 경우를 생각해 보자. 중심은 $(0,0)$, 두 초점은 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ (단, $c=\sqrt{a^2+b^2}$), 꼭짓점은 $(a,0)$, $(-a,0)$, 주축의 길이는 $2a$이다.

이를 x축으로 m, y축으로 n만큼 평행이동하면 다음과 같다.

❶ 중심: $(m,\ n)$

❷ 초점: $(m+c,\ n)$, $(m-c,\ n)$

❸ 꼭짓점: $(m+a,\ n)$, $(m-a,\ n)$

참고로 평행이동을 해도 쌍곡선의 **주축의 길이**는 바뀌지 않는다. 그래프가 새로운 중심 (m,n)을 기준으로 옮겨지는 것뿐이다.

개념

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은 어떻게 나타나나요?

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은 접점에서의 좌표 또는 접선의 기울기를 이용하여 구할 수 있다.

쌍곡선에 접하고 기울기가 $m(m\neq 0)$인 직선의 방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

또한, 쌍곡선 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 형태로

나타난다.

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

이와 같이 두 식은 각각 접선의 기울기와 쌍곡선 위의 한 점을 이용하여 표현된 접선의 일반형이다. 즉, 첫 번째 식은 **기울기** m을 알고 있을 때 사용하고, 두 번째 식은 **접점의 좌표** (x_1, y_1)을 알고 있을 때 사용한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

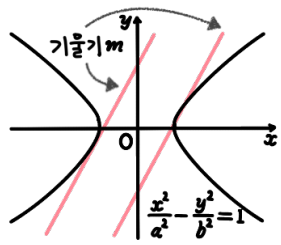
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 접선의 방정식

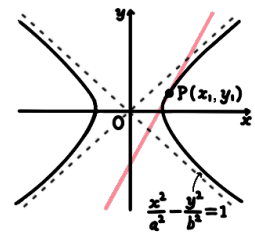
❶ 쌍곡선에 접하고 기울기가 $m(m \neq 0)$인 직선의 방정식 :

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

❷ 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식 :

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$





개념

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$의 접선의 방정식은 어떻게 나타나나요?

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$의 접선의 방정식은 접점의 좌표나 접선의 기울기를 이용하여 구할 수 있다.

이 쌍곡선에 접하고 기울기가 $m(m \neq 0)$인 직선의 방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

또한, 쌍곡선 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 형태로

나타난다.

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

이와 같이 두 식은 각각 접선의 기울기와 쌍곡선 위의 한 점을 이용하여 표현된 접선의 일반형이다. 즉, 첫 번째 식은 **기울기** m을 알고 있을 때 사용하고, 두 번째 식은 **접점의 좌표** (x_1, y_1)을 알고 있을 때 사용한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

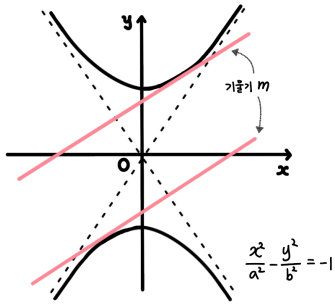
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 접선의 방정식

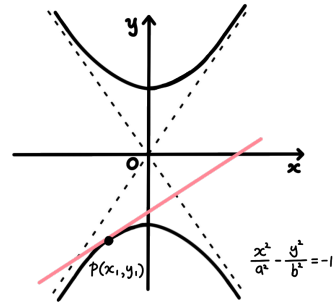
❶ 쌍곡선에 접하고 기울기가 $m(m\neq 0)$인 직선의 방정식 :

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

❷ 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식 :

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$





개념

쌍곡선과 직선의 위치 관계는 접하는 경우 이외에 또 어떤 경우가 있나요?

앞서 쌍곡선에 접하는 직선, 즉 접선의 방정식을 구하는 방법에 대해 알아보았다. 이제는 일반적인 직선이 쌍곡선과 만날 때, 어떤 방식으로 만나는지를 살펴보자.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 기울기 $m(m\neq 0)$, y절편 n을 가지는 직선 $y=mx+n$이 있을 때, 이 두 곡선이 만나는 점의 개수는 두 식을 연립하여 얻는 방정식의 해의 개수에 따라 결정된다.

직선의 방정식을 쌍곡선의 방정식에 대입하면 다음과 같은 이차방정식을 얻게 된다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{m^2x^2+2mnx+n^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)x^2-\frac{2mn}{b^2}x-\left(\frac{n^2}{b^2}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(b^2-a^2m^2\right)x^2-2a^2mnx-a^2\left(n^2+b^2\right)=0$$

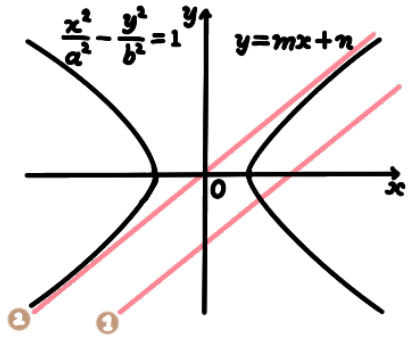
이 방정식은 다음 두 경우로 나눌 수 있다. ① $b^2-a^2m^2=0$인 경우에는 x에 대한 일차방정식이 되고, ② $b^2-a^2m^2\neq 0$인 경우에는 x에 대한 이차방정식이 된다.

① $b^2-a^2m^2=0$이므로 $m=\pm\dfrac{b}{a}$가 된다. 이는 곧 쌍곡선의 점근선의 기울기와 같다는 것을 의미한다.

이 경우 직선과 쌍곡선의 위치 관계는 다음과 같다.

❶ $n\neq 0$이면 쌍곡선과 직선은 한 점에서 만난다.

❷ $n=0$이면 쌍곡선과 직선은 만나지 않으며, 이때 직선은 쌍곡선의 점근선이다.



② $b^2-a^2m^2\neq 0$이므로 이 경우에는 x에 대한 이차방정식이 된다. 따라서 쌍곡선과 직선의 교점 개수는 이 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수에 따라 결정된다.

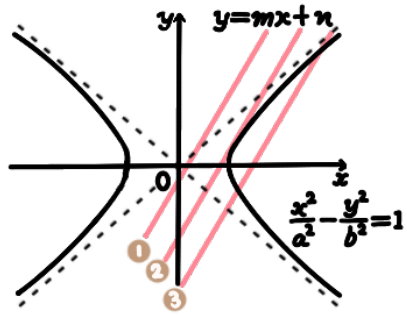
즉, 판별식 D의 값에 따라 쌍곡선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

❶ $D>0$이면 쌍곡선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

❷ $D=0$이면 쌍곡선과 직선은 한 점에서 만나며, 이때 직선이 쌍곡선에 접한다.

❸ $D < 0$이면 쌍곡선과 직선은 만나지 않는다.

즉, 쌍곡선과 직선이 만나는 방식도 이차방정식의 판별식에 의해 결정된다는 것을 알 수 있다.



더 알아보기

쌍곡선의 성질에는 어떤 것이 있나요?

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 다음과 같은 여러 가지 기하적 성질을 갖는다.

쌍곡선의 주요 성질

❶ 쌍곡선 위의 임의의 점에서 두 점근선에 각각 내린 두 수선의 길이의 곱은 일정하며, 그 값은 다음과 같다.

$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

❷ 임의의 점과 그 점에서의 접선 및 두 점근선으로 이루어진 삼각형의 넓이는 항상 $|ab|$로 일정하다.

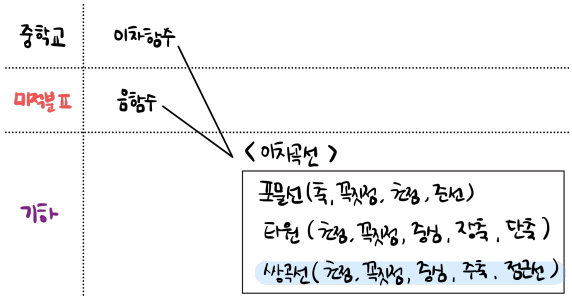
❸ 초점에서 임의의 점의 접선에 내린 수선의 발은 원 $x^2+y^2=a^2$ 위에 있다.

❹ 두 초점을 공유하는 타원과 쌍곡선은 서로 직교하며, 교점에서의 두 곡선에 대한 접선들의 기울기의 곱은 -1이다.

개념

쌍곡선과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

쌍곡선(초점, 꼭짓점, 중심, 주축, 점근선)은 반비례, 포물선, 쌍곡선, 이차곡선, 음함수 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



실제로 **쌍곡선**은 **포물선**, **타원**과 함께 좌표평면에서 두 변수 x, y에 대한 이차방정식으로 표현되는 **이차곡선**의 한 종류이다. 두 변수 x, y의 곱이 일정한 반비례 함수의 그래인 '한 쌍의 매끄러운 곡선' 역시 좌표평면에서 두 변수 x, y에 대한 이차방정식으로 표현되는 이차곡선의 한 종류이다. 좌표평면에 그려진 반비례 함수 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프를 원점을 중심으로 $90°$만큼 회전하면 주축이 y축인 쌍곡선을 얻고 $-90°$만큼 회전하면 주축이 x축인 쌍곡선을 얻는다. 쌍곡선의 어떤 점에서의 접선의 기울기는 다른 이차곡선과 마찬가지로 이차방정식의 판별식을 이용하여 구할 수도 있고, **음함수**의 미분법을 이용하여 구할 수도 있다.

심화(참고)

- **음함수의 미분법을 이용하여 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은 어떻게 구할 수 있을까요?**

  쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\,y_1)$에서의 접선의 방정식을 **음함수의 미분법**을 이용하여 유도해보자.

  양변을 x에 대하여 미분하면 다음과 같다:

  $$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y} \quad (y\neq 0)$$

  따라서 $y_1\neq 0$일 때, 기울기는 $\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$이므로 점 $\mathrm{P}(x_1,\,y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다:

  $$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

이를 정리하면 다음과 같은 형태가 된다:

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \tag{1}$$

그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\, y_1)$은 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

(1), (2)를 종합하면 최종적으로 다음과 같은 접선의 방정식을 얻는다:

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

이 식은 $y_1 = 0$일 때도 성립한다.

이차곡선二次曲線; quadratic curve

정의

이차곡선은 무엇인가요?

일반적으로 x와 y에 대한 이차방정식

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

은 특수한 경우(좌변이 x와 y에 관한 두 일차식으로 인수분해되는 경우)를 제외하면 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 중의 어느 하나를 나타내며 이들을 통틀어 **이차곡선**이라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식은 모두 x, y의 이차방정식 $f(x, y) = 0$ 꼴로 나타낼 수 있다. 예를 들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\text{원:}\quad & (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \iff x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \\
\text{포물선:}\quad & y^2 = 4x + 8 \iff y^2 - 4x - 8 = 0 \\
\text{타원:}\quad & \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \iff 9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0 \\
\text{쌍곡선:}\quad & \frac{(x+1)^2}{4} - y^2 = 1 \iff x^2 - 4y^2 + 2x - 3 = 0
\end{aligned}$$

의미

이차곡선이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'이(二)'는 '둘', '차(次)'는 '차수', '순서'를 뜻하며, '곡(曲)'은 '굽은', '선(線)'은 '선, 곡선'을 의미한다. 따라서 '이차곡선'은 차수가 **이차**인 방정식으로 표현되는 **곡선**을 의미하며, 대표적으로 원, 포물선, 타원, 쌍곡선이 이에 해당한다.



영어로는 quadratic curve라 하며, quadratic은 '정사각형'을 의미하는 라틴어 *quadratum*에서 유래된 단어이다. 정사각형의 한 변의 길이를 x라 할 때, 그 넓이는 x^2이

되므로, 여기에서 '이차' 라는 개념이 파생되었다. 따라서 quadratic curve는 방정식이 x^2과 같은 이차항을 포함하는 형태로 주어지는 곡선을 의미한다.

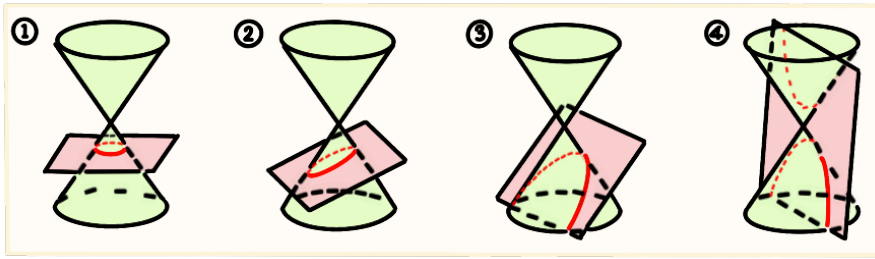
개념

이차곡선은 왜 원뿔곡선이라고 부를까요?

이차곡선은 x, y에 대한 이차방정식으로 나타나는 곡선을 뜻하며, 대표적으로 원, 타원, 포물선, 쌍곡선이 이에 해당한다.

그런데 흥미롭게도, 이차곡선은 단지 대수적으로 정의될 뿐만 아니라, **기하적인 방법**으로도 얻을 수 있다.

고대 그리스에서는 입체도형인 원뿔을 평면으로 자르는 방법을 연구했고, 그 결과 원, 포물선, 타원, 쌍곡선이라는 곡선들이 모두 원뿔의 단면으로 나타날 수 있다는 사실을 발견하였다.



다음은 원뿔을 자르는 방법과 그 결과로 얻어지는 곡선들이다.

❶ 원뿔의 밑면과 평행한 평면으로 자르면 **원**이 생기고,

❷ 원뿔의 기울기보다 작게 기울어진 평면으로 자르면 **타원**,

❸ 원뿔의 기울기와 같은 평면으로 자르면 **포물선**,

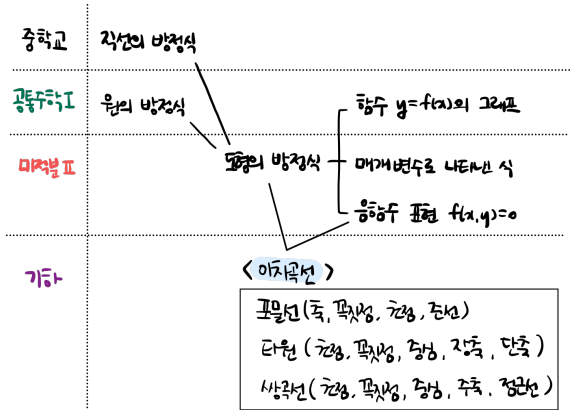
❹ 원뿔의 기울기보다 더 크게 기울어진 평면으로 자르면 **쌍곡선**이 생긴다.

즉, 이차곡선은 기하적으로는 원뿔을 자른 단면에서 얻을 수 있는 곡선들이며, 대수적으로는 x, y에 대한 이차방정식으로 나타나는 곡선들이다. 따라서 우리는 이차곡선을 **기하적 관점에서 '원뿔곡선' 이라고도 부르게 된 것**이다.

개념

이차곡선과 관련된 용어나 개념에는 어떤 것이 있나요?

이차곡선은 이차함수, 원, 도형의 방정식, 타원, 쌍곡선 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



이차곡선은 좌표평면에서 그 **도형의 방정식**이 두 변수 x, y에 대한 이차방정식으로 나타내어지는 곡선으로 원, **포물선**, **타원**, **쌍곡선**은 모두 이차곡선이다. 이차곡선은 원뿔을 평면으로 잘랐을 때 만들어지는 단면이라는 점에서 원뿔곡선이라 부르기도 한다.

좌표평면에서 이차곡선은 일반적으로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아니므로 $y=f(x)$꼴의 함수식으로 나타낼 수는 없다. 그러나 모든 이차곡선은 **음함수**의 형태 즉, 두 변수에 대한 이차방정식의 꼴로 나타낼 수 있다. 그러므로 이차곡선의 각 점에서의 접선의 기울기는 이차방정식의 판별식을 이용하여 구할 수도 있지만, 음함수의 미분법을 이용하여 구할 수도 있다.

심화(참고)

- **이차곡선은 어떻게 기하적으로 정의되며, 각 곡선별 초점의 성질은 무엇인가요?**

  고등학교 교육과정에서는 이차곡선을 단순히 도형의 방정식으로만 다루지 않고, 특정한 성질을 만족시키는 점들의 집합으로 정의하여 기하적인 시각에서도 이해할 수 있도록 구성한다.

  19세기 벨기에의 수학자 단델린(G. P. Dandelin)은 원뿔과 평면의 교선으로 이차곡선을 해석하고, 각 곡선의 초점의 성질을 설명하였다. 이때 사용된 기하적 모형은 원뿔 내부에 내접하고 평면에 접하는 구(Sphere)를 이용한다.

  다음은 각 이차곡선별로 해당 구가 접하는 점이 초점이 되는 기하적 정의를 정리한 것이다.

이차곡선의 기하적 정의와 초점의 성질 (Dandelin의 구 이용)

❶ **포물선(parabola)**:

- 포물선의 경우에는 하나의 구 S만 존재하며, 이 구가 평면과 한 점 F에서 접할 때 그 점이 **초점**이 된다.
- 이때, 포물선 위의 임의의 점 P에 대해

$$|\mathrm{PF}| = |\mathrm{PH}| \quad (\text{단, } \mathrm{H} : \mathrm{P}\text{에서 준선에 내린 수선의 발})$$

❷ **타원(ellipse)**:

- 원뿔 안에 내접하는 두 개의 구 S_1, S_2가 평면과 각각 한 점에서 접할 때, 그 접점 F_1, F_2는 타원의 **두 초점**이 된다.
- 이때, 타원 위의 임의의 점 P에 대해

$$|\mathrm{PF}_1| + |\mathrm{PF}_2| = \text{일정}$$

❸ **쌍곡선(hyperbola)**:

- 쌍곡선도 두 개의 구 S_1, S_2와 평면이 각각 점 F_1, F_2에서 접할 때, 이들이 **쌍곡선의 초점**이 된다.
- 이때, 쌍곡선 위의 임의의 점 P에 대해

$$|\mathrm{PF}_1| - |\mathrm{PF}_2| = \text{일정} \quad \text{또는} \quad |\mathrm{PF}_2| - |\mathrm{PF}_1| = \text{일정}$$

이처럼 이차곡선은 방정식의 형태뿐 아니라, 구와 평면의 교선이라는 기하적 구조 속에서도 명확하게 정의되며, 각 곡선의 초점 개념이 자연스럽게 유도된다.

교선交線; line of intersection

정의

교선은 무엇인가요?

공간에서 서로 다른 두 평면은 만날 때와 만나지 않을 때가 있다. 서로 다른 두 평면이 만날 때 두 평면은 한 직선을 공유한다. 이때 이 직선을 두 평면의 **교선**이라고 한다.

한편, 두 평면 α와 β가 만나지 않을 때 '두 평면 α와 β는 서로 평행하다'고 하고, 이것을 기호로

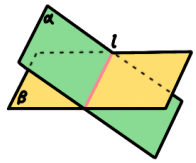
$$\alpha \parallel \beta$$

와 같이 나타낸다.

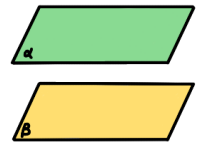
공간에서 서로 다른 두 평면의 위치 관계는 다음 두 가지 경우가 있다.

서로 다른 두 평면의 위치 관계

1. 만난다.



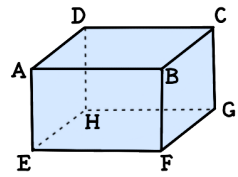
2. 평행하다.



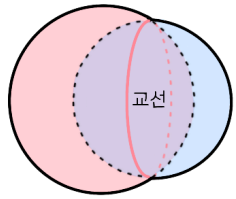
예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 다음 직육면체에서 평면 ABCD와 평면 ABEF가 만나고, 이때의 교선이 선분 AB이다.



❷ 공간에서 서로 다른 두 곡면이 만나 하나의 곡선을 이루는 경우에도 이 곡선을 교선이라고 하며, 이때 두 곡면은 서로 만난다고 한다.



3 두 평면 $x+y+z=1$과 $x+3y-z=3$의 교선을 구해보자. 두 평면이 만나 생기는 교선은 두 평면의 방정식을 연립하여 얻을 수 있다. 따라서 교선의 방정식은 $x+2y=2$이다.

의미 교선이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

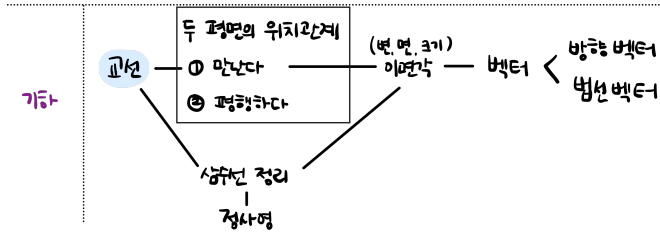
'교(交)'는 '서로 마주치다', '엇갈리다'는 뜻이며, '선(線)'은 '선을 그리다', '줄'이라는 뜻을 가진다. 따라서 '교선'은 서로 다른 두 면이 만나는 선, 즉 두 도형이 서로 **교**차하여 생기는 **선**을 의미한다.

交 사귈 교　　線 줄 선

영어로는 line of intersection이라 하며, intersection은 라틴어 *inter* '사이'와 *sectio* '자르기'에서 유래하여 '사이에서 자름', '서로 가름', '만나는 곳'을 뜻하며, 이 경우 두 평면이 만나는 선을 지칭한다.

개념 교선과 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

교선은 서로 다른 두 평면의 위치 관계, 이면각, 삼수선의 정리, 직선의 방정식(방향벡터), 평면의 방정식(법선벡터), 벡터 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



교선은 두 평면이 서로 만날 때 형성되는 직선으로, 공간도형과 벡터 개념에서 중요한 역할을 한다. 특히 두 평면의 법선벡터를 이용하여 교선의 방향벡터를 구할 수 있으며, 평면의 방정식과 직선의 방정식의 관계를 연결하는 중요한 매개체가 된다. 또한 이면각과 삼수선의 정리와 같이 공간에서의 거리·각도 관계를 다루는 여러 정리에서도 교선의 개념이 기본적으로 사용된다.

즉, 교선은 공간도형 전반의 이해를 위해 필수적인 개념으로, 여러 기하적 성질과 공리, 정리를 연결해주는 핵심적인 역할을 한다.

삼수선 정리三垂線 - 定理; theorem of three perpendiculars

정의

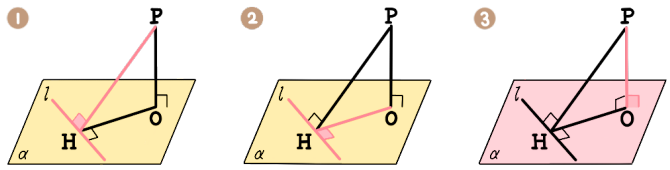
삼수선 정리는 무엇인가요?

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 다음이 성립한다.

❶ $\overline{PO} \perp \alpha$이고 $\overline{OH} \perp l$이면, $\overline{PH} \perp l$이다.

❷ $\overline{PO} \perp \alpha$이고 $\overline{PH} \perp l$이면, $\overline{OH} \perp l$이다.

❸ $\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$이면, $\overline{PO} \perp \alpha$이다.



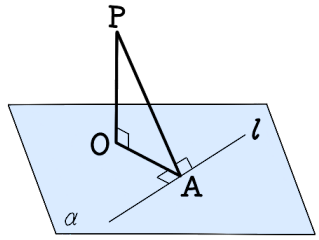
일반적으로 공간에서 직선과 평면의 수직 관계에 대하여 위와 같이 성립하고, 이것을 **삼수선 정리**라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α 위의 직선 l까지의 거리는 삼수선 정리를 이용하여 구할 수 있다.

다음 그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 A라 하자.



이때 점 O와 점 A는 다음의 관계를 만족한다.

$\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OA} \perp l$

삼수선 정리에 의하면 $\overline{PA} \perp l$이므로, 점 P에서 직선 l까지의 거리는 선분 PA의 길이와 같다.

의미

삼수선 정리라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'삼(三)'은 '셋'을 뜻하며, '수(垂)'는 '수직으로 드리우다', '선(線)'은 '줄', '직선'을 의미한다. 따라서 '삼수선 정리'는 공간에서 서로 수직인 세 직선 사이의 관계를 다룬 정리이다.

三 석 삼 垂 드리울 수 線 줄 선

영어로는 theorem of three perpendiculars라 하며, perpendicular은 라틴어 *perpendiculum*에서 유래하여 '직각을 이루는', '수직의'를 뜻하며, 이 정리에서 등장하는 세 수직 관계를 지칭하는 데 사용된다.

개념

삼수선 정리는 어떤 성질을 나타내나요?

삼수선 정리는 평면 위에 있지 않은 한 점과, 평면 위의 한 점에서 평면 또는 그 위의 직선에 내린 세 수선 사이의 관계를 나타내는 정리이다. 이 정리에 따르면 다음 세 조건 중에서 두 조건이 성립하면 나머지 하나도 자동으로 성립하게 된다.

❶ $\overline{PH} \perp l$: 점 P에서 평면 위의 직선 l에 내린 수선

❷ $\overline{OH} \perp l$: 평면 위의 점 O에서 직선 l에 내린 수선

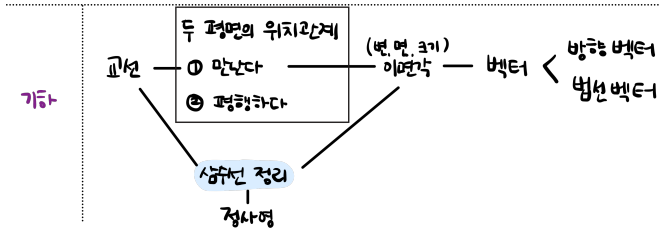
❸ $\overline{PO} \perp \alpha$: 점 P에서 평면 α에 내린 수선

즉, 삼수선 정리를 이용하면 평면 위에 있지 않은 점에서 평면이나 직선까지의 거리를 쉽게 구할 수 있고, 서로 수직인 관계를 단계적으로 찾아낼 수 있다.

개념

삼수선 정리와 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

삼수선 정리는 교선, 이면각, 정사영 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



삼수선 정리는 공간도형에서 직선과 평면, 두 평면이 만나는 **교선**, 그리고 평면 위의 **정사영**의 관계를 다루는 중요한 성질이다. 특히 삼수선 정리는 한 직선에서 다른 평면으로 내린 수선과 그 수선의 발을 평면 위의 또 다른 직선에 정사영했을 때 나타나는 기하적 관계를 설명한다. 이 과정에서 두 평면이 이루는 **이면각**의 개념도 자연스럽게 사용된다.

따라서 평면에 내린 수선의 성질, 평면 위 점의 **정사영** 개념 등을 종합적으로 이해하는 것이 삼수선 정리를 제대로 활용하는 데 필수적이다.

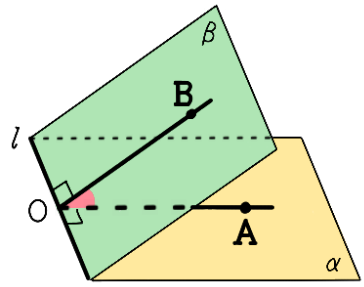
즉, 삼수선 정리는 공간도형에서의 거리 및 수직 관계를 파악하는 데 중요한 역할을 하며, 직선·평면의 기본 성질과 정사영과 수직 개념을 유기적으로 연결해주는 핵심적인 정리이다.

이면각二面角; dihedral angle

정의

이면각(변, 면, 크기)은 무엇인가요?

공간에서 두 평면이 이루는 각에 대하여 알아보자. 오른쪽 그림과 같이 직선 l을 공유하는 두 반평면 α와 β로 이루어진 도형을 **이면각**이라고 한다. 이때 직선 l을 **이면각의 변**, 두 반평면 α와 β를 각각 **이면각의 면**이라고 한다.



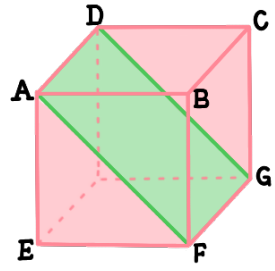
또, 이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 두 반직선 OA와 OB를 각각 두 반평면 α, β 위에 그을 때, $\angle AOB$의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기를 **이면각의 크기**라고 한다.

서로 다른 두 평면이 만나면 네 개의 이면각이 생기는데, 이 중에서 크기가 크지 않은 한 이면각의 크기를 '두 평면이 이루는 각의 크기'라고 한다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

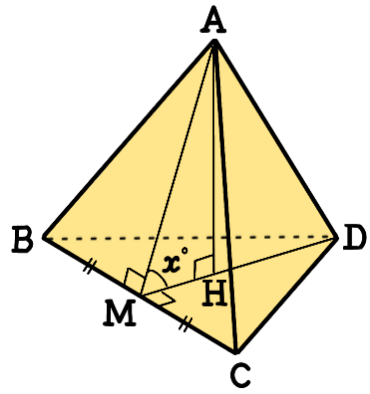
1 다음 그림과 같은 정육면체에서 면 ABCD와 면 AFGD가 이루는 각의 크기를 구해 보자.



이 두 면은 모서리 AD를 교선으로 가지며 만나는 두 평면이다. 정육면체는 모서리들이 모두 수직으로 만나므로, 이면각의 크기는 두 면에 각각 수직인 직선을 모서리 AD 위의 한 점에서 그어 만들 수 있다.

이때, 면 ABCD에 수직인 직선은 모서리 AB, 면 AFGD에 수직인 직선은 모서리 AF이다. 따라서 이면각의 크기는 $\angle BAF$와 같고, $\angle BAF = 45°$이므로 두 면이 이루는 각의 크기는 $45°$이다.

❷ 정사면체에서 두 면이 이루는 각의 크기를 구해보자.



위 그림과 같은 정사면체 ABCD에서 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \quad \overline{DM} \perp \overline{BC}$$

이므로, 이면각의 크기는 $\angle AMD$와 같고, 이에 따라 $\cos x° = \cos \angle AMD$를 이용하여 이면각의 크기를 구할 수 있다.

정사면체의 각 면은 정삼각형이므로 $\triangle ABC \equiv \triangle DBC$에서 $\overline{AM} = \overline{DM}$이고,

꼭짓점 A에서 $\triangle BCD$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선 정리에 의해

$$\overline{HM} \perp \overline{BC}$$

이고, H는 $\triangle BCD$의 무게중심이다. 따라서 $\overline{HM} = \frac{1}{3}\overline{DM} = \frac{1}{3}\overline{AM}$이다.

따라서 직각삼각형 $\triangle AMH$에서

$$\cos x° = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3}$$

이므로 정사면체의 두 면이 이루는 각의 크기는 코사인 값을 $\frac{1}{3}$이 되도록 하는 $x°$ 임을 알 수 있다.

의미

이면각이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'이(二)'는 '둘' 을 뜻하며, '면(面)'은 '표면' , '평평한 면' 을 의미한다. '각(角)'은 '각도' , '뾰족한 모양' 을 뜻한다. 따라서 '이면각(二面角)'은 '두 개의 면이 이루는 각' 이라는 의미로, 입체도형에서 두 평면이 만날 때 형성되는 기하학적 각도를 말한다.

이면각은 두 평면의 교선(만나는 직선)을 기준으로 하여, 각 평면에서 교선에 직각인 선분들을 그었을 때 그 두 선분이 이루는 각으로 정의된다. 이 각은 두 평면이 서로 얼마나 기울어져 있는지를 나타내는 척도이다.

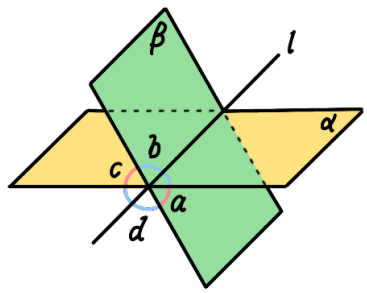
二 두 이　面 낯 면　角 뿔 각

영어로는 dihedral angle라 하고 dihedral은 그리스어 *di-*('둘')와 *hedra*('면, 기저')가 합쳐진 말로 '두 면에 관한' 이라는 의미를 가진다. angle은 '각도' 를 뜻하므로, dihedral angle은 두 평면이 이루는 각을 의미하는 표현이다.

개념

두 평면이 만나면 이면각은 어떻게 생기며, 그 크기는 어떻게 정의하나요?

서로 다른 두 평면 이 만나면 교선을 따라 네 개의 이면각이 생긴다. 이 중에서 크기가 크지 않은 하나의 이면각의 크기를 '두 평면이 이루는 각의 크기'라고 한다.



위 그림과 같이 두 평면 α, β가 직선 l에서 만나면 이면각은 $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$의 네

각으로 나타난다. 이때 다음이 성립한다.

$$\angle a = \angle c, \quad \angle b = \angle d, \quad \angle a + \angle b = 180^\circ$$

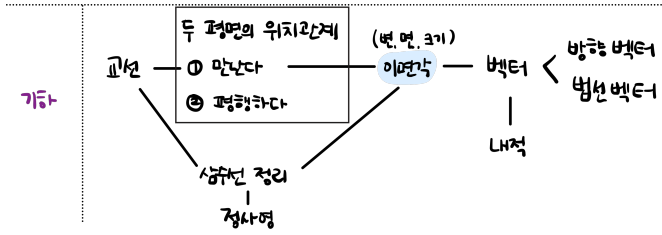
특히, 두 평면 α와 β가 이루는 각이 90°일 때 두 평면은 **서로 수직**이라 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\alpha \perp \beta$$

개념

이면각과 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

이면각(변, 면, 크기)은 교선, 삼수선 정리, 정사영, 평면의 방정식, 벡터, 내적, 법선벡터 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



이면각은 두 평면이 이루는 각을 의미하며, 공간도형과 벡터 개념에서 매우 중요한 위치를 차지한다. 두 평면이 주어졌을 때 이면각의 크기는 두 평면의 **법선벡터**가 이루는 각의 크기로 결정되며, 이는 **벡터**의 **내적**을 이용하여 계산된다. 또한 이면각의 '변'과 '면'은 **교선**과 그 교선을 포함하는 두 평면을 의미하며, 이 구조는 공간도형의 기본적인 위치 관계를 이해하기 위한 핵심 요소이다.

삼수선 정리에서도 이면각은 한 직선에서 평면으로 내린 수선과 그 수선의 발을 평면 위의 다른 직선에 정사영하는 과정에서 수직 관계를 설명하는 데 중요한 역할을 한다. 또한 **정사영**에서도 이면각은 한 평면에서 다른 평면으로 점이나 직선을 투영할 때, 두 평면의 기울기나 직교성 판단에 직접적으로 관련된다.

즉, 이면각은 두 평면이 만날 때 생기는 기하적 구조와 공간적 위치 관계를 설명하는 기본 개념으로, 기하학 전반의 다양한 정리와 성질을 연결해 주는 기초적인 역할을 한다.

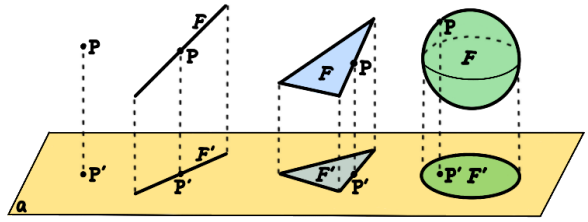
정사영正射影; orthogonal projection

정의

정사영은 무엇인가요?

한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P′이라 할 때, 점 P′을 '점 P의 평면 α 위로의 **정사영**'이라고 한다.

또, 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형을 F'이라 할 때, F'을 '도형 F의 평면 α 위로의 **정사영**'이라고 한다.

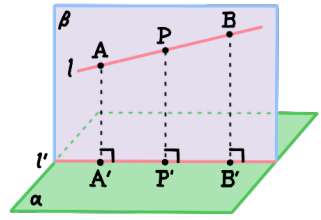


일반적으로 평면 위로의 정사영에서 점의 정사영은 점이고, 직선의 정사영은 한 점 또는 직선이다. 또, 다각형의 정사영은 선분 또는 다각형이고, 구의 정사영은 원이다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

직선 l이 평면 α와 수직이 아닌 경우를 생각해보자.



직선 l 위의 두 점 A, B를 선택하고 각 점에서 평면 α로 내린 수선의 발을 각각 A′, B′라고 하자. 그러면 $\overline{AA'}$와 $\overline{BB'}$는 서로 평행이 되며, 이 두 선분은 평면 β를 이루고, 이 평면은 평면 α에 수직이다.

직선 l은 평면 β에 포함되므로, 직선 l 위의 임의의 점 P의 평면 α로의 정사영은 평면 β와 평면 α가 만나는 교선인 직선 l' 위에 있게 된다. 즉, 평면 α 위의 직선 l'은 직선 l의 평면 α 위로의 정사영이다.

의미

정사영이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'정(正)'은 '바르다', '곧다', '수직이다' 라는 뜻을 가지며, '사(射)'는 '쏘다', '투사하다' 를 의미하고, '영(影)'은 '그림자', '형체' 를 뜻한다. 따라서 '정사영(正射影)'은 '평면 밖에서 곧고 바르게 투사한 그림자', 즉 비뚤어지지 않고 곧은 사영을 의미한다.

正 바를 정　射 쏠 사　影 그림자 영

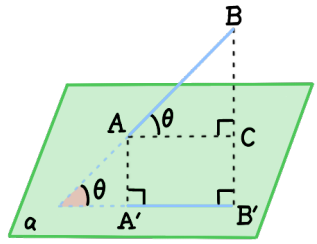
영어로는 orthogonal projection이라 하며, orthogonal은 그리스어 *orthos* (곧은, 직각의)와 *gonia* (각도)에서 유래하여 '직각의' 를 뜻한다. projection은 라틴어 *proicere* (앞으로 던지다)에서 파생되어 '던짐, 투영' 이라는 뜻을 가지며, 수학적으로는 대상의 형상을 다른 공간이나 기하적 구조 위에 옮기는 개념으로 사용된다.

따라서 orthogonal projection은 어떤 대상이 주어진 평면 또는 선 위로 수직 방향으로 투영된 결과를 의미한다.

개념

정사영의 길이는 어떻게 구하나요?

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이를 구해보자.



선분 A′B′를 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$라고 하자.

$\overline{A'B'}$는 $\overline{AB}$의 평면 α 위로의 정사영이므로

$$\overline{AA'} \perp \alpha, \quad \overline{BB'} \perp \alpha$$

이다. 따라서 $\overline{AA'}//\overline{BB'}$이다. 점 A에서 $\overline{BB'}$에 내린 수선의 발을 C라고 하면, 도형 $AA'B'C$는 직사각형이므로

$$\overline{A'B'} = \overline{AC}$$

이다. 따라서 $\angle BAC = \theta$이다. $\overline{A'B'} = \overline{AC}$이고 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \overline{AB}\cos\theta$이므로 정사영의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정사영의 길이

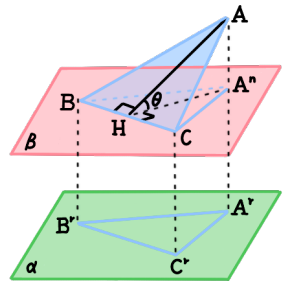
선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$라 하면, 두 길이 사이의 관계식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$$

개념

정사영의 넓이는 어떻게 구하나요?

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구해보자. 이때, 삼각형 ABC의 한 변이 평면 α에 평행하다고 가정하고, 그 변을 $\overline{BC}$이라 하자.



삼각형 $A'B'C'$를 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영이라 하고, 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$라고 하고, 삼각형 ABC와 삼각형 $A'B'C'$의

넓이를 각각 S, S'이라 하자. (이때, A′, B′, C′는 각각 A, B, C에서 평면 α로 내린 수선의 발이다)

$\overline{BC} \parallel \alpha$일 때, $\overline{BC}$를 포함하고 α에 평행한 평면을 β, 직선 AA′와 β의 교점을 점 A″라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''BC$$

또, 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면,

$$\overline{AA''} \perp \beta, \quad \overline{AH} \perp BC$$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{A''H} \perp BC$$

이다. 즉, $\angle AHA'' = \theta$이다.

따라서 $\overline{A''H} = \overline{AH}\cos\theta$이므로 넓이 S'는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$S' = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{A''H} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH}\cos\theta = S\cos\theta$$

일반적으로 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

정사영의 넓이

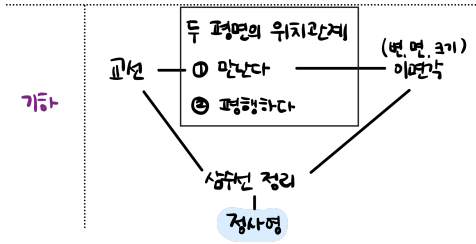
평면 α 위에 있는 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기를 θ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$라 하면, 두 넓이 사이의 관계식은 다음과 같이 나타낸다.

$$S' = S\cos\theta$$

개념

정사영과 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

정사영은 교선, 삼수선 정리, 이면각 등의 용어와 밀접하게 연결된다.



정사영은 한 점이나 도형을 특정 직선 또는 평면에 수직으로 투영하는 개념으로, 공간도형의 거리와 위치 관계를 분석하는 데 필수적이다. 정사영은 주어진 점에서 평면으로 내린 수선의 발을 구하거나, 공간에서의 최소 거리 문제를 해결할 때 자주 활용된다.

삼수선 정리 역시 정사영 개념을 기반으로 한 직교성과 거리 관계를 설명하는 대표적인 정리이다. 삼수선의 정리에서는 한 직선에서 평면으로 내린 수선과 그 수선의 발을 두 평면의 **교선** 위에 다시 정사영할 때 나타나는 기하적 성질을 다룬다. 이러한 과정은 정사영의 구조적 역할 없이는 설명할 수 없으며, 그 과정에서 두 평면이 이루는 각인 **이면각**의 개념도 자연스럽게 등장한다.

즉, 두 직선 또는 두 평면 사이의 각도, 공간에서의 위치 관계를 해석하는 과정에서도 정사영은 매우 중요한 도구로 사용된다. 이처럼 정사영은 기하에서 직선·평면·각도·거리 등을 유기적으로 연결해 해석할 수 있게 해주는 필수적인 개념이다.

좌표공간座標空間; coordinate space 과 공간좌표空間座標; coordinates in space

정의

좌표공간과 공간좌표는 무엇인가요?

오른쪽 그림과 같이 세 수직선을 각각의 원점에서 서로 직교하도록 긋고, 그 교점을 O라 하자. 이때 세 수직선을 각각 x축, y축, z축이라 하고, 이 세 축을 **좌표축**이라고 한다.

이와 같이 좌표축이 정해진 공간을 **좌표공간**이라 하고, 점 O를 좌표공간의 **원점**이라고 한다.

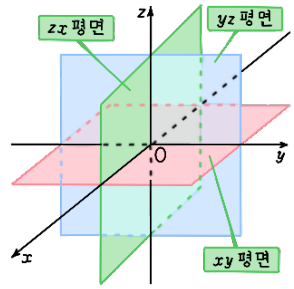
좌표공간에서

❶ x축과 y축을 포함하는 평면을 xy평면,

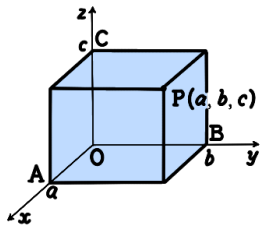
❷ y축과 z축을 포함하는 평면을 yz평면,

❸ z축과 x축을 포함하는 평면을 zx평면

이라 하고, 이 세 평면을 **좌표평면**이라고 한다.



다음 그림과 같이 좌표공간에 있는 한 점 P를 지나고 yz평면, zx평면, xy평면에 평행한 평면이 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.



세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라 할 때, 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 하나로 정해진다.

역으로 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 주어지면 x축, y축, z축 위에서의 좌표가 각각 a, b, c인 점 P가 하나로 정해진다.

따라서 공간에 있는 한 점 P와 세 실수의 순서쌍 (a, b, c) 사이에 일대일대응 관계가 성립한다. 이 순서쌍 (a, b, c)를 점 P의 **공간좌표** 또는 간단히 **좌표**라 하고, a, b, c를

차례대로 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라고 한다.

좌표공간에 있는 점 P의 좌표가 (a, b, c)일 때, 이것을 기호로

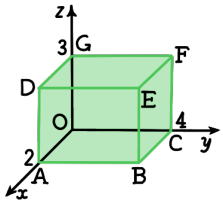
$$\mathrm{P}(a, b, c)$$

와 같이 나타낸다.

예 구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 점 $\mathrm{A}(1, 0, 0)$은 x축 위의 점이다. 점 $\mathrm{B}(0, 2, 4)$는 yz평면 위의 점이다.

❷ 다음 그림의 직육면체에서 각 꼭짓점의 좌표는 다음과 같다.



$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$,
$\mathrm{B}(2,\ 4,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 4,\ 0)$,
$\mathrm{D}(2,\ 0,\ 3)$, $\mathrm{E}(2,\ 4,\ 3)$,
$\mathrm{F}(0,\ 4,\ 3)$, $\mathrm{G}(0,\ 0,\ 3)$.

의미 좌표공간과 공간좌표라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

좌표공간 '좌(座)'는 '앉다', '자리를 잡다'는 뜻을 가지며, '표(標)'는 '표시하다', '표지'라는 의미를 갖는다. 따라서 '좌표(座標)'는 어떤 점의 위치를 나타내는 기준 표시를 의미한다. 또한 '공(空)'은 '빈', '간(間)'은 '사이'를 뜻해 '공간(空間)'은 위치나 물체가 존재할 수 있는 넓은 영역을 의미한다.

결국 '좌표공간(座標空間)'은 위치를 좌표로 나타낼 수 있는 수학적 공간을 뜻한다.

座	標	空	間
자리 좌	우듬지 표	빌 공	사이 간

영어로는 coordinate space라 하며, coordinate는 독일 수학자 G. W. Leibniz(1646~1746)가 사용한 것으로 알려져 있으며, 어원적으로는 *co-*('함께')와 *ordin*('똑바른 줄')에서 유래하였다. 또한 ordinate는 본래 y좌표를 의미하는 단어로,

coordinate는 x좌표와 y좌표를 함께 나타낸다는 의미를 지닌다. space는 '공간'을 뜻하므로, coordinate space는 x좌표와 y좌표의 정보를 바탕으로 점의 위치를 나타내는 수학적 공간을 의미한다.

공간좌표 공간좌표(空間座標)는 3차원 공간 속에서 점의 위치를 나타내는 좌표를 의미하며, 보통 (x, y, z)의 순서쌍으로 표현된다.

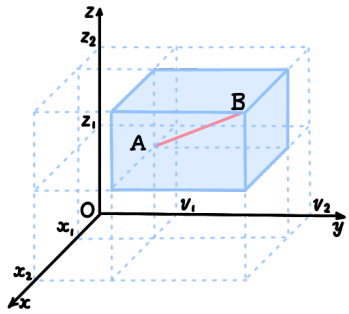
空	間	座	標
빌 공	사이 간	자리 좌	우듬지 표

영어로는 coordinates in space라 하며, 이는 공간에서 설정된 좌표를 나타낸다.

개념

공간에서 두 점 사이의 거리는 어떻게 측정하나요?

공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리를 구하려면, 세 좌표평면에 평행한 직육면체를 생각해볼 수 있다.



선분 AB는 이 직육면체의 대각선에 해당하므로, 각각의 축을 따라 이동한 거리의 제곱의 합의 제곱근으로 구할 수 있다.

즉, 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

특히 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$과 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

이 공식은 선분 AB가 세 좌표평면 중 어떤 평면에 평행한 경우에도 그대로 적용된다.

개념

공간에서 선분을 내분하는 점의 좌표는 어떻게 구하나요?

공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 이은 선분 AB 위에서 주어진 비율 $m : n$ $(m > 0,\ n > 0)$로 내분하거나 외분하는 점의 좌표는 다음과 같이 구한다.

선분 AB를 $m : n$ $(m > 0,\ n > 0)$으로 **내분**하는 점의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n},\quad \frac{my_2 + ny_1}{m+n},\quad \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

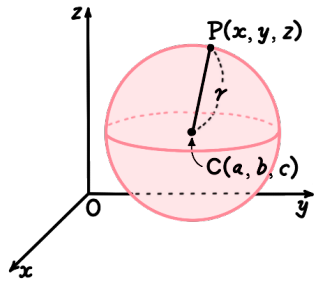
특히, 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$과 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 이은 선분 AB의 **중점**의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\quad \frac{y_1 + y_2}{2},\quad \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

개념

공간에서 구의 방정식은 어떻게 나타내나요?

구의 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식을 구해보자.



구 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$는 중심 C로부터 거리 r만큼 떨어져 있으므로, 점 P는 다음 조건을 만족한다.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

양변을 제곱하여 정리하면, 구의 방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

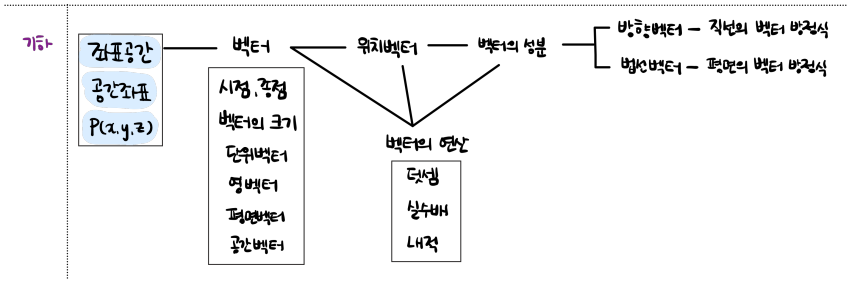
특히, 중심이 원점 $O(0, 0, 0)$일 때에는 방정식이 다음과 같이 간단해진다.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

개념

좌표공간과 공간좌표와 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

좌표공간과 공간좌표는 직선의 방정식, 평면의 방정식, 원의 방정식, 도형의 방정식, 벡터(시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 영벡터, 평면벡터, 공간벡터), 위치벡터, 벡터의 성분, 실수배, 내적, 방향벡터(직선의 벡터방정식), 법선벡터(평면의 벡터방정식) 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



좌표공간은 점을 좌표로 나타내는 공간으로, 다양한 도형을 해석하는 기본 틀을 제공한다. 좌표공간을 이용하면 직선 및 평면의 방정식, 도형의 방정식, 점과 점 사이의 거리, 점과 평면 사이의 거리 등을 정확하게 표현할 수 있다.

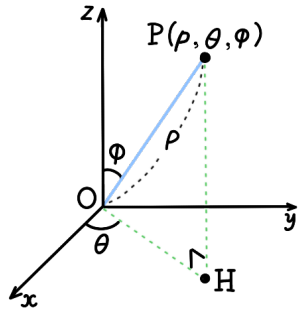
공간좌표는 벡터를 위치벡터로 나타내고, 이를 벡터의 성분을 이용하여 직관적이고 계산 가능한 형태로 표현한다. 벡터의 성분은 곧 공간좌표와 동일한 구조를 가지며, 이를 바탕으로 평면벡터, 공간벡터를 표현하고, 벡터의 덧셈, 실수배, 내적 등의 연산이 이루어진다.

또한 공간의 직선과 평면을 다룰 때 사용하는 방향벡터와 법선벡터 역시 모두 좌표공간을 기반으로 정의되며, 직선·평면의 벡터방정식을 구성하는 핵심 역할을 한다.

즉, 좌표공간과 공간좌표는 공간도형 전체를 기술하는 기초 도구로서, 정확한 위치 표현과 벡터를 이용한 도형 분석에 필수적인 기반 개념이다.

● 공간좌표를 나타내는 다른 방법은 무엇인가요?

공간상의 한 점을 나타내는 방법 중 하나로 **구면좌표계**가 있다. 구면좌표계에서는 한 점 P의 위치를 직각좌표계의 (x, y, z) 대신, 구면의 반지름과 두 개의 각도를 사용하여 나타낸다.



점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라고 하자. OP의 길이를 ρ, 즉 원점으로부터 점 P까지의 거리라 하고, 반직선 OH와 x축이 이루는 각을 θ, 반직선OP와 z축이 이루는 각을 φ라고 하면, 점 P의 좌표를 (ρ, θ, φ)로 나타낸다. 이를 **구면좌표**라고 한다.

이때, 구면좌표 (ρ, θ, φ)와 직교좌표 (x, y, z) 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

또한, 이들을 활용하면 다음과 같은 식도 유도된다.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

실제로 앞서 배운 구의 방정식 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$은 구면좌표로 나타내면, $\rho = r$로 표현된다.

구면좌표계는 점이 구의 표면을 따라 어떻게 분포되어 있는지를 표현하기에 적합하여, 물리학이나 공학 등 여러 분야에서 활용된다.

● 공간에서 선분을 외분하는 점의 좌표는 어떻게 구하나요?

공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB 위에서 주어진 비율 $m : n$ $(m > 0,\ n > 0)$로 내분하거나 외분하는 점의 좌표는 다음과 같이 구한다.

선분 AB를 $m : n$ $(m > 0,\ n > 0,\ m \neq n)$으로 **외분**하는 점의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n},\ \frac{my_2 - ny_1}{m - n},\ \frac{mz_2 - nz_1}{m - n} \right)$$

벡터 벡터; vector

정의

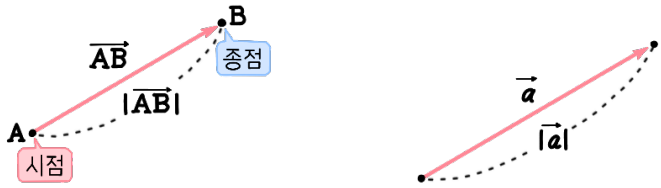
벡터는 무엇인가요?

크기와 방향을 함께 갖는 양을 **벡터**라고 한다.

벡터를 그림으로 나타낼 때 오른쪽 그림과 같이 방향이 주어진 선분을 이용한다. 점 A에서 점 B로 향하는 방향이 주어진 선분 AB를 '벡터 AB' 라 하며, 이것을 기호로

$\overrightarrow{AB}$

와 같이 나타낸다.



이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **시점**, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **종점**이라고 한다.

또, 선분 AB의 길이를 **벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기**라 하며, 이것을 기호로

$|\overrightarrow{AB}|$

와 같이 나타낸다.

벡터를 한 문자로 나타낼 때는

$\vec{a}$

와 같이 나타내고, 벡터 $\vec{a}$의 크기는

$|\vec{a}|$

와 같이 나타낸다. 특히, 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라고 한다.

벡터 $\overrightarrow{AA}$와 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 **영벡터**라 하며, 기호로

$\vec{0}$

와 같이 나타낸다.

영벡터의 크기는 0이고, 그 방향은 생각하지 않는다.

벡터는 평면이나 공간 어디에서든 생각할 수 있는데, 평면에서의 벡터를 **평면벡터**라 하고 공간에서의 벡터를 **공간벡터**라고 한다.

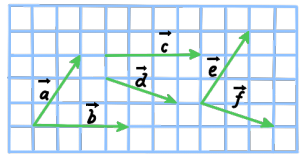
– 크기만을 갖는 양을 스칼라라고 한다.

– 화살표의 방향은 벡터의 방향을 나타낸다.

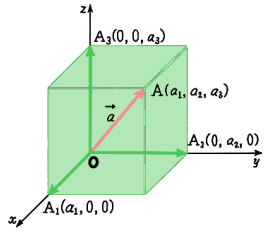
예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 다음과 그림의 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$는 모두 평면벡터이다.



❷ 다음과 그림의 벡터 $\overrightarrow{OA}$는 공간벡터이다.



의미

벡터라는 용어의 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

벡터는 영어 vector에서 온 말이며, 한자어 없이 발음대로 한글로 표기한 수학 용어이다. vector는 본래 라틴어 *vehere*에서 유래하였는데, 이는 '나르다', '운반하다'는 뜻을 가진다. 이 말에서 파생된 vector는 수학에서는 크기와 방향이라는 두 가지 정보를 함께

운반해 주는 개념이라는 점에서 이 용어가 사용되었다. 즉, vector는 어떤 양의 크기와 방향을 함께 표현하는 수학적 대상을 나타내며, 이름 자체가 그 역할과 성질을 잘 반영하고 있다.

개념

두 벡터가 언제 같아지나요?

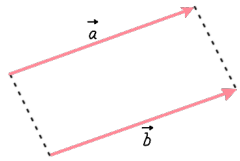
서로 다른 위치에 놓여 있는 두 물체에 같은 방향, 같은 빠르기로 힘을 작용시키면, 그 두 힘은 같은 것으로 생각할 수 있다. 이와 같이 벡터는 크기와 방향에 의해서만 결정되므로, 벡터의 위치는 중요하지 않다. 다시 말해, 시점이 다르더라도 벡터의 크기와 방향이 같다면 두 벡터는 같다고 본다.

예를 들어, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 시점이 다르더라도

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 그리고 방향이 동일

이라면, 두 벡터는 같으며 다음과 같이 기호로 나타낸다.

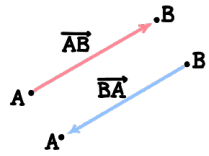
$\vec{a} = \vec{b}$





벡터 $\overrightarrow{AB}$와 벡터 $\overrightarrow{BA}$는 다른가요?

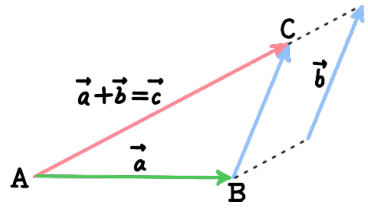
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$의 크기는 같지만 방향이 서로 반대 방향이다.



개념

벡터의 덧셈은 어떻게 하나요?

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 덧셈은 벡터를 연결하여 이어 붙이는 방식으로 정의된다. 예를 들어, $\vec{a}$의 시점을 A라 하고, $\vec{a}$의 종점을 B, 그리고 $\vec{b}$의 시점을 B라 하여 벡터 $\vec{b}$를 그리면, B에서 $\vec{b}$만큼 이동한 점 C가 생긴다.



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

이때, A에서 C까지의 벡터 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$로 정의한다. 즉, 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 차례대로 연결하면 그 합은 벡터 $\vec{c}$가 된다.

이를 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$



벡터의 덧셈은 어떤 성질을 만족하나요?

벡터의 덧셈은 다음과 같은 중요한 성질을 만족한다.

❶ **교환법칙**: 두 벡터의 덧셈은 순서를 바꾸어도 결과가 같다.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

❷ **결합법칙**: 세 벡터를 더할 때, 덧셈의 순서를 바꾸어도 결과가 같다.

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

이러한 성질들 덕분에 벡터 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$처럼 세 개 이상의 벡터를 괄호 없이 더할 수 있다.



영벡터는 어떤 역할을 하나요?

벡터의 덧셈에서 영벡터 $\vec{0}$는 항등원 역할을 하며, 벡터 $\vec{a}$와 더했을 때 벡터 $\vec{a}$ 자신이 된다. 또한, 어떤 벡터 $\vec{a}$에 대해 그 반대 방향의 벡터 $-\vec{a}$를 더하면 영벡터가 된다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}, \qquad \vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

따라서 영벡터는 벡터 덧셈의 항등원이 되며, 벡터와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터의 합은 영벡터가 된다.

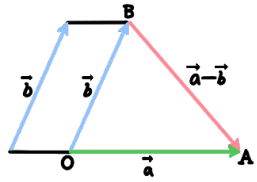
개념

벡터의 뺄셈은 어떻게 정의하나요?

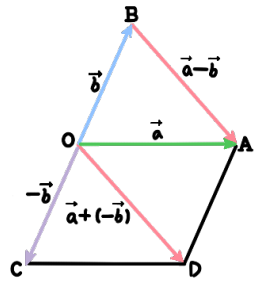
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}-\vec{b}$는 벡터 $\vec{a}$에서 벡터 $\vec{b}$를 뺀 차를 의미하며, 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

세 점 O, A, B에 대하여 다음과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하자.



$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$



이때 벡터의 정의에 따라

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$$

이므로, $\vec{a}-\vec{b}$는 점 B에서 A를 향하는 벡터를 의미한다. 또한 $\vec{a}+(-\vec{b})$의 의미는 $\vec{a}$에 $-\vec{b}$를 더한 것이므로, 도형적으로는 벡터 $\vec{b}$의 방향을 반대로 하여 $\vec{a}$와 연접시킨 형태로

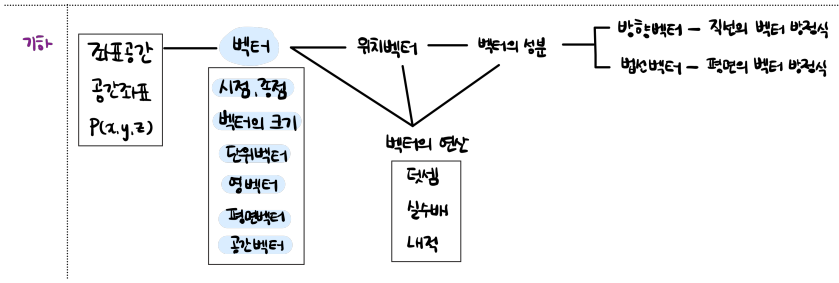
나타낼 수 있다.

결론적으로 벡터의 뺄셈은 '끝점에서 시작점을 향하는 벡터'를 의미하며, 이를 덧셈의 형식으로 바꾸면 $\vec{a}+(-\vec{b})$로 나타낼 수 있다.

개념

벡터와 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

벡터(시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 영벡터, 평면벡터, 공간벡터)는 좌표공간, 공간좌표, 위치벡터, 벡터의 성분, 실수배, 내적, 방향벡터(직선의 벡터방정식), 법선벡터(평면의 벡터방정식) 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



벡터는 크기와 방향을 함께 갖는 양으로 **시점**과 **종점**을 갖고 **벡터의 크기**와 방향을 통해 공간에서의 이동이나 위치 관계를 표현한다. 특수한 벡터로는 벡터의 덧셈에서 항등원의 역할을 하는 **영벡터**, 크기가 1인 **단위벡터**가 있으며, 이는 벡터의 기본 성질을 정의하는 데 중요한 역할을 한다. 또한 벡터가 속한 **좌표공간**이 2차원일 경우 **평면벡터**, 3차원일 경우 **공간벡터**로 구분된다.

벡터의 연산에는 덧셈, 뺄셈, **실수배**, **내적** 등이 있으며, 이러한 연산은 벡터의 성질을 분석하고 공간도형을 이해하는 데 필수적이다.

또한 직선의 벡터방정식에서 방향을 결정하는 **방향벡터**, 평면의 벡터방정식에서 수직을 나타내는 **법선벡터** 역시 모두 벡터 개념을 바탕으로 정의된다.

즉, 벡터는 공간도형의 구조와 성질을 기술하는 핵심 개념으로, 대부분의 기하학적 관계는 벡터의 성질을 통해 정교하고 체계적으로 설명될 수 있다.

실수배實數倍; real number multiple

정의

실수배는 무엇인가요?

영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 2배인 벡터이다.

이것을

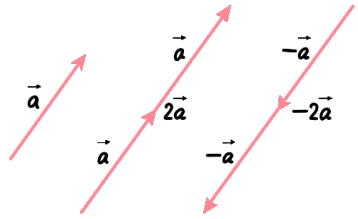
$$\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$$

와 같이 나타낸다.

또, $(-\vec{a})+(-\vec{a})$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 2배인 벡터이다. 이것을

$$(-\vec{a})+(-\vec{a})=-2\vec{a}$$

와 같이 나타낸다.



일반적으로 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 **실수배**라 하고, 다음과 같이 정의한다.

벡터의 실수배

실수 k와 벡터 $\vec{a}$에 대하여

1. $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때

   (i) $k>0$이면, $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.

   (ii) $k<0$이면, $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

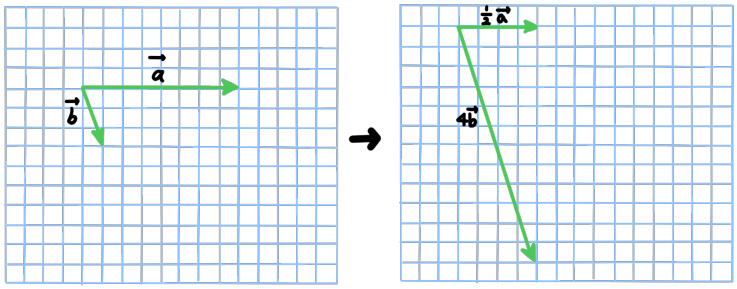
   (iii) $k=0$이면, $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

2. $\vec{a}=\vec{0}$일 때 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

다음과 그림과 같이 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $\vec{b}$가 주어졌을 때, 벡터 $\frac{1}{2}\vec{a}$와 벡터 $4\vec{b}$를 모눈종이에 나타내면 다음과 같다.



의미

실수배라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'실(實)'은 '참되다', '있는 그대로' 라는 뜻을 가지며, '수(數)'는 '수, 셈' 을, 따라서 '실수(實數)'는 실재하는 수를 의미한다. '배(倍)'는 '곱하다' 를 뜻한다. 따라서 '실수배(實數倍)'는 어떤 대상을 실수만큼 곱하여 얻은 값, 즉 실수를 사용해 확대하거나 축소한 결과를 뜻한다.

實 열매 실　數 셈 수　倍 곱 배

영어 표현 real number multiple에서 real number는 실수를 의미하며, multiple은 라틴어 *multiplex*('여러 겹의')에서 유래하여 수학에서는 '곱해서 얻은 값' 을 뜻한다.

따라서 real number multiple은 벡터에 실수 계수로 곱해 얻은 값을 의미하는 표현이다.

개념

벡터의 실수배는 어떤 의미이며, 어떤 성질이 있나요?

어떤 벡터 $\vec{a}$에 양의 실수 k를 곱한 벡터 $k\vec{a}$는 벡터 $\vec{a}$의 방향은 같고, 크기를 k배만큼 늘이거나 줄인 벡터를 의미한다.

예를 들어, $3\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 6\vec{a}$, $2\vec{a} + 3\vec{a} = 5\vec{a}$와 같이 나타낼 수 있다.

일반적으로 실수 k, l과 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

❶ $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

❷ $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

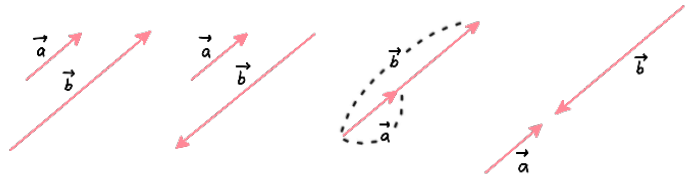
❸ $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$

이러한 성질을 이용하면 벡터의 계산을 간단히 할 수 있다.

개념

두 벡터가 평행하다는 것은 무슨 뜻인가요?

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 있을 때, 두 벡터의 방향이 같거나 반대라면 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 한다. 이때 두 벡터가 나란하다는 의미에서 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$로 나타낸다.



이러한 관계는 벡터의 실수배로 정의할 수 있다. 즉, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$일 때, 다음과 같은 조건이 성립한다.

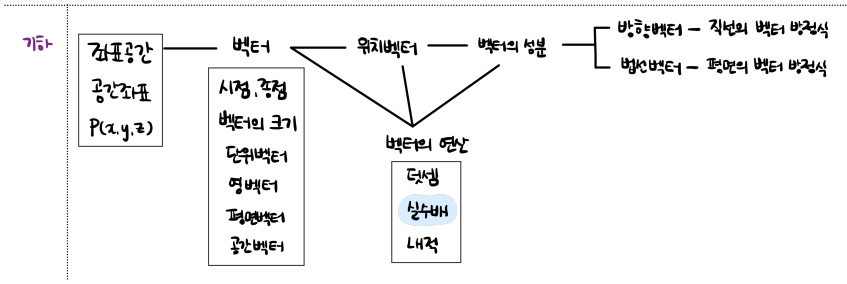
$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b} \text{ 또는 } \vec{b} = k\vec{a} \quad (k \neq 0\text{인 실수})$$

이는 두 벡터가 서로 실수배 관계에 있을 때, 같은 방향 또는 반대 방향임을 의미하며, 따라서 평행하다고 할 수 있다.

개념

실수배와 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

실수배는 벡터(시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 영벡터, 평면벡터, 공간벡터), 위치벡터, 벡터의 성분, 내적, 방향벡터(직선의 벡터방정식), 법선벡터(평면의 벡터방정식) 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



벡터의 실수배는 벡터의 크기만 변하고 방향은 같거나 반대가 되는 성질을 가지며, 이러한 특징은 벡터의 평행 여부를 판단하거나 직선을 생성하는 데 중요한 역할을 한다. 특히 한 직선의 방향벡터를 실수배한 벡터는 모두 그 직선과 평행하고, 평면의 법선벡터를 실수배해도 여전히 같은 평면에 수직인 벡터이므로 방향벡터·법선벡터의 평행성은 실수배에 영향을 받지 않는다. 이 성질은 직선의 벡터방정식과 평면의 벡터방정식을 구성하는 핵심적 원리이다.

또한 위치벡터의 실수배는 선형 결합 개념과 연결되어 평면 또는 공간에서 점들의 위치 관계를 설명하는 데 바탕이 된다. 벡터의 성분을 이용하면 실수배와 덧셈, 내적 등의 연산 관계를 명확히 확인할 수 있으며, 실수배는 덧셈과 내적에 대해 분배법칙이 성립하여 다양한 기하적 성질을 해석할 수 있게 한다.

즉, 실수배는 벡터의 기본 연산 중 하나로, 벡터를 표현하고 활용하는 데 필수적인 도구이다.

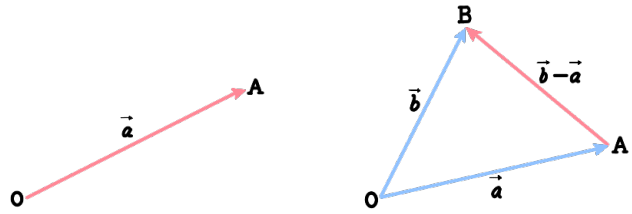
위치벡터位置벡터; position vector

정의

위치벡터는 무엇인가요?

평면 또는 공간에서 한 점 O를 고정하면 한 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$인 점 A의 위치가 오직 하나로 정해진다. 역으로 한 점 A에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$인 벡터 $\vec{a}$가 오직 하나로 정해진다.

따라서 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 한 점 A 사이에 일대일대응 관계가 성립한다. 이와 같이 한 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA}$를 점 O에 대한 점 A의 **위치벡터**라고 한다. (원점 O에 대한 점 A의 위치벡터를 간단히 점 A의 위치벡터라고 한다.) 일반적으로 좌표평면과 좌표공간에서는 원점 O를 위치벡터의 시점으로 잡는다.



벡터 $\overrightarrow{AB}$를 점 A와 점 B의 위치벡터로 나타내 보자. 오른쪽 그림과 같이 두 점 A와 B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$와 $\vec{b}$라 하면

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b}\quad \text{이고,}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

이므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

의미

위치벡터라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'위(位)'는 '자리', '위치', '정해진 곳'을 뜻하며, '치(置)'는 '두다', '놓다', '배치하다'를 의미한다. 따라서 '위치(位置)'는 '어떤 대상이 놓여 있는 자리' 또는 '점이 차지하고 있는 곳'을 의미한다.

따라서 '위치벡터(位置vector)'는 원점에서 해당 점까지 이어지는 벡터로, 그 점의 위치를 좌표와 벡터의 형태로 동시에 나타내는 표현이다. 예를 들어 점 $\mathrm{P}(a,b,c)$의 위치벡터는 원점 $\mathrm{O}(0,0,0)$에서 P로 향하는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,b,c)$로 주어진다.

位 (자리 위) 置 (둘 치) 벡 터

영어 표현 position vector에서 position은 라틴어 *positio*('놓음, 배치')에서 유래하여 대상이 놓여 있는 자리 또는 좌표를 뜻한다.

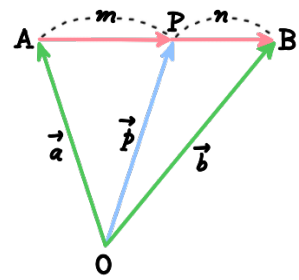
따라서 position vector는 한 점의 위치를 원점으로부터의 벡터로 나타낸 것으로, 점의 좌표 정보를 방향과 거리 형태로 해석하는 표현이다.

개념

선분을 주어진 비율로 내분하는 점의 위치벡터를 어떻게 구하나요?

두 점 A와 B의 위치벡터가 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하자.

점 P가 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$의 비율로 내분한다면, 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는 다음과 같이 표현된다.



$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

이는 벡터 $\vec{p}$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$ 사이에 위치하게 된다.

예

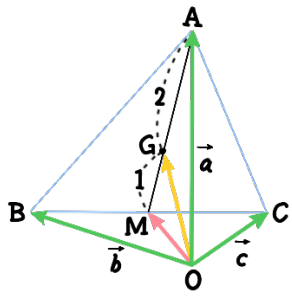
구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

삼각형 ABC에서 각 꼭짓점의 위치벡터를 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$라고 하자. 이때 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

우선, 변 BC의 중점을 M이라 하면, 중점 M의 위치벡터는 두 끝점의 위치벡터 평균이므로

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$$

이다.



무게중심 G는 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로, 내분점 공식에 따라

$$\vec{g}=\frac{2\overrightarrow{OM}+\vec{a}}{2+1}=\frac{2\times\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

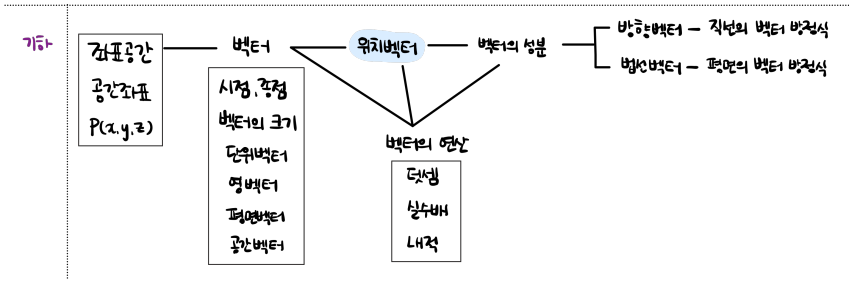
이다.

즉, 삼각형의 꼭짓점 A, B, C의 위치벡터 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$가 주어졌을 때, 무게중심의 위치벡터 $\vec{g}$는 이들의 평균으로 나타낼 수 있다.

개념

위치벡터와 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

위치벡터는 좌표공간, 공간좌표, 벡터(시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 영벡터, 평면벡터, 공간벡터), 벡터의 성분, 실수배, 내적, 방향벡터(직선의 벡터방정식), 법선벡터(평면의 벡터방정식) 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



위치벡터는 원점을 **시점**으로 하여 한 점의 위치를 나타내는 **벡터**로, 해당 점을 **종점**으로 가진다. **좌표공간**에서 점을 (x, y, z)로 나타내는 것은 곧 그 점의 위치벡터를 **공간좌표** (x, y, z)로 표현하는 것과 동일하며, 이는 **벡터의 성분**과 직접 연결된다. 또한 위치벡터는 **평면벡터**와 **공간벡터**를 표현하는 가장 기본적인 방식으로, **벡터의 크기**·방향·**단위벡터**·**영벡터** 등 모든 벡터의 성질을 이해하는 출발점이 된다.

두 점 사이의 벡터는 두 위치벡터의 차로 나타낼 수 있으며, 이를 통해 점 사이의 거리, 두 벡터의 각도 및 직교성 판단이 가능해진다. 이 과정은 **내적**과도 자연스럽게 연결된다.

또한 위치벡터는 직선 및 평면의 벡터방정식을 구성하는 핵심 요소이다. 직선에서는 위치벡터와 **방향벡터**를 결합하여 **실수배** 형태의 매개변수 방정식을 만들 수 있으며, 평면에서는 한 점의 위치벡터와 **법선벡터**의 내적을 이용하여 평면의 방정식을 표현할 수 있다.

즉, 위치벡터는 공간에서 점의 위치를 나타내는 가장 기본적이면서도, 거리·각도·방향·직교성·직선·평면 등 기하 전반을 해석하는 데 필수적인 중심 개념이다.

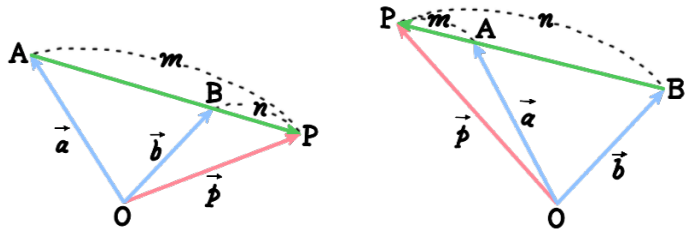
심화(참고)

- **선분을 주어진 비율로 외분하는 점의 위치벡터를 어떻게 구하나요?**

  두 점 A와 B의 위치벡터가 각각 $\vec{a}, \vec{b}$라고 하자. 점 P가 선분 $\overline{AB}$를 $m : n$ $(m > 0,\ n > 0,\ m \neq n)$의 비율로 외분한다면, 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는 다음과 같다.

  $$\vec{p} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$$

  이 경우 $\vec{p}$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 연결하는 선분의 연장선상에 있으며, 선분 $\overline{AB}$의 양끝점 밖에 위치하게 된다.



벡터의 성분 벡터의 成分; component of vector

정의

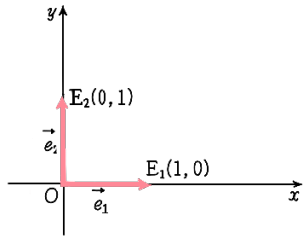
벡터의 성분은 무엇인가요?

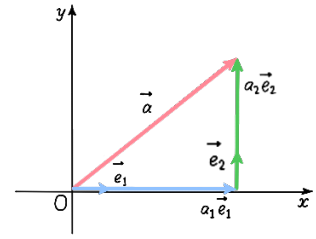
평면벡터의 성분

다음 그림과 같이 좌표평면에서 x축 위의 점 $\mathrm{E}_1(1,0)$과 y축 위의 점 $\mathrm{E}_2(0,1)$의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{e_1}$과 $\overrightarrow{e_2}$로 나타낸다. 즉,

$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{OE}_1},\quad \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{OE}_2}$$

이다. 이때 $|\overrightarrow{e_1}|=|\overrightarrow{e_2}|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{e_1}$과 $\overrightarrow{e_2}$는 모두 단위벡터이다.





좌표평면에서 벡터 $\vec{a}$를 $\overrightarrow{e_1}$과 $\overrightarrow{e_2}$로 나타내 보자. 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$인 점 $\mathrm{A}(a_1,a_2)$에서 x축과 y축에 내린 수선의 발은 각각 $\mathrm{A}_1(a_1,0)$과 $\mathrm{A}_2(0,a_2)$이다. 이때 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=a_1\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=a_2\overrightarrow{e_2}$이고,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$$

이다.

따라서 벡터 $\vec{a}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}$$

이때 두 실수 a_1과 a_2를 **벡터 $\vec{a}$의 성분**이라 하며, a_1을 **x 성분**, a_2를 **y 성분**이라고 한다.

또, 벡터 $\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$를 성분을 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$
$\vec{a} = (a_1, a_2)$

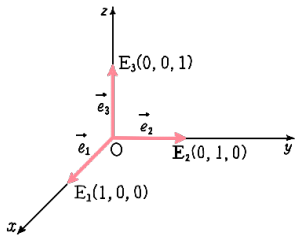
공간벡터의 성분

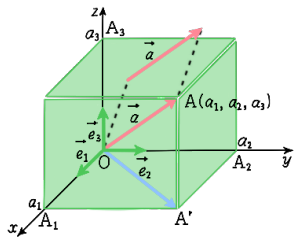
평면벡터에서와 같은 방법으로 공간에서 위치벡터를 종점의 좌표를 이용하여 나타내는 방법을 알아보자.

좌표공간에서 x축, y축, z축 위의 세 점 $\mathrm{E}_1(1,0,0)$, $\mathrm{E}_2(0,1,0)$, $\mathrm{E}_3(0,0,1)$의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$으로 나타낸다. 즉,

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\mathrm{OE}_1}, \quad \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{OE}_2}, \quad \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{\mathrm{OE}_3}$$

이다. 이때 $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = |\overrightarrow{e_3}| = 1$이므로 세 벡터 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$는 모두 단위벡터이다.





좌표공간에서 벡터 $\vec{a}$를 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$로 나타내 보자. 그림과 같이 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$인 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$에서 x축, y축, z에 내린 수선의 발은 각각 $\mathrm{A}_1(a_1, 0, 0)$, $\mathrm{A}_2(0, a_2, 0)$, $\mathrm{A}_3(0, 0, a_3)$이다. 이때 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} = a_1\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = a_2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3} = a_3\overrightarrow{e_3}$이고,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} + \overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$$

이다.

따라서 벡터 $\vec{a}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

이때 세 실수 a_1, a_2, a_3을 **벡터 $\vec{a}$의 성분**이라 하며, a_1을 x **성분**, a_2를 y **성분**, a_3를 z **성분**이라고 한다.

또, 벡터 $\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$를 성분을 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

예 **구체적인 예와 함께 설명해 주세요.**

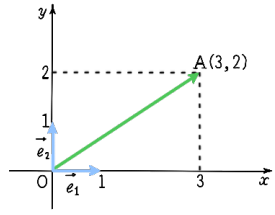
1 원점 $O(0,0)$에서 점 $A(3,2)$를 향하는 벡터 $\overrightarrow{OA}$의 위치벡터를 성분으로 나타내면, $\overrightarrow{OA}$는 x축의 방향($\overrightarrow{e_1} = (1,0)$)으로 3만큼, y축의 방향($\overrightarrow{e_2} = (0,1)$)으로 2만큼 이동하는 벡터이므로

$$\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$$

로 나타낼 수 있다.

이 벡터를 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OA} = (3,2)$$



이처럼 위치벡터는 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$를 이용해 성분 형태로 표현할 수 있으며, 방향과 크기를 직관적으로 이해하는 데 유용하다.

2 원점 O와 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$가 공간에 주어졌다고 하자. 이때 점 A

에서 점 B를 향하는 벡터 $\overrightarrow{AB}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

벡터 $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{OA} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2} + z_1\overrightarrow{e_3}, \quad \overrightarrow{OB} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + z_2\overrightarrow{e_3}$$

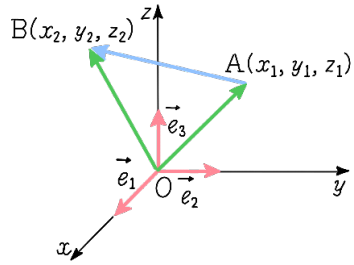
이다. 따라서

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{e_1} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{e_2} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{e_3}$$

이므로, 이를 성분으로 정리하면 다음과 같다.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

이와 같이 벡터 $\overrightarrow{AB}$는 점 A에서 B까지의 방향과 크기를 나타내며, 각 좌표 성분의 차를 통해 쉽게 나타낼 수 있다.



의미 벡터의 성분이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

벡터에서 '벡터의 성분(成分)'은 벡터가 좌표축에 대해 어떻게 나누어져 표현되는지를 나타내는 값으로, 예를 들어 평면에서는 (a, b)처럼 x축과 y축 방향으로의 크기를 각각 나타내는 두 수가 성분에 해당한다. 이는 벡터가 공간 속에서 어떤 방향과 크기를 가지는지를 좌표계를 이용해 구체적으로 표현하는 방식이다.

영어 표현 component of vector에서 component는 라틴어 *componere*('함께 놓다, 구성하다')에서 유래하여 전체를 이루는 한 부분을 뜻한다. 따라서 component of vector

는 벡터를 이루는 각각의 좌표값, 즉 벡터가 각 축 방향으로 가지는 크기를 나타내는 요소를 의미한다.

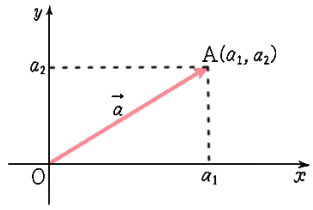
개념

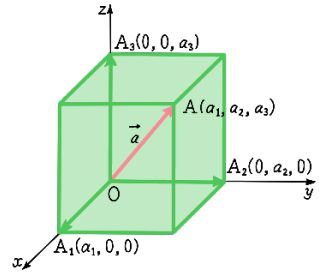
벡터의 성분으로 어떤 정보를 표현할 수 있나요?

벡터의 성분을 사용하여 위치벡터의 크기와 두 벡터가 같음을 직관적으로 표현할 수 있다.

❶ 위치벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$ 또는 (a_1, a_2, a_3)의 **크기**는 원점 O에서 벡터의 끝점 (a_1, a_2) 또는 (a_1, a_2, a_3)까지의 거리로 정의한다. 따라서, 벡터의 크기는 피타고라스 정리에 따라 다음과 같이 계산한다.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2} \text{ 또는 } \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$





❷ 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 **같다**는 것은 시작점과 끝점이 모두 일치함을 의미하므로, 다음과 같은 조건이 필요충분조건이다.

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$와 $\vec{b}=(b_1, b_2)$인 경우, 다음과 같다.

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1, \quad a_2=b_2$$

두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$와 $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$인 경우, 다음과 같다.

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1, \quad a_2=b_2, \quad a_3=b_3$$

따라서, 두 벡터가 서로 같다고 판단하기 위해서는 각 성분이 모두 일치해야 한다.

개념

벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배는 벡터의 성분으로 어떻게 표현하나요?

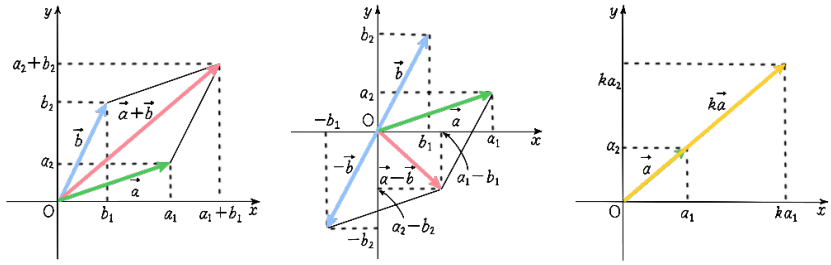
두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 주어졌을 때, 벡터의 성분으로 나타내어 이들의 덧셈, 뺄셈, 실수배 하는 방법은 다음과 같다.

❶ **벡터의 덧셈** : $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

❷ **벡터의 뺄셈** : $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

❸ **벡터의 실수배**: $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ $(k$는 실수$)$

이와 같은 연산은 기하적으로도 쉽게 이해할 수 있으며, 평면벡터의 기본적인 계산의 출발점이 된다.



평면벡터의 경우와 같이 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$가 주어졌을 때, 공간벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배도 벡터의 성분으로 다음과 같이 나타낸다.

❶ **벡터의 덧셈** : $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

❷ **벡터의 뺄셈** : $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$

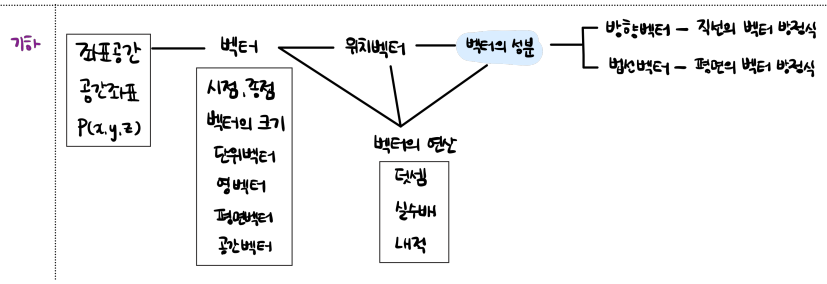
❸ **벡터의 실수배**: $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ $(k$는 실수$)$

이와 같이 공간벡터의 연산도 성분을 이용하면 편리하게 계산할 수 있다.

개념

벡터의 성분과 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

벡터의 성분은 좌표공간, 공간좌표, 벡터(시점, 종점, 벡터의 크기, 단위벡터, 영벡터, 평면벡터, 공간벡터), 위치벡터, 내적, 방향벡터(직선의 벡터방정식), 법선벡터(평면의 벡터방정식) 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



벡터의 성분은 **좌표공간**에서의 **벡터**를 **공간좌표**로 수치화하여 나타낸 표현으로, 벡터의 덧셈과 뺄셈, **실수배**, **내적**과 같은 모든 벡터 연산을 수행하는 데 필수적이다. 또한 **벡터의 크기** 계산 역시 벡터의 성분을 통해 이루어진다.

모든 벡터—예를 들어 **단위벡터**, **영벡터**, **평면벡터**, **공간벡터**—와 직선의 **방향벡터**, 평면의 **법선벡터** 역시 벡터의 성분으로 표현되며, 이를 바탕으로 직선과 평면의 방정식을 구성하거나 해석할 수 있다.

즉, 벡터의 성분은 모든 벡터 연산의 계산적 기반을 제공하며, 벡터와 공간도형을 다루는 데 있어 가장 핵심적인 표현 방식이다.

심화(참고)

- **벡터와 좌표는 어떤 관계가 있나요? 위치벡터는 좌표와 같은 것인가요?**

  벡터의 성분이 좌표로 나타나면서, 우리는 종종 벡터와 좌표를 혼동하곤 한다. 실제로 위치벡터는 좌표와 거의 동일하게 취급할 수 있다. 즉, 좌표평면 위의 점을 위치벡터로 생각하거나, 위치벡터를 점의 좌표로 간주해도 무방하다. 그러나 위치벡터는 단순한 점과 달리 덧셈, 뺄셈, 실수배와 같은 연산이 가능하다는 점에서 차이가 있다.

  예를 들어, 점 자체를 더하거나 빼는 것은 직관적으로 낯설지만, 두 점을 종점으로 하는 위치벡터로 바꾸면 이러한 연산이 자연스럽고 의미 있게 정의된다. 이는 위치벡터가 좌표 성분을 통해 벡터 간 덧셈, 뺄셈, 실수배 등의 연산을 가능하게 하는 개념임을 보여준다.

  역사적으로는 좌표 개념보다 벡터 개념이 먼저 등장했으며, 좌표가 정립되기 이전에는 관련 수학적 성질들을 벡터만으로 설명해 왔다. 이후 17세기 데카르트(R. Descartes, 1596–1650)가 좌표 개념을 정립하면서, 벡터 역시 좌표 성분으로 표현할 수 있게 되었고, 이를 통해 벡터 계산이 훨씬 간편해졌다. 이처럼 벡터와 좌표는 긴밀하게 연결된 개념이다.

  위치벡터를 통해 점을 벡터의 성분으로 나타낼 수 있고, 벡터의 연산을 활용하여 점들 사이의 관계를 수학적으로 분석할 수 있기 때문에, 벡터와 좌표는 서로 전환 가능하고 계산상 매우 유용한 도구라고 할 수

있다.

내적內積; inner[scalar/dot] product

정의

내적은 어떻게 정의하나요?

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$와 $\vec{b}=(b_1,b_2)$에 대하여

$$a_1b_1+a_2b_2$$

를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**이라 하며, 이것을 기호로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

이다. 특히, $\vec{a}=\vec{b}$일 때 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2=|\vec{a}|^2$$

같은 방법으로 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$과 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$에 대하여

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

을 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**이라 하며, 이것을 기호로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

이다. 또, 평면벡터에서와 마찬가지로 $\vec{a}=\vec{b}$일 때 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\vec{a}|^2$$

예

구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 두 평면벡터 $\vec{a}=(1,2)$와 $\vec{b}=(-4,3)$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-4)+2\times3=2$이다.

또한, $\vec{a}\cdot\vec{a}=1\times1+2\times2=5$이다.

❷ 두 공간벡터 $\vec{a}=(0,3,-1)$와 $\vec{b}=(-2,1,4)$의 내적

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\times(-2)+3\times1+(-1)\times4=-1$이다. 또한,

$\vec{a}\cdot\vec{a}=0\times0+3\times3+(-1)\times(-1)=10$이다.

의미

내적이라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'내(內)'는 '안', '속'을 뜻하며, '적(積)'은 '쌓다', '곱하여 얻은 값'을 의미한다. 따라서 '내적(內積)'은 '안쪽에서 이루어지는 곱'이라는 의미로, 두 벡터 사이에 정의되는 특정한 곱셈 연산을 가리킨다.



영어 표현은 inner product이며, inner는 '내부의, 안쪽의'를 의미해 벡터 공간 내부 구조를 결정하는 곱이라는 의미를 가진다. 또한 내적을 성격에 따라 scalar product 또는 dot product라고도 한다. scalar는 결과가 스칼라 값(수)임을 나타내며, dot product는 두 벡터 사이에 점(dot)을 찍어 표기하는 방식에서 유래한다.

따라서 inner/scalar/dot product는 두 벡터가 이루는 각과 크기를 이용해 벡터 간의 상관성을 수치로 나타내는 연산을 의미한다.

개념

벡터의 내적을 표현하는 다른 방법은 없나요?

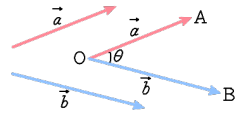
벡터의 내적은 두 벡터의 크기와 두 벡터가 이루는 각으로 나타낼 수도 있다.

두 벡터가 이루는 각

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$가 되도록 두 점 A, B를 정할 때,

$$\theta=\angle AOB\ (0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$$

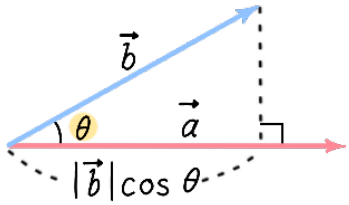
를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다.



두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 θ라 할 때, 두 벡터의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$은 각 θ의 크기에 따라 다음과 같이 표현할 수 있다.

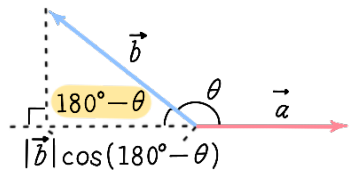
❶ $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$인 경우 :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$



❷ $90^\circ < \theta \le 180^\circ$인 경우 :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$$



이 정의는 성분에 의한 내적의 정의와 동치이며, 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 **방향 정보**를 포함한다는 점에서 의미가 깊다.

예를 들어, 두 평면벡터 $\vec{a}=(1,0)$와 $\vec{b}=(2,2)$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$을 벡터의 크기와 두 벡터가 이루는 각을 이용하여 구해보자.

먼저 두 벡터의 크기를 구해보자.

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+0^2}=1,\quad |\vec{b}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

벡터 $\vec{a}=(1,0)$와 $\vec{b}=(2,2)$가 이루는 각은 45°이므로 $\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다. 따라서 두

벡터의 내적은

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta=1\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2$$

이다.

이제 주어진 두 벡터의 성분을 이용하여 내적을 직접 계산해보면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 2+0\cdot 2=2$$

로, 역시 같은 결과가 나오는 것을 확인할 수 있다.

내적은 성분 계산 또는 각도 정보를 통해 모두 계산 가능하며, 상황에 따라 적절한 방법을 선택할 수 있다.

더 알아보기

내적에서 각 θ의 범위에 따라 식을 나누어 써야 하나요?

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 θ라고 할 때, 내적은 각의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 쓸 수 있다.

❶ $0^\circ\le\theta\le 90^\circ$일 때 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

❷ $90^\circ<\theta\le 180^\circ$일 때 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$

이처럼 경우를 나누어 쓰면 부호의 의미를 보다 명확히 이해하는 데 도움이 된다.

그런데 삼각함수의 항등식에 따라 $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$이므로, 위 두 식은 다음과 같이 하나로 통합하여 쓸 수 있다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

이 식은 θ의 범위가 $0^\circ\le\theta\le 180^\circ$일 때 항상 성립한다. 즉, 각 θ가 둔각일 경우 음수, 예각일 경우 양수 값을 갖게 되어, 벡터의 방향 관계(같은 방향인지, 수직인지, 반대 방향인지 등)를 자연스럽게 반영한다.

따라서 내적은 각의 범위에 따라 나누어 설명할 수도 있지만, 실질적인 계산이나

공식 제시에서는 다음과 같은 통합된 표현을 사용하는 것이 효율적이다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \quad (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$$

개념

벡터의 내적은 벡터 연산인데 왜 결과는 실수인가요?

두 벡터의 내적은 벡터 사이의 연산이지만, 그 결과는 방향을 가지지 않는 **하나의 실수**이다. 예를 들어 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$에 대하여 내적은

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

와 같이 각 성분의 곱의 합으로 정의되며, 이는 벡터가 아닌 실수이다.

또한 내적을 각도로 정의하면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

로 나타나며, 여기서도 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos\theta$가 모두 실수이므로 결과 역시 실수이다.

따라서 내적은 벡터 연산임에도 결과는 **벡터의 크기와 방향 관계를 나타내는 실수값**이며, 두 벡터의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 벡터가 아닌 실수이다.

개념

벡터 내적에도 연산에 대한 법칙이 있나요?

벡터의 내적에도 다음과 같은 연산의 성질이 성립한다.

❶ **교환법칙** : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

❷ **분배법칙** : $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

❸ **실수배와 내적의 결합** : $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (k는 실수)

벡터의 내적은 성분을 이용한 계산으로 연산 법칙을 쉽게 증명할 수 있다.

예를 들어, 세 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$, $\vec{c}=(c_1,c_2)$에 대해 내적과 덧셈의

분배법칙을 성분 계산으로 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_1c_1+a_2c_2\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

따라서, 위와 같이 성분 계산을 통해 분배법칙이 성립함을 알 수 있다.

개념

두 벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구하나요?

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$와 $\vec{b}=(b_1,b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면, 벡터의 내적은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$$

이때 각 벡터의 크기는 다음과 같이 계산한다.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2},\qquad |\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

위 식들을 이용하면, 두 벡터가 이루는 각 θ는 다음과 같은 공식으로 구할 수 있다.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

이와 같은 방법은 공간벡터에도 그대로 적용할 수 있다. 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$와 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$가 이루는 각 θ는 다음과 같이 나타낸다.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

이때 각의 범위는 $0^\circ\le\theta\le180^\circ$이다.

벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ\le\theta\le180^\circ$)라 할 때, 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

이 공식은 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하거나, 벡터의 방향이 얼마나 유사한지를 비교할 때 자주 활용된다.

개념

두 벡터가 수직 또는 평행일 조건은 무엇인가요?

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 θ라 할 때, 다음과 같은 조건이 성립한다.

❶ 두 벡터가 **수직**일 조건 :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

두 벡터가 수직이면 $\theta = 90°$이므로,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos 90° = 0$$

이다. 이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$이면 $\cos\theta = 0$이므로 $\theta = 90°$가 되어, 이 역도 성립한다.

❷ 두 벡터가 **평행**일 조건 :

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

두 벡터가 평행하면 $\theta = 0°$ 또는 $\theta = 180°$이므로,

$$\theta = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos 0° = |\vec{a}|\,|\vec{b}|,$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(180° - 180°) = -|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

이다. 따라서, 두 벡터가 평행이면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|$이 되고, 이 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

벡터의 수직 조건과 평행 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음이 성립합니다.

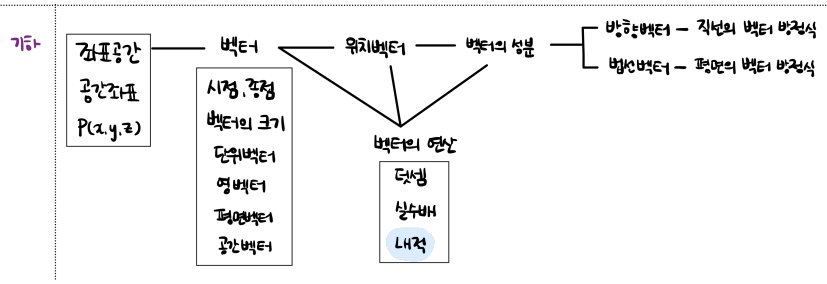
❶ 수직 조건 : $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

❷ 평행 조건 : $\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|$

개념

내적과 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

내적은 벡터, 벡터의 크기, 벡터의 성분, 실수배, 이면각, 정사영, 방향벡터(직선의 벡터방정식), 법선벡터(평면의 벡터방정식) 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



내적은 **위치벡터**의 **벡터의 성분**을 이용해 정의되며, 또 다른 정의로는 두 벡터가 이루는 각과 두 **벡터의 크기**로 정의된다. 따라서 내적은 두 **벡터**가 이루는 각을 계산하거나 두 벡터가 서로 수직인지 판단하는 데 사용된다. 또한 벡터의 자기 자신과의 내적은 그 **벡터의 크기**의 제곱과 같으므로 벡터의 크기를 해석하는 데에도 중요한 역할을 한다. 내적은 벡터의 덧셈, 뺄셈, **실수배** 연산과 분배법칙을 만족한다는 점에서도 벡터 연산 전반과 깊은 관련을 가진다.

또한 두 평면이 이루는 **이면각**의 크기는 각 평면의 **법선벡터** 사이의 내적을 통해 구하며, 두 직선이 이루는 각의 크기 역시 각 직선의 **방향벡터**의 내적으로 계산한다. 벡터의 **정사영** 역시 내적을 이용하여 구할 수 있으므로 사영 개념과도 직접적으로 연결된다.

즉, 내적은 각도, 거리, 사영을 동시에 다루는 기하학의 핵심 연산이며, 벡터와 공간도형을 분석하는 데 필수적인 도구이다.

심화(참고)

- **내적은 n차원 벡터에 대해서도 정의할 수 있나요?**

  내적은 평면벡터나 공간벡터에서 정의하였다. 이는 2차원 공간과 3차원 공간의 벡터에 대해 정의한 것으로, 내적은 일반적인 n차원 벡터 공간에서도 정의된다.

  두 n차원 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$에 대해, 내적은 다음과 같이 정의한다.

  $$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

  이 정의는 성분 간 곱의 합을 통해 계산되며, 두 벡터가 이루는 각 θ에 대해, 내적은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

  $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \quad (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$$

또한, 평면벡터 또는 공간벡터에서 만족하는 내적과 관련된 모든 성질들을 n차원 벡터 공간에서도 만족한다.

❶ **교환법칙** : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

❷ **분배법칙** : $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

❸ **실수배와 내적의 결합** : $k(\vec{a}\cdot\vec{b})=(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$ (k는 실수)

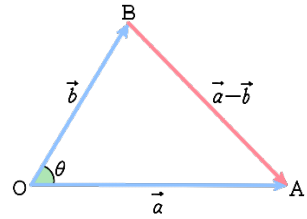
❹ **벡터의 크기** : $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}$

❺ **벡터의 크기와 내적의 관계** : $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0$, (등호가 성립하는 경우는 $\vec{a}=\vec{0}$이다.)

따라서 내적은 n차원에서도 두 벡터 사이의 방향 관계를 판단하거나, 크기를 계산하는 데 유용하게 사용된다.

● **벡터를 이용하여 삼각형 세 변의 길이 사이의 관계를 일반화할 수 있나요?**

벡터의 내적을 활용하면 삼각형 세 변의 관계를 일반화할 수 있다. 삼각형 OAB에서 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}-\vec{b}$이다.



각 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 할 때, 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 크기의 제곱은 다음과 같이 나타낸다.

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이를 통해 삼각형 OAB의 세 변의 길이 사이에 다음과 같은 관계를 만족하고, 이를 벡터의 피타고라스 정리 일반화라고 한다.

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\,\overline{\mathrm{OA}}\,\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta$$

특히, $\theta=90^\circ$이면 $\cos\theta=0$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2$$

가 되어 피타고라스 정리를 얻을 수 있다.

방향벡터方向벡터; direction vector

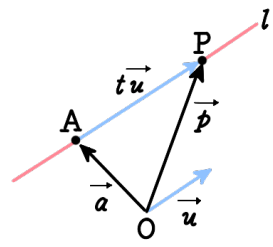
정의

방향벡터는 무엇인가요?

점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l의 방정식을 구해 보자.

직선 l 위의 점 A가 아닌 한 점을 P라 하면

$$\overrightarrow{AP} /\!/ \vec{u}$$



이므로

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$$

인 실수 t가 존재한다.

이때 두 점 A와 P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$와 $\vec{p}$라 하면

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$$

이므로 $\vec{p} - \vec{a} = t\vec{u}$로부터 다음이 성립한다.

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u} \quad (\text{단, } t\text{는 실수}) \qquad \cdots ①$$

이 식은 점 P가 점 A와 같을 때도 성립한다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 점 A를 지나고 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l의 방정식이다. 이때 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 **방향벡터**라고 한다.

개념

벡터의 성분을 사용하여 직선의 방정식은 어떻게 나타낼 수 있나요?

좌표평면에서 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터 $\vec{u} = (u_1, u_2)$인 직선 l 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하자. 이때 직선 l의 방정식은

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$$

로 나타난다. 이를 성분으로 나타내면

$$(x,\ y) = (x_1,\ y_1) + t(u_1,\ u_2)$$

이므로

$$x = x_1 + tu_1, \qquad y = y_1 + tu_2 \qquad (u_1u_2 \neq 0)$$

가 된다. 위 식에서 t를 없애면 다음을 얻는다.

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면에서 한 점과 방향벡터가 주어진 직선의 방정식

점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 방향벡터 $\vec{u} = (u_1,\ u_2)$인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} \quad (\text{단, } u_1u_2 \neq 0)$$



방향벡터의 성분 중 하나가 0일 때, 직선의 방정식은 어떻게 표현할 수 있나요?

영벡터가 아닌 방향벡터 $\vec{u} = (u_1,\ u_2)$에서 $u_1u_2 = 0$이라는 것은 성분 중 하나가 0이라는 뜻이다. 이 경우 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 방향벡터 $\vec{u}$인 직선의 방정식은 다음 두 형태 중 하나가 된다.

❶ $u_1 = 0,\ u_2 \neq 0$일 때 직선의 방정식은

$$x = x_1$$

이고, 점 (x_1, y_1)을 지나는 수직선이 된다.

❷ $u_1 \neq 0,\ u_2 = 0$일 때 직선의 방정식은

$$y = y_1$$

이고, 점 (x_1, y_1)을 지나는 수평선이 된다.

예 구체적인 예와 함께 설명해 주세요.

❶ 점 $(1, 2)$를 지나고 방향벡터 $\vec{u} = (0, -1)$인 직선은 x의 값이 변하지 않으므로

$$x = 1$$

이 직선의 방정식이 된다.

❷ 점 $(-3, 3)$을 지나고 방향벡터 $\vec{u} = (2, 0)$인 직선은 y의 값이 일정하므로

$$y = 3$$

로 나타낼 수 있다.

❸ 점 $(5, -1)$을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 1)$에 평행한 직선은 벡터 $\vec{u}$를 방향벡터로 가진다.

따라서 직선의 방정식은

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1}$$

로 나타난다.

의미 방향벡터라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.

'방(方)'은 '방향', '바라보는 쪽'을 뜻하며, '향(向)'은 '향하다', '어떤 쪽으로 나아가다'를 의미한다. 따라서 '방향(方向)'은 '나아가는 쪽' 또는 '향하고 있는 방향'을 뜻하는 말이다. '벡터(vector)'는 크기와 방향을 가지는 양을 말한다.

따라서 '방향벡터(方向vector)'는 직선이나 곡선이 일정한 방향으로 뻗어 나가는 성질을 나타내는 벡터로, 선의 기울기나 진행 방향을 표현하는 데 사용된다. 예를 들어 직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$에 대해 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$이 직선의 방향벡터가 된다.

方 모 방　向 향할 향　벡　터

영어 표현 direction vector에서 direction은 라틴어 *dirigere*('바르게 이끌다, 향하게

하다')에서 유래하여 어떤 선이나 운동이 진행되는 쪽을 의미한다. 따라서 direction vector는 방향을 나타내는 벡터를 말한다.

개념

두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$와 $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$를 지나는 직선의 방정식은 어떻게 나타나나요?

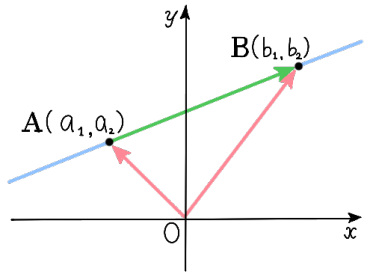
두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$와 $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\ b_1 - a_1,\ b_2 - a_2\ )$$

이다. 이 방향벡터를 이용하면 직선의 방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} \qquad (a_1 \neq b_1 \text{ 또는 } a_2 \neq b_2)$$

즉, 두 점 사이의 좌표 차이를 이용하여 위와 같은 형태로 직선의 방정식을 표현할 수 있다.



한편, 두 점의 좌표가 특정 성분에서 같아지는 경우에는 다음과 같이 단순한 형태의 직선이 된다.

❶ $a_1 = b_1$인 경우, 두 점의 x좌표가 같으므로 직선은 수직선 $x = a_1$이다.

❷ $a_2 = b_2$인 경우, 두 점의 y좌표가 같으므로 직선은 수평선 $y = a_2$이다.

개념

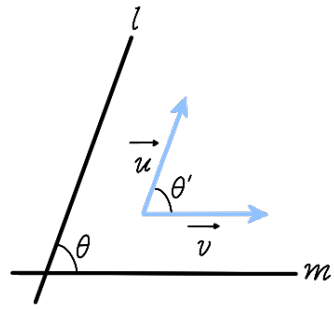
두 직선이 이루는 각의 크기는 어떻게 구하나요?

두 직선 l과 m의 방향벡터가 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라고 하자. 이때 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $0° \leq \theta \leq 90°$가 된다.

한편, 두 방향벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 각을 θ'라고 하면, 두 직선이 이루는 각 θ는 두 값

$$\theta' \quad \text{또는} \quad 180° - \theta'$$

중에서 크지 않은 쪽이다.



벡터의 내적 관계를 이용하면 $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta'$ 이므로, 두 직선이 이루는 각 θ에 대해 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=|\cos\theta'|=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

이를 성분으로 나타내면 다음과 같다.

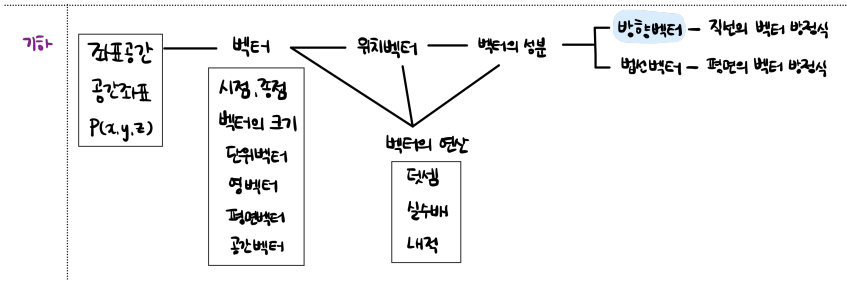
$$\cos\theta=\frac{|u_1v_1+u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

즉, 두 직선이 이루는 각은 그 방향벡터가 이루는 각을 이용하여 구할 수 있다.

개념

방향벡터와 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

방향벡터는 벡터, 위치벡터, 벡터의 성분, 실수배, 내적, 방향벡터(직선의 벡터방정식), 법선벡터(평면의 벡터방정식), 교선 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



방향벡터는 직선이 어떤 방향으로 뻗어 있는지를 나타내는 벡터로, 직선과 평행한 위치벡터의 차를 이용해 구할 수 있으며 직선의 벡터방정식을 구성하는 핵심 요소가 된다.

또한 벡터의 성분을 사용하여 방향벡터를 성분 형태로 나타내면 직선의 방정식을 더욱 직관적이고 계산적으로 표현할 수 있다.

두 직선이 평행한지 여부는 각 직선의 방향벡터가 실수배 관계인지 여부로 판단할 수 있다. 아울러 교선의 방향벡터는 두 평면의 법선벡터에 동시에 수직이므로, 두 법선벡터와의 내적이 0이 되는 벡터를 찾는 방식으로 구한다.

즉, 방향벡터는 직선의 방향을 결정하고 여러 공간도형의 위치 관계를 설명하는 데 핵심적인 역할을 하는 개념이다.

법선벡터法線벡터; normal vector

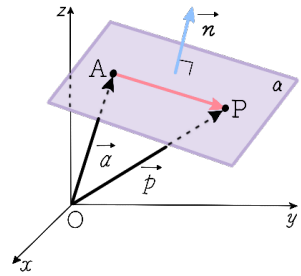
정의

법선벡터는 무엇인가요?

좌표공간에서 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α의 방정식을 구해 보자.

평면 α 위의 점 A가 아닌 한 점을 P라 하면

$$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$$



이므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

이다. 이때 두 점 A와 P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$와 $\vec{p}$라 하면

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \qquad \cdots ①$$

이 식은 점 P가 점 A와 같을 때도 성립한다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 평면 α 위에 있다.

따라서 ①은 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α의 방정식이다. 이때 벡터 $\vec{n}$을 평면 α의 **법선벡터**라고 한다.

개념

벡터의 성분을 사용하여 평면의 방정식은 어떻게 나타낼 수 있나요?

공간에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 법선벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$인 평면 위의 임의의 한 점을 $P(x, y, z)$라고 하자. 벡터 $\overrightarrow{AP}$는

$$\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

이고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$은 서로 수직이므로 다음과 같다.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$$

이를 성분으로 나타내면

$$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)\cdot(a,\ b,\ c)=0$$

이 되고, 내적을 전개하면 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

즉, 한 점을 지나고 법선벡터가 주어졌을 때 평면의 방정식은 위와 같은 형태로 나타낼 수 있다.

한 점을 지나고 법선벡터가 주어진 평면의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 법선벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$인 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

개념

$x,\ y,\ z$에 대한 일차방정식은 평면의 방정식을 어떻게 나타내나요?

평면의 방정식 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$을 전개하고 $d=-(ax_1+by_1+cz_1)$라고 놓으면 평면의 방정식은 다음과 같은 형태로 나타난다.

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \cdots ①$$

즉, $x,\ y,\ z$에 대한 일차방정식은 평면을 나타내는 식이 된다.

반대로, 일차방정식 ①이 주어졌다고 하자. 이 식을 만족하는 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 잡으면

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0 \qquad \cdots ②$$

이 된다. 식 ①에서 식 ②를 빼면 다음을 얻을 수 있다.

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

이는 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 법선벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$인 평면의 방정식을 나타낸다.

일차방정식과 평면

x, y, z에 대한 일차방정식

$$ax + by + cz + d = 0$$

은 법선벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$에 수직인 평면을 나타낸다.

이 일차방정식을 평면의 방정식의 일반형이라고 한다.

예 **구체적인 예와 함께 설명해 주세요.**

❶ 점 $(2, -1, 3)$을 지나고 법선벡터 $\vec{n} = (4, -2, 1)$인 평면을 생각해 보자. 평면의 방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$4(x-2) - 2(y+1) + 1(z-3) = 0$$

이를 전개하여 정리하면 다음과 같이 나타난다.

$$4x - 2y + z - 13 = 0$$

❷ 점 $(-1, 4, 0)$을 지나고 벡터 $\vec{n} = (3, 5, -2)$에 수직인 평면은 벡터 $\vec{n}$이 법선벡터가 되므로, 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$3(x+1) + 5(y-4) - 2(z-0) = 0$$

이를 전개하여 정리하면 다음과 같이 나타난다.

$$3x + 5y - 2z - 17 = 0$$

의미 **법선벡터라는 용어의 한자, 영어 표현의 뜻을 설명해 주세요.**

'법(法)'은 '법도', '정해진 기준'을 뜻하며, '선(線)'은 '줄', '선'을 의미한다. 따라서 '법선(法線)'은 '정해진 기준에 따라 선에 대해 바르게 선 것', 즉 어떤 선이나 면에 수직인 선이라는 의미를 가진다. '벡터(vector)'는 방향과 크기를 가진 양이다.

따라서 '법선벡터(法線vector)'는 어떤 곡선이나 면에 수직인 방향을 나타내는 벡터를 의미한다. 예를 들어 평면 $ax + by + cz + d = 0$의 경우 (a, b, c)가 그 평면의 법선벡터가

된다.

法 線 벡 터
법 법 줄 선

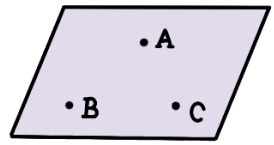
영어 표현 normal vector에서 normal은 라틴어 *normalis*('직각의, 바른')에서 유래하여 어떤 대상에 직각으로 서 있는 성질을 의미한다. 따라서 normal vector는 곡선, 곡면 등에 수직으로 서는 방향을 나타내는 벡터를 말한다.

개념

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식은 어떻게 나타나나요?

세 점이 한 직선 위에 있으면 그 세 점을 모두 지나는 평면은 하나로 정해지지 않고 무수히 많다. 반면 세 점이 한 직선 위에 있지 않으면, 그 세 점을 모두 지나는 평면은 오직 하나로 정해진다.

따라서 한 직선 위에 놓여 있지 않은 세 점 $\mathrm{A}(a_1, , a_2, , a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, , b_2, , b_3)$, $\mathrm{C}(c_1, , c_2, , c_3)$가 주어졌다고 하고, 이 세 점을 지나는 평면을 생각하자.



이 평면의 법선벡터를 $\vec{n} = (a, b, c)$라고 두면, 법선벡터는 평면 위의 어떤 두 벡터와도 수직이어야 한다.

평면 위의 두 벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이다.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3), \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (c_1 - a_1,\ c_2 - a_2,\ c_3 - a_3)$$

법선벡터는 이 두 벡터와 각각 수직이므로 다음이 성립한다.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0, \qquad \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$

즉, 다음 두 식을 만족하는 $(a,\ b,\ c)$는 평면의 법선벡터가 된다.

$$a(b_1-a_1)+b(b_2-a_2)+c(b_3-a_3)=0,$$

$$a(c_1-a_1)+b(c_2-a_2)+c(c_3-a_3)=0$$

이렇게 구한 법선벡터 $(a,\ b,\ c)$를 이용하면, 세 점 중 하나인 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$을 지나므로 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$a(x-a_1)+b(y-a_2)+c(z-a_3)=0$$

즉, 평면 위의 두 벡터와 법선벡터의 내적이 0이라는 성질을 이용하여, 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구할 수 있다.

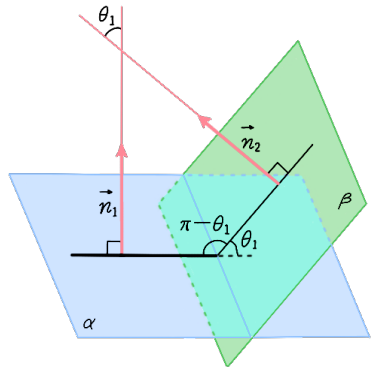
개념

두 평면이 이루는 각의 크기는 어떻게 구하나요?

두 평면 $\alpha : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ \beta : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 이 주어져 있다고 하자. 이때 두 평면의 법선벡터는 각각

$$\overrightarrow{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1),\qquad \overrightarrow{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$$

이다.



두 법선벡터가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면, 두 평면이 이루는 각의 크기 θ는 θ_1 또는 $180^\circ-\theta_1$ 중에서 크지 않은 쪽이다.

법선벡터의 내적 관계를 이용하면

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = |\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}| \cos\theta_1$$

이므로

$$\cos\theta = |\cos\theta_1| = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|}$$

가 된다. 이를 성분으로 나타내면 다음과 같다.

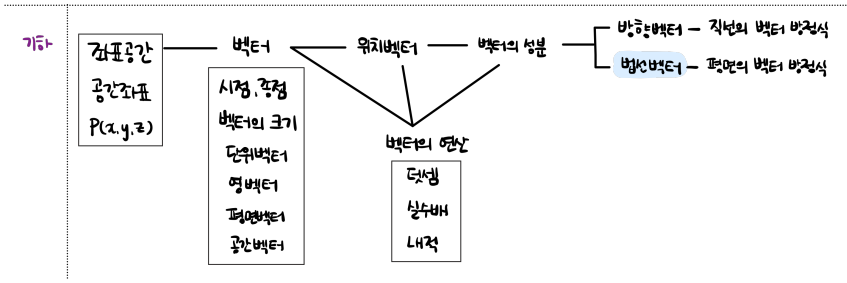
$$\cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

즉, 두 평면이 이루는 각은 두 법선벡터의 각을 이용하여 위와 같은 방식으로 구할 수 있다.

개념

법선벡터와 관련된 용어에는 어떤 것이 있나요?

법선벡터는 벡터, 위치벡터, 벡터의 성분, 실수배, 내적, 방향벡터(직선의 벡터방정식), 법선벡터(평면의 벡터방정식), 교선, 이면각 등의 용어 및 개념과 밀접한 관련이 있다.



법선벡터는 평면에 수직인 **위치벡터**로, 평면의 벡터방정식을 표현할 때 핵심적인 역할을 한다. 또한 **벡터의 성분**을 통해 법선벡터를 나타내면 평면의 방정식을 일반형으로 나타낼 수 있으며, **실수배** 관계에 있는 법선벡터는 서로 같은 평면 또는 평행한 평면을 의미한다.

두 평면이 이루는 **이면각**의 크기는 각 평면의 법선벡터가 이루는 각을 이용해 계산되며, 두 평면의 **교선**의 **방향벡터**는 두 법선벡터에 동시에 수직인 벡터이므로 각 법선벡터와의 **내적**이 0이 되는 벡터를 찾는 방식으로 구할 수 있다.

즉, 법선벡터는 평면의 수직 방향을 결정하고, 평면과 직선 또는 다른 평면 사이의 공간적 위치 관계를 분석하는 데 중심적인 역할을 하는 중요한 개념이다.

[별책 1] 고등학교 수학 용어 안내자료

한국과학창의재단
연 구 협 력 관 조혜정 (한국과학창의재단 선임연구원)

주 관 연 구 기 관 서원대학교
연 구 수 행 도종훈 (교수 / 연구책임자)
김대욱 (부교수 / 공동연구원)
신기철 (조교수 / 공동연구원)
최선미 (조교수 / 공동연구원)
정은지 (조교 / 연구보조원)
김민지 (학부생 / 학생연구원)
추가은 (학부생 / 학생연구원)

※ 이 자료는 2025년도 교육부 재원으로 한국과학창의재단의 지원을 받아 수행된 성과물임

고등학교 수학 용어 안내자료

An Explanatory Guide to High School Mathematics Terms

주 의 문

■ 본 연구의 주장이나 제언은 연구진의 견해이며, 한국과학창의재단의 공식 입장이 아닙니다.

■ 이 보고서를 인용하실 때에는 반드시 출처를 표기하여 주시기 바랍니다.

한국과학창의재단
Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity

06130 서울특별시 강남구 테헤란로7길 22 과학기술회관, 2관 4~5층(한국과학창의재단)
TEL 02-555-0701 FAX 02-555-0702 www.kofac.re.kr